Mathématiques en cycle 3
Actes du Colloque

Colloque du réseau des IREM

Conférences

Ateliers

Edités par Bertrand LEBOT
(IREM de Poitiers)
et Fabrice VANDEBROUCK
(Université Paris Diderot)

Organisé par l'IREM de Poitiers les 8 et 9 juin 2017
dans les locaux de l'ESPE de Poitiers

Mathématiques au Cycle 3

Actes du Colloque du Plan National de Formation

Poitiers (86) – les 8 et 9 Juin 2017

Coordonnés par

Jean-François Cerisier
Thierry Chevalarias
Lalina Coulange
Ghislaine Gueudet
Julien Michel
Fréedérick Tempier

Sous la direction de

Fabrice Vandebrouck & Bertrand Lebot

ISBN 978-2-85954-096-8 / EAN 9782859540968

2018 - IREM de Poitiers
Bâtiment de mathématiques H3,
Téléport 2 BP 30179,
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL Cedex
Tél : (+33) 05 49 45 38 77
Mél : secrirem@math.univ-poitiers.fr
Site : http://irem2.univ-poitiers.ftportail/
Imprimé en France.

Table des matières

Remerciements

L'IREM de Poitiers tient à remercier la DGESCO et l'ADIREM qui lui ont fait confiance en leur proposant l'organisation de ce colloque.

Celui-ci n'aurait pu se tenir sans la participation matérielle de l'ESPE de Poitiers qui nous a accueillie dans ses locaux mettant à notre disposition les salles et le matériel nécessaire aux ateliers et conférences. Le comité d'organisation formé de membres de l'IREM ont contribué au bon déroulement de ces deux jours. Nous leurs en sommes reconnaissant.

Il reste enfin nos partenaires financiers qu'ont été la CASDEN, la MAIF, la MGEN, l'espace Mendes France et le Grand Poitiers. Leur dons nous ont permis de créer des temps d'échanges moins formels et plus chaleureux que ce soit lors de l'accueil, la soirée entre les deux jours ou des moments de pause.

Le comité scientifique a su faire un travail de qualité parfois dans l'urgence avec emploi du temps déjà bien rempli.

Enfin nous tenons a remercier plus particulièrement Isabelle Amour la secrétaire de l'IREM qui a su avec une grande qualité jongler entre les contraintes matérielles ou institutionnelles, les caractères et les modes de fonctionnement de chacun. Sans elle, il est sûr que nous ne serions pas arrivés à ce résultat.

Présentation

L'ADIREM a proposé que se tienne en 2017 un colloque « Mathématiques au Cycle 3 » inscrit au Plan National de Formation (PNF). Le souhait était de saisir l'occasion des changements de programme pour rassembler inspecteurs, formateurs et groupes de recherche du premier et second degré. Il s'agissait aussi de l'aboutissement d'un effort de trois années pour monter dans les IREM des groupes primaire-collège, avec le soutien de la DGESCO.

L'IREM de Poitiers fut chargé de son organisation. Le colloque eut lieu le 8 et 9 juin 2017 dans les locaux de l'ESPE Poitou-Charentes. Les thématiques à traiter étaient nombreuses : algorithmique et programmation, histoire, évaluation, géométrie, calcul et numération, résolution de problèmes, …

Le réseau des IREM, par la diversité des acteurs et de leur statut (enseignant-chercheur, enseignant du premier et du second degré), fut le vivier de l'essentiel des animateurs. Nombreux se sont saisis de l'occasion pour toucher un public auquel ils n'avaient pas accès. Ainsi ce fut l'occasion d'échanger et de montrer l'expertise qui règne au sein des IREM que ce soit dans la réflexion, la pluralité des équipes mais aussi dans leur capacité à mobiliser pour les ateliers (37 animateurs sur les 44 étaient issus des IREM) ou pour l'organisation (156 participants accueillis par 20 membres de l'équipe de Poitiers).

L'organisation n'aurait toutefois pas pu se faire sans les locaux prêtés par l'ESPE de Poitiers et la disponibilité de son personnel. Ainsi avons-nous pu bénéficier durant deux jours d'un amphithéâtre et d'une dizaine de salles. La proximité du centre ville a permis d'assurer un temps de détente entre les deux jours du colloque. La complexité vint surtout de l'articulation de modes de gestion différents entre le milieu universitaire (pour les ateliers et conférences), le premier degré et le second degré. Les temps dans les différentes institutions ne sont pas les mêmes tout comme la communication. Les personnes de la DGESCO furent toutefois compréhensives. Ce fut l'occasion de découvrir nos fonctionnements respectifs et d'innover dans la communication.

Ainsi avons-nous eu une totale liberté quant au contenu. Le comité scientifique fut composé d'universitaires et d'enseignants de terrain. L'appel à contribution a été lancé en juillet 2016 dans les différents réseaux IREM, APMEP et ESPE. Les différentes CII furent un relais important pour avoir le nombre d'ateliers nécessaire pour accueillir tous les participants annoncés par la DGESCO (160 places). En effet la demande lancée aux Inspections de mathématiques n'a donné aucune réponse positive.

Pour les conférences, ce furent les membres du comité scientifique appartenant à la COPIRELEM et la CORFEM qui furent forces de proposition et permirent d'obtenir des intervenants de qualité. Ainsi la première conférence présentée par Christine Chambris a mis en évidence avec la question de l'enseignement des nombres, l'importance du discours sur la présentation des décimaux et des entiers pour répondre à la difficulté de la règle du zéro.

A travers le boulier, Caroline Poisard présenta une recherche où les enseignants s'appropriaient de nouvelles ressources. Ce fut l'occasion de mettre en avant les façons dont les enseignants s'approprient les ressources qu'on leur propose pour construire eux-mêmes leurs documents pour la classe.

La troisième conférence présentée par Matthieu Gaud, montrait l'importance d'une analyse historique et didactique pour la création de nouvelles situations. Celles-ci permettent de donner des exemples d'utilisation des savoirs mathématiques et d'en motiver leur étude.

En conclusion, Jean François Chesné, directeur du CNESCO (Conseil National d'Évaluation du Système Scolaire) nous a donné un éventail des différentes évaluations nationales et internationales en abordant la complexité du problème qui ne peut pas se résumer à certaines évaluations fortement médiatisées..

L'alternance avec les 4 plages d'ateliers fut sans doute intense pour les participants. Cela n'a pas empêché des échanges riches entre participants d'origines diverses (formateurs IREM, IEN, IPR, maîtres formateurs, enseignants des ESPE et chercheurs en didactique). Cette hétérogénéité lorsqu'elle a eu lieu, a permis d'avoir des regards croisés sur ce qui était proposé : celui du chercheur, celui du formateur et celui de l'institution. Les différentes pauses notamment méridiennes sont restées des temps importants de prises de contact et d'échanges informels.

Le travail ne s'est toutefois pas arrêté à la fin du colloque. Vous avez sous les yeux le fruit final du travail, les actes. Pour leur rédaction, l'habitude des enseignants chercheurs à cet exercice a permis d'en rendre la relecture efficace. Ils sont mis en ligne sur le site de l'IREM de Poitiers[1] avec un lien sur le site des IREM[2]. Quelques exemplaires papiers sont également diffusés.

Par ailleurs, l'ESPE par l'intermédiaire de l'université nous a fourni les moyens matériels pour filmer les conférences sur UPTV[3].

F. Vandebrouck

B Lebot

Pour le comité d'organisation et le comité scientifique

Conférences

Conf 01 : Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3

Christine Chambris

Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR EA4434), UA, UCP, UPD, UPEC, UR ; christine.chambris@u-cergy.fr

Résumé : La conférence de consensus sur les nombres et le calcul qui s'est tenue en novembre 2015 a rappelé les difficultés des élèves dans l'apprentissage des nombres notamment décimaux à la fin de l'école. Plusieurs intervenants à la conférence (Chesné et Fischer, Desmet) s'interrogent sur l'introduction des décimaux. Dans ses conclusions, la conférence recommande d'étudier les fractions en amont des décimaux mais que ce travail ne soit pas trop ambitieux, tout en soulignant la nécessité de mettre en avant que l'écriture décimale des décimaux est un prolongement de celle des entiers. Dans cet exposé, il s'agira d'investiguer plus avant ces tensions qui existent dans l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3. Nous chercherons aussi à identifier des marges de manœuvre.

Mots clefs : Nombres décimaux, fractions, grands nombres, liaison école-collège, unités

Introduction

Le titre de cette conférence est centré sur les nombres décimaux. Pourtant, comme nous allons le voir, on ne peut penser l'enseignement des décimaux au cycle 3 sans considérer à la fois celui des entiers et celui des fractions puisque d'une part l'écriture décimale qui sera privilégiée pour les décimaux vient des entiers, et parce que le concept de nombre décimal est intimement lié au fractionnement des grandeurs.[1]

Sauf exceptions signalées, les données statistiques que j'utilise viennent soit de la conférence de consensus qui s'est déroulée en novembre 2015 et à laquelle je ferai référence à plusieurs reprises, en particulier du rapport Chesné et Fischer sur les acquis des élèves, soit directement de la thèse de Chesné (voir aussi le texte de la conférence de Chesné dans ces actes). Je vais d'ailleurs commencer par citer un extrait de la conclusion du texte de Chesné et Fischer.

> *Un certain nombre d'élèves se présentent donc à l'entrée au collège comme des "experts apparents" (Roche et Clarke, 2006), pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres), mais cette réussite opérationnelle masque une conceptualisation déficiente des nombres décimaux (...), voire des nombres entiers. (...) Nous suggérons donc qu'il est urgent de répondre à un certain nombre de questions, institutionnelles (Comment et quand introduire les nombres décimaux ? (...)), et didactiques (sur les changements de registres, sur la demi-droite graduée, (...)).* (Chesné & Fischer, 2015, p.41)

[1] Ce texte reprend beaucoup d'aspect du texte publié dans le numéro 108 de la revue Repères-IREM du réseau des IREM : Un regard sur les nombres à la transition école – collège par C. Chambris, F. Tempier, et C. Allard, pages 63 à 91 (j'y réfère par RI-108 dans ce texte). Il en adopte néanmoins une présentation souvent différente et en précise d'autres.

Plutôt que de m'attaquer à la grosse question institutionnelle : « comment et quand introduire les nombres décimaux », je vais resituer l'enseignement des décimaux dans le contexte plus large de l'enseignement des nombres au cycle 3 et tenter d'identifier des points sensibles dans cet enseignement ainsi que des leviers pour intervenir localement plutôt que d'envisager des changements plus globaux.

Pour situer l'intérêt des décimaux, je vais faire un premier détour historique (en m'autorisant un anachronisme car les notations que j'utilise ne sont pas d'origine). En particulier, avec les fractions, le calcul de sommes, de nombres non entiers donc, est couteux puisqu'il faut mettre au même dénominateur les fractions : $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=\frac{6\times1}{6\times2}+\frac{4\times2}{4\times3}+\frac{5}{12}=\frac{6+8+5}{12}=\frac{19}{12}=1+\frac{7}{12}$.

Pour obtenir une approximation décimale de cette somme, j'ai retenu des approximations décimales au centième de chacune des fractions, puis j'ai aligné les uns en dessous des autres les chiffres qui représentent des unités du même ordre et effectué l'addition posée comme avec les entiers. Ainsi, l'invention de l'écriture positionnelle permet notamment d'étendre les techniques de calcul sur les nombres entiers aux nombres non entiers. Et cette écriture décimale à virgule incorpore à la fois des propriétés des entiers et d'autres des nombres non entiers.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & & \\ & 0, & 5 & \\ + & 0, & 6 & 7 \\ + & 0, & 4 & 1 \\ \hline & 1, & 5 & 8 \end{array}$$

Toutefois, cette extension ne se fait pas sur tous les nombres non entiers mais seulement sur les décimaux, qui approximent d'aussi près qu'on veut toutes les mesures de grandeurs. Ainsi, dans le calcul en colonne, la mise au même dénominateur est prise en charge par l'écriture positionnelle et la relation constante entre deux positions adjacentes de cette écriture, c'est-à-dire le rapport dix entre les unités et les dizaines, les dizaines et les centaines, les unités et les dixièmes, les dixièmes et les centièmes…. Cette propriété de l'écriture décimale des nombres, qu'ils soient entiers ou décimaux, permet de prolonger à peu de frais les techniques sur les entiers, aux nombres décimaux. Pourtant, comme le suggèrent les éléments sur les connaissances des élèves dont nous disposons, cette extension ne semble pas aller de soi pour les élèves du cycle 3. Si, par exemple, presque tous savent multiplier un entier comme 23 par dix, moins de la moitié réussit à multiplier un décimal comme 35,2 par 100.

Pour étudier la complexité de ce transfert des techniques sur les entiers aux décimaux, en particulier au cycle 3, je vais d'abord évoquer l'entrée dans les décimaux au cycle 3 puis les fractions. J'en viendrai ensuite aux nombres entiers qu'on étudie au cycle 3. Je terminerai ce voyage avec la question du transfert, avant de tirer quelques conclusions.

L'entrée dans les décimaux

La conférence de consensus, dans ses recommandations, indique que :

> R12 – L'étude des fractions précède celle des nombres décimaux, mais doit se limiter aux fractions simples (demi, tiers, quart…) et aux fractions décimales (dixièmes, centièmes…) dans le cas du fractionnement de l'unité.

Et ajoute des commentaires :

> Des travaux de recherche en didactique et en psychologie des apprentissages montrent l'utilité de s'appuyer sur les fractions pour donner du sens aux nombres décimaux, mais aussi que le traitement et la compréhension des fractions sont particulièrement difficiles pour les élèves. Dès lors, cet apprentissage ne doit pas être trop ambitieux à l'école primaire. Il sera limité à une maîtrise du fractionnement de l'unité en parts égales sur les fractions simples puis sur les fractions décimales (dixième, centième, …) permettant la compréhension de la signification des chiffres dans l'écriture à virgule.

Ces interrogations relatives à la place des fractions ne sont pas nouvelles. Et en réalité deux grandes tendances se retrouvent dans les constructions mathématiques des décimaux : directement des entiers aux décimaux, ou bien, des entiers aux décimaux, en passant par les fractions. Elles se retrouvent aussi dans les travaux de didactiques relatifs à l'enseignement apprentissage des décimaux et dans les propositions des programmes depuis le début du 20[e] siècle (cf. RI-108, p. 80).

Les constructions des décimaux qui passent par les fractions sont suggérées dans les programmes depuis les années 1980. Les grandes lignes de la progression sont les suivantes :

- étude des fractions simples : manipulations, représentations imagées variées, équivalences du type $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, décomposition en « entier + rompu » : $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$, addition $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- étude des fractions décimales comme cas particuliers de fractions : quelques représentations imagées, équivalences du type $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, $\frac{10}{10} = 1$, $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$, etc. ; décomposition en « entier + rompu » : $\frac{423}{100} = 4 + \frac{23}{100}$; addition : $\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$, etc. ; puis somme de fractions décimales (réduites), réécrites avec l'écriture décimale $4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 4{,}23$ (introduction de l'écriture chiffrée à virgule).

Qu'en est-il de la mise en œuvre de cette progression dans les classes ? Il est extrêmement difficile de répondre à cette question. Allard (2015) a fait une étude de cas (voir aussi RI-108, p.82-84). Elle s'intéresse aux pratiques de professeurs des écoles maîtres-formateurs dans l'enseignement des fractions. Deux enseignants suivent bien la progression. Un troisième essaie de la suivre mais rencontre des difficultés. Le quatrième ne la suit pas du tout. Il utilise le système métrique et des déplacements de virgule dans le tableau de conversion pour introduire les décimaux (ce qui est susceptible de conforter l'idée que ce sont des nombres entiers). Intéressons-nous à la décomposition en « entier + rompu » qui est un point délicat comme nous allons le voir, par exemple $\frac{17}{3}$ c'est 5 et un « reste » de $\frac{2}{3}$. Les deux enseignants qui suivent la progression proposent cette tâche, mais uniquement avec des petits nombres, du fait d'un appui sur des manipulations. Ils mettent deux raisonnements en évidence :

- report de bande unité et comptage simultané : $\frac{3}{3}; \frac{6}{3}; \frac{9}{3}; \frac{12}{3}; \frac{15}{3}; \frac{18}{3}$, puis comptage des reports : $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$;
- calcul en appui sur $1 = \frac{3}{3}$, $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$.

Le raisonnement peut être généralisé avec la division euclidienne : « dans 17 tiers combien de fois 3 tiers ? » qui se traduit par : « en 17 combien de fois 3 ? ». Cette généralisation, sans doute assez délicate, n'est pas enseignée, par suite les raisonnements enseignés ne seront probablement pas suffisant pour comprendre ce qui se joue avec les décimaux. L'enseignant qui rencontre des difficultés propose cette tâche mais il indique uniquement une justification formelle en appui sur la division euclidienne, visiblement inaccessible aux élèves : on divise 17 par 3, le quotient 5, il reste 2 donc $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$. De façon cohérente, le quatrième enseignant qui ne suit pas la progression institutionnelle ne propose pas cette tâche.

De même, si l'équivalence de fractions est « visible » sur des représentations avec des « fractions simples », sa généralisation est délicate, au début du cycle 3. Elle serait peut-être plus accessible, programmée de façon explicite à la fin du CM, en amont des règles algébriques du cycle 4.

Si on résume, la progression sous-jacente pour les fractions-décimaux au cycle 3 est la suivante : d'abord l'étude des fractions simples avec la découverte, quelques équivalences, les décompositions en entier + rompu, l'addition, vient ensuite la généralisation aux fractions décimales, puis l'introduction de l'écriture positionnelle et la « disparition » des fractions. Cette progression est couteuse en termes « d'équipement » sur les fractions pour pouvoir les manipuler correctement, et sans doute difficile. De plus, sitôt les décimaux introduits les fractions disparaissent. Quel est le « retour sur investissement » pour les enseignants qui « investissent » dans les fractions ?

Par ailleurs, si on regarde la présentation de cette progression dans les textes officiels récents, on observe la chose suivante. Elle était assez explicite dans les programmes de 2002. Dans ceux de 2008, la décomposition en entier + rompu apparaissait au CM2 seulement, alors que les décimaux étaient programmés au CM ; et aucun élément explicite n'était présent dans les programmes du collège en 2008. En particulier les fractions venaient après les décimaux. Il semble donc que la progression est peu lisible dans les textes institutionnels.

Ces éléments permettent d'identifier un certain nombre de points sensibles relativement à la mise en œuvre de cette progression : la connaissance et la compréhension de sa logique, la difficulté pour en enseigner certains points comme l'équivalence des fractions, la décomposition en entier + rompu pour des « fractions simples » relativement complexes. De plus, en France contrairement aux pays anglo-saxon où le système de mesure sollicite les fractions, les « débouchés »[2] des fractions sont, relativement à l'étude des nombres, modestes. Ceci amène à la question : quel est l'enseignement effectivement dispensé pour l'entrée dans les décimaux ? Il n'est pas possible de répondre à cette question sans une enquête plus approfondie. Toutefois, il est possible que la situation soit relativement hétérogène (voir les quatre cas présentés ci-avant).

Les fractions

Diversité des significations et connaissances des élèves

Venons-en aux connaissances des élèves sur les fractions. Plusieurs enquêtes, avec des modalités de passation différentes, ont demandé aux élèves d'associer la fraction $\frac{1}{4}$ et son écriture décimale 0,25 : par exemple trouver deux nombres égaux parmi quatre donnés dont $\frac{1}{4}$, 0,25 et 1,4 ; écrire $\frac{1}{4}$ avec une virgule. Elles donnent le même taux de réussite, environ 27% des élèves en fin de CM2 ou en début de 6^{e} parviennent à indiquer que $\frac{1}{4}$=0,25. Ce taux de réussite peut être troublant tant il semble clair qu'un quart c'est « zéro vingt cinq ». Alors qu'est-ce qui est difficile ? Tout d'abord, pour réussir à ces tâches il faut mettre deux systèmes de signes en relation : l'écriture avec barre de fraction et l'écriture à virgule décimale. L'apprentissage de chacun de ces systèmes démarre au CM1, c'est donc un apprentissage relativement récent en début de 6^{e}. Identifier les connaissances qui sont nécessaires pour traiter cette tâche peut permettre de comprendre plus précisément le faible taux de réussite.

Plusieurs techniques, mobilisant des connaissances différentes, sont possibles. L'élève peut s'appuyer sur des connaissances mémorisées qui impliquent le langage courant : en particulier « et demi », c'est 0,5, « quart » c'est 0,25 et aussi 0,75. Pour ce faire, il faut déjà savoir lire la fraction 1 sur 4 comme « un quart ». Une autre façon de faire peut être d'interpréter $\frac{1}{4}$ comme 1 divisé par 4 et

[2] Comme les bioénergies constituent de nouveaux débouchés pour l'agriculture.

d'effectuer le calcul. Si 0,25 est une réponse proposée, l'élève peut transformer 0,25 en $\frac{25}{100}$ et comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$. Pour ce faire, si l'élève sait que multiplier ou diviser par un même nombre numérateur et dénominateur permet d'obtenir des fractions équivalentes, il peut utiliser le facteur commun 25, à condition quand même de savoir que 100 = 4 x 25. Toutefois, à l'école, l'équivalence de fractions n'est en principe travaillée que sur des petits nombres comme 3 quarts équivalent à 6 huitièmes et n'est en principe pas établie dans le cas général. Elle s'obtient par un découpage ou en appui sur des représentations ; 25 et 100 ne sont cependant pas des petits nombres et imaginer un découpage *ad hoc* semble difficile. A partir d'une fraction opérateur, l'élève peut raisonner sur un cas particulier, par exemple en prenant le nombre 100, ou dans le cas général et conclure. Ces raisonnements supposent notamment d'interpréter la multiplication par 0,25 comme un opérateur « prendre $\frac{25}{100}$ de ». (voir RI-108, p. 65-67 pour plus de détails).

Malgré la multiplicité des techniques qui conduisent à $\frac{1}{4} = 0{,}25$, cette égalité banale cache peut-être une certaine complexité en fin d'école. En effet, le théorème général pour l'égalité des fractions n'est pas au programme de l'école, la multiplication par un décimal non plus. L'équivalence des fractions à partir de la mesure des grandeurs, qui relève en partie de l'école, est rendue complexe car les nombres sont plutôt grands. Pour réussir, il reste aux élèves qui n'ont pas mémorisé la connaissance $\frac{1}{4} = 0{,}25$, l'interprétation de $\frac{1}{4}$ en 1 : 4.

Les fractions dans la transition : le cas du partage au quotient

Les traités classiques prenaient en charge le lien entre le *n*-ième de a et $\frac{a}{n}$ sur des exemples génériques. Par exemple, dans le traité de Reynaud (1821), il s'agit de prouver que 4 divisé par sept (ou le septième de quatre) c'est quatre septièmes :

> il reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce (…) quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales ; chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise 7 fois, donne le dividende 1. Mais, 4 égal à 1 plus 1 plus 1 plus 1 ; on obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le septième de 1 ; de sorte que le septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un. (§14)

Avec le symbolisme arithmétique, ce peut être traduit par : $4{:}7 = (1+1+1+1){:}7 = (1{:}7) + (1{:}7) + (1{:}7) + (1{:}7)$ or $1{:}7 = \frac{1}{7}$ donc $4{:}7 = \frac{1}{7} \times 4$ *et* $4 \times \frac{1}{7} = 4{:}7 = \frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7}$. [3] Pour ce faire, le lien entre $1{:}7$ et $\frac{1}{7}$ est clairement pris en charge.

Que nous disent les programmes sur ce point ? Depuis 1996, ce qui est visible à la lecture des programmes relativement à la place des fractions dans la transition école-collège, ce sont les différentes interprétations de la fraction : du partage (pour l'école) au quotient (pour la classe de 6^{e}). Qu'est-ce que la fraction partage ? C'est considérer que $\frac{a}{b}$ c'est *a b*ièmes, c'est-à-dire *a* fois 1 *b* ième. Qu'est-ce que la fraction quotient ? C'est la solution de l'équation *a* x *x* = *b*. La fraction est le quotient de l'entier *a* par l'entier *b*, le nombre qui multiplié par *b* donne *a*.

Comment la liaison doit-elle être opérationnalisée ? Un texte de l'inspection générale indique comment passer d'une conception à l'autre (voir aussi Chesné, 2007), sur un cas particulier. Plus précisément, le texte explique pourquoi 7 quart est solution de l'équation 4 *x* = 7. « 4 fois 7 quarts,

[3] Nous utilisons ici la convention antérieure à 1970 où le multiplicande est à gauche et le multiplicateur à droite. Cette convention n'est plus en usage. La convention (implicite) aujourd'hui semble être que l'ordre des facteurs dans une multiplication est indifférent (ce qui ne permet pas de distinguer – si besoin était- définition de la multiplication et propriété de commutativité).

c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 » (IGEN, 2004, p. 3). L'explication masque la propriété d'associativité de la multiplication qui permettrait de généraliser la preuve. Qu'en est-il de cette répartition *du partage au quotient* dans les pratiques des enseignants ? Dans RI-108 (p.69-70), les quelques cahiers de 6^e étudiés montrent que la fraction est présentée d'emblée comme un « calcul » : $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b. Cette approche est d'ailleurs apparemment considérée comme un « rappel » de ce qui se fait à l'école. Quel travail est effectivement proposé aux élèves à l'école sur les fractions, comme mesures de grandeurs ? Ce travail est-il enrichi au collège, le cas échéant comment ? Cette question restera ouverte. Néanmoins, des indices interrogent sur la lisibilité des objectifs pour les enseignants. L'étude des fractions, comme mesures de grandeurs, à l'école pourrait présenter des variations très importantes selon les classes. Les fractions pourraient parfois y être déjà considérées comme « une division ». Au collège, l'enrichissement des connaissances sur les fractions, comme mesures de grandeurs, pourrait être très modeste. Et l'injonction « du partage au quotient » pourrait être interprétée comme un découpage plutôt qu'une invitation à faire un lien entre deux points de vue.

Les fractions dans la transition : le cas de la fraction comme opérateur

Une autre interprétation des fractions que élèves du cycle 3 rencontrent est celle de la fraction « opérateur » : la moitié de, le quart de, les 2 tiers d'un nombre… Au fil des programmes, cette interprétation des fractions a fortement varié. A l'école, en 1945, les fractions sont des opérateurs sur les grandeurs : « Prendre les quatre cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (…). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. ». Ce point de vue est aménagé en 1970-1980, avec la restriction aux opérateurs sur des nombres (dans le domaine numérique) : l'enchaînement d'une division et d'une multiplication (qui commutent, à l'ensemble de définition près), et sur des grandeurs (domaine mesure en 1970). En 2002, il reste les fractions de nombres entiers, de même en 2008 mais le facteur multiplicatif n'est plus explicite, restent quart et tiers au début du cycle 3. Ces expressions apparaissent dans l'étude des nombres *entiers naturels* (et non en relation avec les problèmes arithmétiques ou les fonctions). L'enrichissement au long du cycle n'est pas explicitement prescrit, même si rien n'empêche de proposer des tâches comme « combien font les deux tiers de 600 g ? ». Les manuels du CM (Thomas 2013) en 2012 présentent une grande diversité relativement à la présence de tels problèmes : aucun, un peu, beaucoup.

Qu'en est-il en 6^e ? Dans les programmes, en 2008, il s'agit de « prendre une fraction d'une quantité, modélisation par multiplication ». Dans des cahiers de 6^e (RI-108, p. 71), le savoir en jeu pour $\frac{3}{4} \times 12$ semble être l'équivalence de trois modes de calcul : (3 x 12) : 4, (3 : 4) x 12, (12 : 4) x 3 qui est le seul point qui apparaît. Les connaissances des élèves des élèves à l'entrée en 6^e sont très fragiles puisque « Le nombre égal aux deux tiers de 12 est : » est réussi à 11%, et le QCM « deux tiers de 12 kg font : 4 kg, 8 kg, 24 kg, 72 kg est réussi à 33%. « Le tiers de 60 km » et les *quarts* semblent un peu mieux maîtrisés (Chesné 2014).

Dans le programme du cycle 3 (2016), il s'agit de « relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et 1/2 de, 1/3 de, 1/4 de, etc. », le cadre est celui de l'étude des fractions, ce qui pourrait contribuer à enrichir le travail proposé aux élèves, notamment les liens entre fractions de nombre, fractions mesures de grandeurs, fractions de grandeur même aucun facteur multiplicatif n'est indiqué.

Par exemple, pour calculer 2 tiers de 12 cm, deux techniques pourraient être proposées à l'école et confrontées à un moment :

- fabriquer « 2 tiers de 12 cm », par pliage, à partir d'une bande papier de 12 cm : plier en trois pour avoir le tiers de 12 cm, puis dupliquer la longueur obtenue, la mesurer,
- par calcul, le tiers de 12 cm, 12 cm : 4 = 3 cm, puis 3 cm x 3 = 9 cm.

Des pistes pour faire évoluer le travail sur les fractions

A partir de ce qui précède nous proposons quelques pistes susceptibles de faire évoluer la situation.

Les quantièmes et le lien avec la division

Le premier axe pourrait être le renforcement de la caractérisation des quantièmes (fractions unitaires) et leur lien avec la division. Ainsi, $\frac{1}{n}$ c'est la taille de l'unité partagée en n parts égales mais $\frac{1}{n}$ c'est aussi c'est ce qu'il faut mettre n fois pour faire l'unité. Si la première caractérisation semble travaillée, la deuxième l'est peut-être moins. De ces deux caractérisations découlent : $\frac{1}{n} \times n = 1$; $\frac{n}{n} = 1$; $1 : n = \frac{1}{n}$.

La place des fractions dans le cycle 3

Il est possible que le travail sur les fractions soit de faible ampleur à l'école et en 6^{e}. Les éléments qui précèdent sont un levier pour le renforcer.

Serait-il opportun, et à quel moment serait-ce le plus opportun, de renforcer le travail sur les équivalences à partir des mesures de grandeurs ? Au début du cycle 3 ou à la fin du cycle, juste avant d'aborder les théorèmes algébriques du cycle 4, avec l'hypothèse que les élèves seraient mieux armés cognitivement ?

Le point de vue opérateur occupe peu de place à l'école, le renforcer pourrait permettre d'accroitre les « débouchés » des fractions. Les programmes parlent des *fractions simples.* Limiter cette liste aux demi, tiers et quart ne permet pas, par exemple, d'apprendre la généralité des désignations en « i-èmes » (pourtant utilisées avec les dixièmes et les centièmes). Des problèmes du champ multiplicatif pourraient être liés plus fréquemment avec les fractions simples en « i-èmes ».

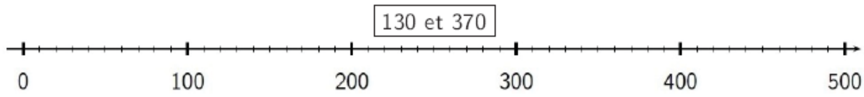
La numération des entiers

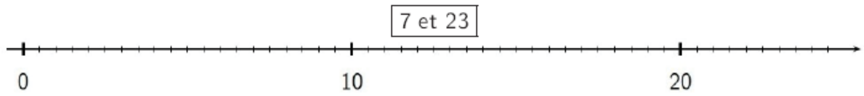
Les entiers pour mieux comprendre les décimaux ?

Chesné et Ficher parlaient d'élèves experts apparents dont la réussite pouvait masquer une conceptualisation défaillante des entiers. Les règles installées sur les entiers masquent-elles une conceptualisation défaillante de la numération positionnelle (des entiers) ? Pour étayer indirectement cette hypothèse, on peut aussi citer le travail récent de Desmet (2012) qui montre que certaines connaissances sur l'écriture décimale des entiers sont meilleures prédictrices de la réussite ultérieure sur les décimaux que d'autres sur les fractions. Dans l'étude évoquée, toutes les tâches sur les fractions impliquent l'écriture fractionnaire. Pour l'écriture décimale, les tâches proposées – dont certaines sont citées ci-après- jouent, pour la plupart, sur un changement de registre d'expression des nombres et / ou les relations entre les chiffres de l'écriture chiffrée (ou entre les unités de numération) :

- écrire en chiffres Trois cent cinq, Mille deux, Trois mille seize, Seize cent cinquante quatre,

- écrire en mots : 56, 115, 105, 300, 420, 670,
- Le plus grand nombre de trois chiffres différents, c'est… Dix en moins que cinq centaines, cela fait…, Deux dizaines en plus d'une centaine, cela fait…





Parce que la compréhension de l'écriture décimale des entiers apparaît comme un point crucial pour la compréhension des décimaux, nous allons poursuivre cette enquête du côté des entiers, en particulier d'un autre type de nombres que l'on découvre lui aussi au cycle 3. Il s'agit des grands nombres.

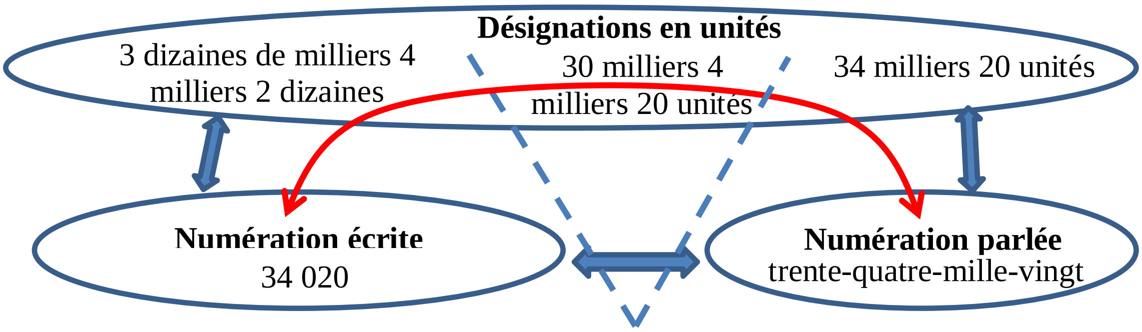
Les connaissances des élèves et des enseignants : des petits aux grands nombres

Écrire un nombre entier à trois ou quatre chiffres est maîtrisé par 95% des élèves en fin d'école alors qu'écrire un nombre entier supérieur à 10 000 ne l'est que par les trois quarts d'entre eux. Il y a relativement peu de recherches sur l'apprentissage des grands nombres, en comparaison de ce qui existe sur les nombres plus petits. Il semble d'abord que les tâches d'écriture des grands nombres fassent ressurgir les difficultés des élèves sur les nombres plus petits puisqu'il faut une très bonne maîtrise des nombres de moins de trois chiffres pour écrire « ceux qui composent » un grand nombre, ce qui surprend parfois les enseignants qui pensaient ces nombres maîtrisés, comme on peut le lire dans (Mercier, 1997). Par exemple, pour « deux millions trois cent quarante mille cent cinq », sur 28 élèves, 19 donnent la bonne réponse mais six écrivent 2 340 500 et un écrit 2 340 050. En effet, le nombre de centaines de *cent cinq* ne s'entend pas et il semble que des élèves en écrivent 5.

Une autre difficulté bien connue de l'apprentissage des grands nombres est celle des « zéros muets ». Les élèves ont des difficultés à articuler le système écrit et le système parlé. Les travaux qui existent sur ce thème (dans la communauté francophone) soulignent que les enseignants sont plutôt démunis lorsque les élèves ne réussissent pas à lire les nombres et attribuent largement ces difficultés d'enseignement au manque d'identification des savoirs mathématiques liés aux grands nombres. Les moyens souvent utilisés, comme le point (mettre un point quand on entend mille, million) et les tranches de trois chiffres (complétées si besoin par des zéros) ne permettent pas toujours de lever les difficultés. C'est le cas par exemple, pour la tâche « écrire en chiffres dix-sept millions deux mille cinquante-huit » qui amène les élèves à proposer : 17 2000 58 / 17 2 58 / 017 200 058 dans Mercier (1997). Cet auteur identifie un « manque à savoir institutionnel ». (voir RI-108, p. 77-79 pour plus de détails)

Des éléments de savoirs sur les grands nombres

J'indique maintenant des éléments pour un savoir à enseigner sur ces grands nombres.



Les unités de numération (unités, dizaines, centaines…) constituent un système de signe qui permet de formuler les savoirs en jeu sur les grands nombres mais aussi d'expliquer, de justifier, de contrôler. Ainsi les noms des nombres peuvent-ils être interprétés dans un premier système à base mille : les unités simples, milliers, millions, milliards… et trente quatre mille vingt peut être interprété comme 34 milliers et 20 unités. Ces 34 milliers peuvent être transformés en 30 milliers et 4 milliers, puis (ou directement) en 3 dizaines de milliers et 4 milliers. Apparaît alors un deuxième système d'unités à base dix, les unités simples, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers, centaines de milliers, millions, dizaines de millions… Ce deuxième système d'unités permet d'interpréter les chiffres de la numération positionnelle décimale. Les unités en 1^{e} position, les dizaines en 2^{e}, les centaines en 3^{e}, les milliers en 4^{e}, les dizaines de milliers en 5^{e}…

Programmes et pratiques des enseignants

On le voit, ces éléments de savoir ont une portée plus grande que les seules lecture et écriture des grands nombres qui apparaissent parfois comme tout ce qu'il y aurait à savoir sur les grands nombres. Ce sont en effet les seules tâches des programmes de l'école en 2008, ou encore les seules présentes dans les évaluations nationales.

Les programmes de 2016 font référence aux décompositions en base mille. Tempier (2016) a interrogé des élèves de fin de 6^{e} sur les relations entre unités. Il observe par exemple qu'à peine la moitié d'entre eux réussit aux tâches : 4 millions = ……….. centaines de milliers et 3 millions = ……….. milliers. Il est intéressant de noter que la relation entre centaines de milliers et millions n'est pas mieux maîtrisée que celle entre milliers et millions. La maîtrise de ces relations entre unités successives (soit pour la numération chiffrée, soit pour la numération parlée) me semble essentielle pour la compréhension des nombres et de leurs ordres de grandeur, notamment. La maîtrise de la numération écrite est par ailleurs engagée dans la compréhension des décimaux.

Quelques tâches et savoirs sur les nombres entiers au cycle 3

Le début du cycle 3 pourrait ainsi être l'occasion de consolider la compréhension du nombre mille, comme 10 centaines, 100 dizaines, des relations comme 3 milliers = 30 centaines et aussi 32 c= 3 m 2c pour aller vers les relations (à travailler à l'oral) 30 centaines de milliers = 3 millions puis 32 centaines de milliers = 3 millions (milliers de milliers) 2 centaines de milliers, mais aussi 3 000 millions = 3 milliards. Ce pourrait être l'occasion d'institutionnaliser une règle générale, pour l'écriture chiffrée, qui sera valable aussi pour les décimaux : dans l'écriture d'un nombre en chiffres, tout chiffre indique des unités dix fois plus grandes que celui qui est à sa droite (et éventuellement tout chiffre indique des unités dix fois plus petites que celui qui est à gauche).

Un autre aspect important à travailler est le lien entre numération et division euclidienne, en particulier résoudre des problèmes du champ multiplicatif, en appui sur la numération, peut permettre de consolider le sens des opérations. La numération permet en effet de résoudre à peu de frais certains d'entre eux car :

- 35621 = 356 centaines 21 unités
- 35621 : 100 = 356 (reste 21)
- 35621 = (356 x 100) + 21

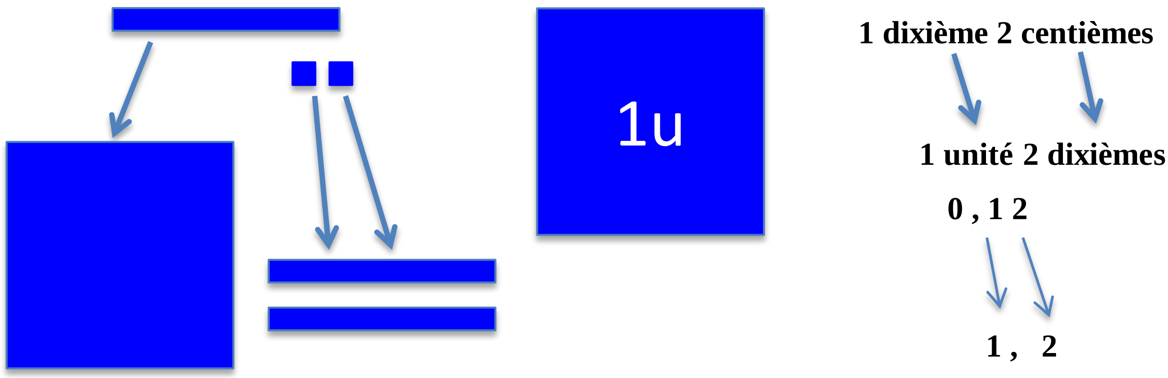
L'extension des techniques des entiers aux décimaux

Dans cette partie nous en venons à l'extension de certaines propriétés de l'écriture décimale des entiers aux décimaux, pour tenter de mieux comprendre l'écart de réussite entre les tâches sur les entiers et les tâches sur les décimaux.

La multiplication par les puissances de dix

La technique dominante pour multiplier les entiers par 100 semble être : écrire deux zéros à droite, par exemple : 24 x 100 = 2400. La technique de multiplication par 100 pour les nombres décimaux semble être : déplacer la virgule de deux rangs vers la droite. Par exemple, 2,345 x 100 = 234,5. Pourtant, pour 2,34 x 100 = 234, la virgule disparaît et pour 4,7 x 100 = 470, la virgule disparaît et un zéro apparaît ! Cette complexité pour appliquer la règle explique sans doute au moins en partie les difficultés des élèves.

Ces deux techniques peuvent être justifiées avec une explication identique : dans la multiplication par 100, chaque chiffre prend une valeur 100 fois supérieure (les unités sont transformées en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités, les dizaines en milliers, etc.). En effet, par exemple pour 0,12 x 10, la justification peut s'appuyer sur : 0,12=1 dixième 2 centièmes (définition de l'écriture décimale). 10 x 1 dixième = 1 unité (car l'unité est dix fois plus grosse que le dixième de l'unité). 10 x 2 centièmes = 2 dixièmes (car le dixième est dix fois plus gros que le centième). D'où 0,12 x 10 = 1 unité 2 dixièmes = 1,2 (définition de l'écriture décimale). En appui sur la grandeur aire, on peut avoir[4] :



Il n'est pas sûr que tous les enseignants mobilisent ce type d'explication. Par ailleurs, y aurait-il un intérêt à enseigner une technique commune aux entiers et aux décimaux comme : *dans une multiplication par 100, chaque chiffre est déplacé de deux rangs vers la gauche* ou encore : *les unités sont transformées en centaines* ? La situation est peut-être assez similaire pour la comparaison.

[4] Idée de présentation empruntée à Charnay (2014).

La comparaison des nombres

Considérons en effet les deux paires de nombres à comparer : 32,4 et 2,56 d'une part, 45,635 et 45,67 d'autre part. Une technique (1) répandue semble être la suivante :

- Etape 1 : Comparer d'abord les parties entières : plus le nombre est long plus il est grand (32 est plus long que 2) et si les deux nombres ont la même longueur, on compare chiffre à chiffre en partant de la gauche jusqu'à trouver deux chiffres différents.
- Si les deux parties entières sont égales (45) : étape 2, pour la partie décimale. Comparer chiffre à chiffre, à partir de la gauche, les chiffres des dixièmes, puis ceux des centièmes, etc. jusqu'à trouver deux chiffres qui diffèrent.

La première étape (utilisée fréquemment pour les entiers) s'appuie sur la longueur du nombre, la deuxième est spécifique de la partie fractionnaire. Cette technique ne renforce-t-elle pas l'idée qu'un décimal est la juxtaposition de deux entiers ? Des techniques différentes pour les parties entière et décimale sont-elles obligées ?

Il semble qu'une alternative soit *théoriquement* possible en au moins une des techniques suivantes.

- 2) Repérer l'ordre de l'unité le plus grand dans chaque nombre, comparer ces ordres d'unité :
  - des dizaines pour 32,4 et des unités pour 2,56, ils sont différents : celui qui est le plus grand indique le plus grand nombre
  - des dizaines pour 45,635 et 45,67 : ils sont identiques. Comparer les chiffres, de gauche à droite, jusqu'à ce que deux chiffres différents se présentent (les dizaines, puis les unités, puis les dixièmes, puis les centièmes).
- 3) Ecrire des zéros à droite pour que chacun des nombres à comparer exprime un nombre entier d'unités du même ordre : 32,4=3240 centièmes et 2,56=256 centièmes ou encore 32400 millièmes et 2560 millièmes, etc.

La technique 2 se généralise aux écritures décimales illimitées des réels (pas la technique 3, à moins d'effectuer des troncatures). La technique 3 « rabat » les décimaux sur les entiers. Elle consiste donc à convertir les deux nombres dans une même unité de façon à avoir deux nombres entiers d'unités du même ordre. La technique de comparaison des entiers sur la « longueur du nombre » s'applique. Ces deux techniques sont valables à la fois pour les entiers et les décimaux.

Le renforcement de l'écriture décimale

Une idée fondamentale pour renforcer la compréhension de l'écriture décimale est de souligner ce qui est commun aux entiers et aux décimaux (CREM, 2011a, 2011b), plus précisément aux écritures décimales avec et sans virgule, par exemple :

- les différentes positions indiquent des unités dont l'ordre de grandeur est différent : de dix en dix fois plus grand quand on va vers la gauche, de dix en dix fois plus petit quand on va vers la droite,
- un signe marque l'unité : le chiffre de droite pour l'écriture sans virgule, le chiffre à gauche de la virgule pour l'écriture avec virgule,
- le zéro est un gardien de place inoccupée,
- etc.

Une idée complémentaire est de souligner ce qui n'est pas commun mais que les élèves utilisent dans les deux cas, par exemple un zéro terminal à droite multiplie le nombre par dix.

Entre écriture décimale et fractions : les noms des nombres

Les constructions mathématiques des décimaux à partir de la mesure des grandeurs, qu'elles passent ou non par les fractions, ont pour point commun d'une part de fractionner des unités en dix de façon itérative, d'autre part de s'appuyer sur l'écriture décimale positionnelle.

Un autre axe pour renforcer le lien entre les écritures fractionnaires et les écritures décimales est la lecture de ces nombres. Une technique pour lire un nombre en écriture décimale, par exemple 5,14, est la suivante. Il suffit de lire la partie entière et de lui juxtaposer le « nombre entier » qui constitue la partie décimale en terminant par le nom du rang du chiffre le plus à droite (ici, des centièmes), donc 5,14 peut se dire 5 et 14 centièmes. La technique chiffre par chiffre donne une autre désignation fractionnaire : 5 unités 1 dixième 4 centièmes.

Dire *quatorze sur cent* pour $\frac{14}{100}$ et *cinq virgule quatorze* pour 5,14, utiliser ces désignations pour parler des nombres, c'est un peu comme épeler les mots pour parler : le sens des nombres n'est pas véhiculé dans l'oral. A elle seule, une désignation bien choisie permet donc de lier fractions et écriture décimale : 5 et 14 centièmes pour 5,14 et $5+\frac{14}{100}$. Par ailleurs, la mise en relation des deux désignations 5 et 14 centièmes d'une part, 5 et 1 dixième et 4 centièmes d'autre part fournit une conversion, réalisée à moindre coût, de la partie décimale : 14 centièmes = 1 dixième 4 centièmes. En écriture fractionnaire la double lecture se traduit par : $5+\frac{14}{100}=5+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$. L'ajout de zéros « inutiles » est également un moyen de convertir : 0,2=0,20, 2 dixièmes = 20 centièmes. Bien sûr c'est parce que l'écriture décimale est ce qu'elle est que les conversions se réalisent automatiquement, néanmoins utiliser ces désignations pour les nombres en écriture à virgule est susceptible de favoriser le lien entre nombre décimal et fractions.

Pour conclure

Pour conclure, je souhaite revenir sur quelques leviers directs ou indirects qui pourraient être utiles pour renforcer les connaissances des élèves sur les décimaux. Le premier consiste à approfondir la compréhension de l'écriture décimale des entiers, en renforçant la connaissance des relations entre les unités, en généralisant ses règles de fonctionnement, en la liant à la division euclidienne ou à la multiplication par les puissances de dix. Le second levier consiste à tenter de donner davantage de place aux fractions. Une première piste est l'utilisation plus fréquente des désignations en « –ième », à la fois pour les écritures fractionnaires et décimales (ceci suppose de considérer d'autres dénominateurs que 2, 3 et 4 pour les fractions simples), une deuxième est d'introduire le quotient 1 : *n* et l'égalité $1\!:\!n=\frac{1}{n}$ dès le CM1 ainsi que les deux caractérisations de $\frac{1}{n}$; la troisième consiste à proposer des problèmes avec des fractions opérateurs dès le CE2 (avec des fractions unitaires, écrites en mots, en lien avec la division), puis avec des fractions plus variées au CM1. Une quatrième piste pourrait consister à consolider –et généraliser- certaines connaissances sur les fractions simples, à partir de la mesure des grandeurs, comme les équivalences de fractions, les décompositions en « entier+rompu ». La fin du cycle 3, avant le travail algébrique, pourrait être opportune. Un troisième levier pourrait être d'étendre, plus explicitement, l'écriture positionnelle des entiers aux décimaux, par exemple en soulignant ce qu'elle a de commun pour les entiers et les décimaux, à harmoniser les techniques et / ou leurs justifications pour les entiers et les décimaux.

La conférence de consensus suggérait à l'institution de réfléchir à la question « Comment et quand introduire les nombres décimaux ». C'est un problème complexe qui engage de nombreux équilibres. Il nous semble que nous avons envisagé dans ce texte des évolutions plus modestes susceptibles néanmoins de faire évoluer la situation, sous la condition de formations pour les enseignants.

Références

Allard C. (2015) *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Thèse de l'Université de Paris 7.

Bezout E., Reynaud A.A.L. (1784/1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9e édition. Notes sur l'arithmétique de Bezout, par A.A.L Reynaud (1821)

Bolon, J. (1993) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N, 52*, 49-79.

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux 1.

Chambris, C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM, 69*, 5–31.

Charnay R. (2014) *La culture mathématique, c'est dès l'école primaire ! Réflexions sur les programmes scolaires.* Conférence aux journées nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 18-21 octobre 2014, Toulouse.

Chesné J.-F. (2007) Du partage au quotient, Disponible en ligne : http://maths.ac-creteil.fr/spip.php?article39 (consulté le 14/02/2017).

Chesné J.-F. (2014) *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.* Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Chesné J.-F., Fischer J.-P. (2015) Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO. Disponible en ligne : http://www.cnesco.fr/fr/numeration-acquis-des-eleves/ (consulté le 14/02/2017).

CREM (2011a) *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux, Rapport final.* Michaux C. (Dir.), Rouche N. (Dir.), Grégoire J. (Dir.), Desmet L., Skilbecq P., Fanuel J., Soille S. Nivelles, Belgique : CREM

CREM (2011b) *Enseigner et apprendre les nombres décimaux. Activités de remédiation en 5^{e} et 6^{e} primaire. Fascicule à destination des enseignants.* Nivelles, Belgique : CREM

Desmet L. (2012) *L'apprentissage des nombres décimaux, des nombres rationnels représentés par le système décimal de position*. Thèse de l'université catholique de louvain. belgique.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1986) *Nombres décimaux*. Brochure n° 62 Paris : IREM Paris 7.

IGEN (2004/2006) « Les nombres au collège ». Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. Disponible en ligne : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf (consulté le 14/02/2017).

Lebesgue H. (1932) Sur la mesure des grandeurs. (Partie 1) *L'enseignement mathématique. 31*, 173-206.

Mercier A. (1997) La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »* (pp. 259-312), Paris : L'Harmattan.

Roditi E. (2007) La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *12*, 55-81

Stevin S. (1585) *La disme*.

Tempier F. (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, *98*, 67-90.

Thomas C. (2014) *A la recherche des fractions de grandeurs au cours moyen*. Mémoire de master. Université Paris-Diderot.

Conf. 02 : Ressources pour les professeurs au cycle 3. Quand un instrument de calcul ancien s'invite dans une classe utilisant les nouvelles technologies

Caroline Poisard

ESPE de Bretagne – UBO, laboratoire du CREAD, IREM de Brest; caroline.poisard@espe-bretagne.fr

Résumé : Nous présentons ici une réflexion sur le travail des professeurs avec des ressources. Pour illustrer notre propos nous nous appuyons sur un travail de recherche de plusieurs années qui a abouti à la production de ressources. Les ressources produites sont des ressources pour la classe (la mallette « boulier chinois à l'école » disponible en ligne) et un parcours de formation pour les professeurs (disponible sur la plateforme nationale M@gistère). Les savoirs en jeu sont la numération décimale, les nombres décimaux et le calcul. Tout d'abord, nous montrons des exemples d'appropriations par des professeurs de ces ressources. Les professeurs combinent des ressources matérielles (boulier chinois matériel, fiches papier/crayon, etc.) et virtuelles (logiciels, applications, etc.) afin de répondre à leurs objectifs. L'usage des nouvelles technologies permet en particulier pour le professeur de mettre en œuvre une démarche d'investigation et également de développer l'autonomie des élèves. Ensuite, nous analysons des travaux d'élèves de cycle 3 en précisant les savoirs mathématiques en jeu. Nous montrons que l'analyse des procédures et des erreurs des élèves est une ressource centrale pour le professeur.

Mots clefs *: ressources virtuelles et matérielles ; boulier chinois ; nombres et calcul ; liaison CM2-6ème*

1. Introduction : entre recherche et formation

1.1 La didactique des mathématiques : un domaine de recherche

Notre propos se situe entre recherche en didactique des mathématiques et formation des professeurs. La didactique des mathématiques est un domaine de recherche qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université dans le contexte scolaire, mais également en dehors du contexte scolaire (musées, associations, etc.). Son objet d'étude prend en compte le professeur et les élèves en fonction d'un savoir mathématique précis et identifié. En tant que domaine de recherche, la didactique des mathématiques développe des cadres théoriques (avec des concepts) et des méthodologies de recueil et de traitement de données. L'analyse en didactique des mathématiques consiste en particulier en l'analyse de données recueillies qui sont mises en relation avec les concepts d'un (de) cadre(s) théorique(s) choisi(s) . Ceci permet d'aboutir à des résultats de recherche qui décrivent les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage en fonction d'un savoir mathématique. Une des application des résultats de recherche se fait par la formation des professeurs. Cette formation est dispensée actuellement en particulier dans les Master MEEF (Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation) pour les professeur des écoles (PE), professeurs des lycées et collèges (PLC), mais également au sein de la mention PIF « pratiques et ingénierie de formation » qui permet une formation continue des professeurs à et par la recherche en éducation. Pour le travail présenté ici, ce sont nos travaux de recherche en didactique des mathématiques qui nourrissent des propositions concernant la formation des professeurs et la production de ressources pour la classe.

1.2 Nos choix théoriques et méthodologiques

Le cadre théorique qui sous-tend notre réflexion est celui de l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2010, Poisard, Bueno-Ravel, et Gueudet 2011, Gueudet et Bueno-Ravel 2016). La notion de ressources pour le professeur y est centrale. Les professeurs combinent des ressources matérielles (boulier chinois matériel, fiches papier/crayon, etc.) et virtuelles (logiciels, applications, etc.) afin de répondre à leurs objectifs. Nos travaux précédents ont analysé des pratiques de professeurs des écoles (Poisard, Tournès et Cochet 2016, Bueno-Ravel et Harel 2016, Poisard, Gueudet et Robin 2016), nous proposons également ici des exemples pour la classe de 6ème. L'usage des nouvelles technologies permet en particulier pour le professeur de mettre en œuvre une démarche d'investigation et également de développer l'autonomie des élèves. Nous souhaitons ici montrer que les procédures (ou techniques) des élèves sont une ressource centrale pour le travail du professeur. C'est pour cela que nous articulons l'approche documentaire avec d'autres cadres théoriques, en particulier la notion de registre de représentation (Duval 1996) et l'analyse praxéologique (Chevallard 1999). Le nombre est codé selon différents registres en jeu ici : boulier matériel, boulier virtuel, écriture en chiffres, écriture en lettres, etc. Par l'analyse de plusieurs tâches soumises à des élèves de cycle 3 et suivant le registre en jeu, nous montrons que les techniques mobilisées par les élèves révèlent de savoirs différents (Poisard, 2005). Sur les aspects méthodologiques de cette recherche, l'idée importante est celle d'un travail collaboratif entre enseignants-chercheurs, formateurs et professeurs. Les échanges entre les membres du groupe sont primordiaux pour ce type de recherche : des réunions régulières permettent un travail de partage d'expérience, d'analyse de séances testées et de diffusion en formation. Les données recueillies sont celles habituellement utilisées en didactique : observations et vidéos des classes, entretiens avec professeurs et élèves, travaux d'élèves. Pour le traitement des données filmées ou enregistrées, leur transcription permet d'analyser des phénomènes.

1.3 Produire des ressources pour la classe et pour la formation

Ce travail de recherche de plusieurs années (Poisard et al 2015) a abouti à la production de ressources pour la classe, en particulier la mallette « boulier chinois à l'école » disponible en ligne[1], et un parcours de formation pour les professeurs disponible sur la plateforme nationale M@gistère (Poisard et al 2016). La mallette « boulier chinois » contient des fiches pour la classe, des vidéos, des trames de séquences, un entretien avec des professeurs, un livret pour le professeur, etc. Les trames et fiches produites ont été testées en classe, discutées et analysées lors des réunions et à nouveau testées en classe. Quels ont été nos choix ? D'un part, toutes les fiches sont téléchargeables et modifiables pour permettre aux professeurs de s'approprier les fiches, de les modifier selon leurs objectifs. D'autre part, les trames de séquences (ou scénarios) comportent des analyses de travaux d'élèves et/ou des extraits de transcriptions de séances de classe. Le parcours de formation M@gistère contient l'ensemble des ressources de la mallette et est complété par des extraits vidéos de classe. Nous avons également rédigé deux quiz pour structurer le parcours. En effet, notre choix a été de proposer un parcours en cinq étapes : les étapes 1, 3 et 5 sont en présence et les étapes 2 et 4 à distance. Pour les temps à distance, un forum est disponible et un quiz est proposé qui permet de

1 Mallette « boulier chinois à l'école » : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611

préparer la séance suivante. Argumentons nos choix également. Tout d'abord, ce type de formation ne peut pas se dérouler entièrement à distance, des temps en présence sont essentiels. En classe, les appropriations des professeurs montrent qu'une nouvelle ressource (utilisant les nouvelles technologies ou non) est intégrée parmi d'autres mais ne remplace pas l'existant. Il en est de même pour les formations, il nous semble essentielle de combiner des temps en présence et à distance, de ne pas aller vers le « tout numérique ». D'autre part, un des objectifs important de la formation est la production de trames de séquences incluant l'analyse de séances qui sont mutualisées entre les participants. Ceci rejoint donc la notion de travail collaboratif que nous développons nous-même pour nos travaux. Un travail d'analyse de l'appropriation de ce parcours par des formateurs est en cours. Ces choix concernant la production de ressources pour la classe et le parcours de formation sont donc étroitement imbriqués avec nos objectifs de recherche.

Afin d'analyser des exemples de mise en œuvre en classe et de travaux d'élèves, il nous faut présenter la ressource en jeu : le boulier chinois. Deux principes permettent de comprendre son mode de fonctionnement (Figure 1) :

- Chaque tige du boulier correspond à un rang de la numération. Pour l'exemple de 2 075, la tige des unités est à droite, puis en allant vers la gauche : dizaines, centaines, unités de mille, etc. Pour les nombres décimaux (par exemple 207,5), il suffit de décaler la tige unités vers la gauche pour avoir des rangs disponibles pour la partie décimale. Sur le boulier virtuel, la tige unités est en rouge ce qui permet de la repérer.

- Dans la partie supérieure, il y a deux boules par tige appelées *quinaires* qui valent chacune cinq (5, 50, 500, etc. selon le rang). Dans la partie inférieure, il y a cinq boules par tiges appelées *unaires* qui valent chacune un (1, 10, 100, etc. selon le rang).

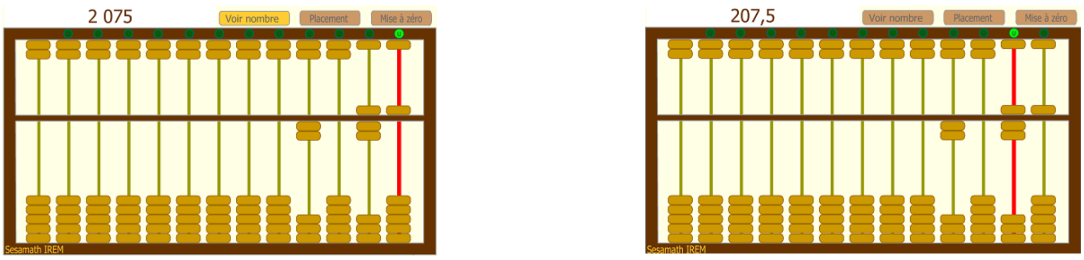


Figure 1 : Inscriptions de 2 075 et de 207,5 sur le boulier chinois virtuel[2]

Nous appelons la barre centrale la *barre de lecture* car les boules sont activées vers cette barre centrale, sur le boulier matériel, les boulent peuvent être claquées vers la barre de lecture en un seul geste pour inscrire les nombres plus grands que 5 sur une tige. Dans chaque rang, il est possible d'inscrire de 0 à 15, ce qui permet d'avoir plusieurs inscriptions possibles pour un même nombre. Nous appelons *inscription économique* l'inscription qui déplace le moins de boules possible. Nous allons maintenant présenter des exemples de mises en œuvre au cycle 3 par des professeurs.

2. Exemples de mises en œuvre dans des classes de cycle 3

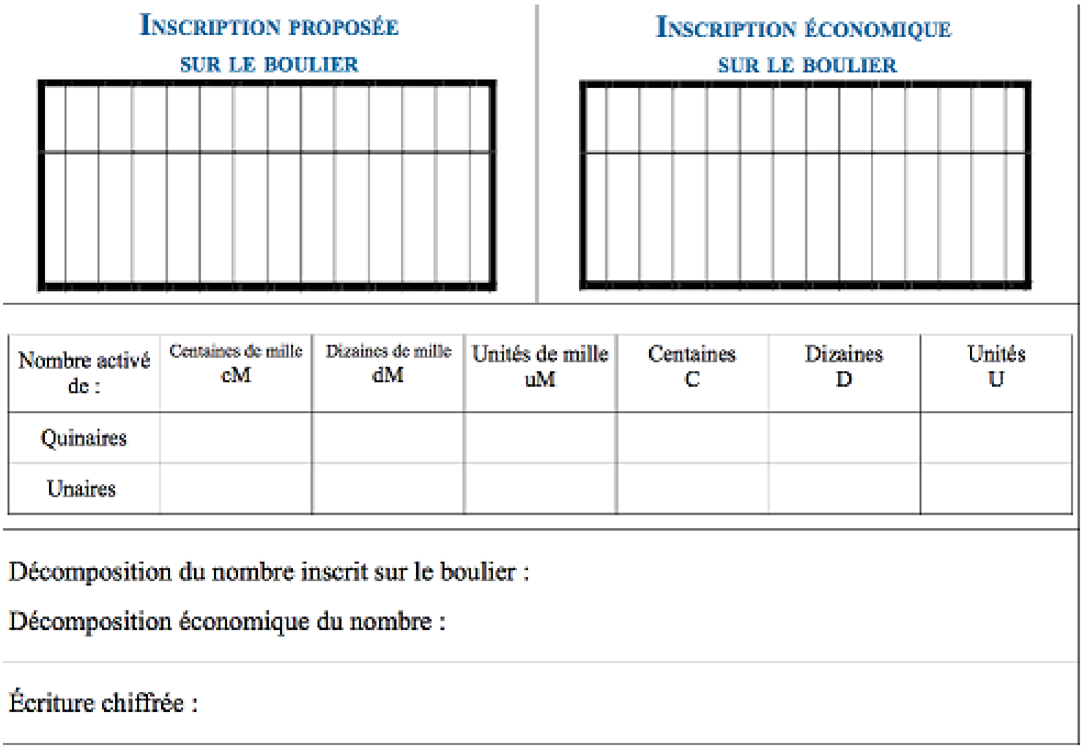
Nous présentons trois étude de cas : les appropriations de la mallette « boulier chinois » par trois professeurs. Pour chacune, nous présentons les objectifs des séquences, les ressources (utilisées ou créées) qui nous paraissent centrales ainsi que les principaux choix des professeurs. C'est en

2 Le boulier chinois virtuel est un logiciel de Sésamath : http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf téléchargeable sur le mallette « boulier chinois » (version locale).

particulier les entretiens menés et transcrits, les trames de séquences et les discussions lors des réunions qui permettent cette analyse. Les concepts de l'approche documentaire sous-jacents sont la notion d'orchestration des ressources par le professeur, la mise à la main des ressources (instrumentalisation) et la modification des connaissances du professeur (instrumentation).

2.1 Appropriation d'Élodie en CM2[3]

Pour Élodie, l'objectif des séances avec le boulier est de travailler sur la numération décimale (notions de chiffre et de nombre), sur les groupements et les échanges, sur le distinction entre valeur et quantité et sur la décomposition des nombres. Concernant les ressources, elle a combiné celles déjà existantes et a également produit une nouvelle fiche pour travailler sur l'inscription en lettres des chiffres et la décomposition des nombres (Figure 2).



INSCRIPTION PROPOSÉE SUR LE BOULIER

INSCRIPTION ÉCONOMIQUE SUR LE BOULIER

Nombre activé de :	Centaines de mille cM	Dizaines de mille dM	Unités de mille uM	Centaines C	Dizaines D	Unités U
Quinaires						
Unaires						

Décomposition du nombre inscrit sur le boulier :

Décomposition économique du nombre :

Écriture chiffrée :

Figure 2 : Extrait de la fiche créée par Élodie

Lors des séances, Élodie a choisi de travailler par investigation en posant des questions de recherche aux élèves, en proposant des temps de recherche puis des phases de validation où les élèves proposent des réponses. Les élèves débattent donc des différentes réponses, justes au fausses. Lors de cette séance, la classe n'est pas équipée de vidéo-projecteur et Élodie utilise un cadre de boulier en papier avec des aimant pour montrer les différentes propositions à la classe pour en débattre.Pour la première séance, Élodie a choisi un découpage en quatre phases (séance de 45 min) :

- Phase 1 : La découverte du boulier est proposée aux élèves à partir des questions. Qu'est-ce que cet objet ? À quoi sert-il ? Après plusieurs propositions des élèves dont un babyfoot (par rapport à la partie qui compte les points), il est convenu que cet objet est un boulier et qu'il est utilisé par des marchands pour calculer.

3 Voir également Poisard et al 2016.

- Phase 2 : La question à l'étude est ici : Comment fonctionne le boulier ? Après un temps de travail en groupes (20 minutes environ), les différentes propositions sont argumentées et débattues. Le professeur précise que l'on peut inscrire des grands nombres et écarte donc les propositions qui se limitent à 71 (13×7) et 676 (13×2+13×50).
- Phase 3 : Le professeur propose les inscriptions économiques des nombres 12 puis 7. À partir des ces deux exemples, le mode d'emploi du boulier est alors stabilisé.
- Phase 4 : La dernière phase consiste en une synthèse sur le mode de fonctionnement du boulier (pour les nombres entiers), en précisant le vocabulaire important : les noms et valeurs des boules (unaires/quinaires) et le lien entre tige et rang de la numération.

Dans les séances suivantes, la notion d'inscription économique est travaillée, en particulier les questions suivantes ont été proposées : Combien de manière existe-t-il sur le boulier chinois pour inscrire 10 ? Pour inscrire 100 ? Pour inscrire 10 sur le boulier, lorsque la tige des unités est à droite, il y a trois possibilités : deux possibilités sur la tiges des unités (2 quinaires ou (1quinaire et 5 unaires) activées) et une possibilité sur la tige des dizaines (1unaire activées). Pour 100, avec toujours les unités à droite, il y a sept possibilités (Figure 3).

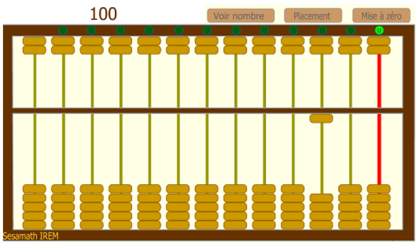
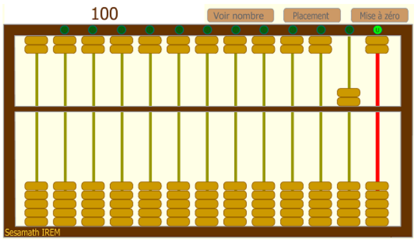
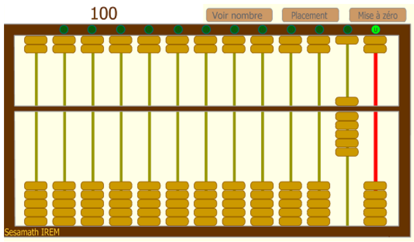
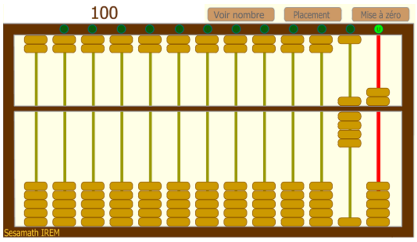
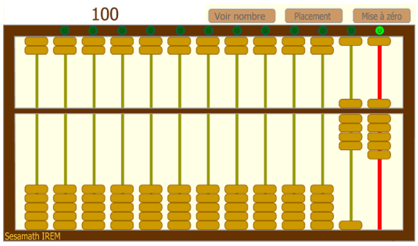
 1 unaire dans les centaines 100, inscription économique	 2 quinaires dans les dizaines 100=50+50	 1 quinaire et 5 unaires dans les dizaines 100=50+10+10+10+10+10
 (1 quinaire et 4 unaires) dans les centaines et 2 quinaires dans les unités 100= 50+10+10+10+10+5+5	 (1 quinaire et 4 unaires) dans les centaines et (1 quinaire et 5 unaires) dans les unités 100= 50+10+10+10+10+5+1+1+1+1+1	

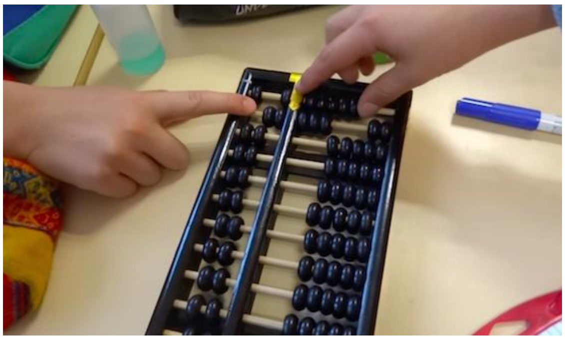
Figure 3 : Inscrire 100 sur le boulier

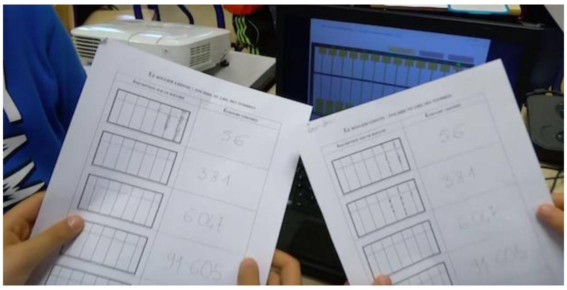
2.2 Appropriation de Rose en CM1[4]

Pour Rose, l'objectif de la séquence est de « mieux comprendre le système d'échanges en numération avec des grands nombres et des nombres décimaux ». Elle utilise les ressources à

4 Voir également Poisard, Gueudet, Robin, 2016.

disposition dans sa classe : le vidéo-projecteur (avec le boulier virtuel) relié à l'ordinateur du professeur, le visualiseur (avec le boulier matériel) et les 15 ordinateurs portables pour les élèves. Elle a également repris le modèle de cadre de boulier disponible dans la mallette. Il était prévu pour être imprimé en A3 et utilisé avec aimants au tableau. Rose a repris ce cadre plastifié en A4 pour chaque élève qui est utilisé comme une ardoise (avec des feutres). Ceci permet à Rose de mettre en place des séances boulier régulièrement, sur des temps courts, en articulant boulier virtuel, matériel et fiche plastifiée. Rose a également intégré l'usage du boulier dans sa progression : dans les fiches de « calcul rapide » utilisées quotidiennement, des lectures de nombres sur le boulier sont proposées (figure 4).





CALCULS RAPIDES
Pour chaque calcul, inscrire + lorsque la réponse est bonne et rapide.
inscrire - lorsque la réponse est fausse.

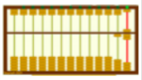
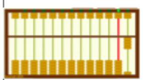
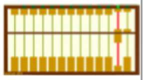
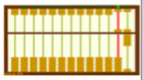
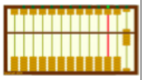
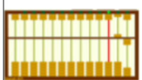
DATES⇨	**13/juin**	**14/juin**	**15/juin**	**16/juin**	**17/juin**	**Résultats**
Lecture des nombres						
	+	+	+	+	+	17
	-	+	+	+	+	0,4
	-	-	+	+	+	8,5
	-	-	+	+	+	5,9
	+	+	+	+	+	0,09
	-	-	-	+	+	0,52

Figure 4 : Articulation des ressources pour Rose

Concernant ses choix, Rose a travaillé par investigation, en donnant une place centrale à la verbalisation des procédures des élèves qui sont argumentées et débattues en classe. La possibilité de projeter les bouliers (vidéoprojecteur et visualiseur) est importante car elle permet de montrer à la classes les procédures et d'engager une discussion argumentée. La question de l'autonomie des élèves est en jeu avec l'utilisation du boulier j3p (figure 5) qui est un logiciel qui permet un retour sur la réponse, juste ou fausse, avec des explications sur l'erreur éventuelle. Rose choisit d'utiliser le boulier j3p pour développer l'autonomie de travail des élèves. De plus, l'articulation de ressources déjà utilisées par Rose et de la nouvelle ressource boulier permet à Rose de revoir la présentation de sa fiche « tableau de numération » déjà présente en classe. Chaque élève a une fiche plastifiée du tableau de numération, parmi les ressources pour travailler sur la numération (écritures mixtes, langages, etc.). Une question importante pour Rose est la place de la virgule dans ce tableau et suite à l'analyse d'erreurs d'élèves pour inscrire des nombres décimaux sur le boulier, Rose revoit ce tableau et propose que la virgule apparaisse sur la ligne de séparation entre la partie entière et la partie décimale (figure 5). En effet, la fonction de la virgule décimale[5] est de séparer la partie

5 D'ailleurs, les pays anglo-saxons utilisent eux le « point décimal » à la place de la virgule.

entière de la partie décimale c'est-à-dire d'indiquer que les unités sont immédiatement à gauche de la virgule. De plus, Rose choisit de ne plus indiquer la virgule sur toutes les lignes, mais de laisser à la charge de l'élève de placer celle-ci. En effet, les élèves ont parfois un raisonnement erroné et pensent que la virgule est un rang de la numération dans une colonne (ou sur une tige du boulier). Nous discutons en détails de ce point dans la partie suivante (partie 3).

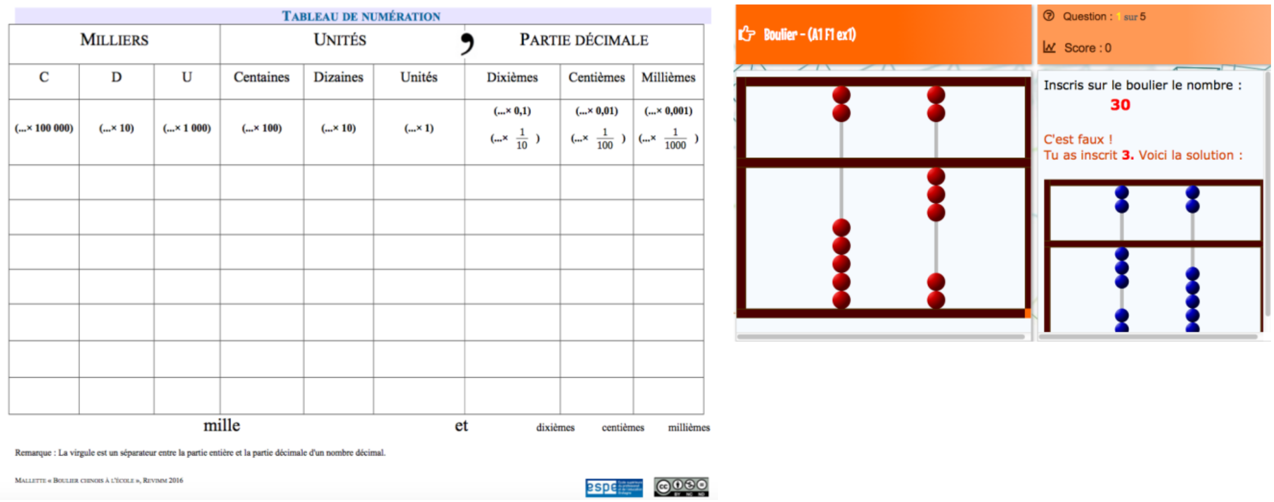


Figure 5 : Tableau des nombres et boulier j3p

2.3 Appropriation de Mathilde en 6ème

En classe de 6ème, le travail de Mathilde s'insère dans un travail collaboratif avec trois autres professeurs de mathématiques. Les professeurs ont choisi de travailler sur le boulier depuis deux ans, leur hypothèse est que si la numération décimale est mal installée chez les élèves, cela constitue un obstacle à l'apprentissage des techniques opératoires. Leur objectif est donc de travailler sur la numération avec le boulier pour remédier aux difficultés des élèves et également « remotiver les élèves par la manipulation ». L'aspect manipulation matérielle en mathématiques est une idée centrale pour le groupe pour motiver les élèves. Concernant les ressources mises au point dans le groupe, une fiche papier-crayon sur les nombres décimaux a été élaborée pour travailler sur les différentes possibilités d'inscrire un nombre sur le boulier et travailler sur les différentes écritures des décimaux également. Par exemple, lorsque la tige des unités est la 3ème tige en partant de la droite, combien d'inscriptions possible pour 1 ? En effet, $1 = \frac{10}{10} = \frac{9}{10} + \frac{10}{100} = etc.$. Le lien entre l'écriture « à virgule » et sous forme de fractions décimales (plus petites que 1) est revu en intégrant le boulier, par exemple la tâche « inscrire 1,25 sur le boulier » est complétée par l'écriture de $1{,}25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$. Dans un des collèges, des tablettes numériques peuvent être empruntées et le professeur choisit de fonctionner en groupe classe avec la moitié du groupe qui travaille sur des bouliers matériels et l'autre sur la tablette[6].

Comme ressource importante, Mathilde fabrique un jeu de cartes auto-correctives qui est réinvesti par les autres professeurs. Ces cartes proposent d'un côté une opération (addition ou soustraction) et de l'autre côté, le résultat à obtenir sur le boulier avec une copie d'écran de boulier. Ce choix a été fait par Mathilde afin que les élèves travaillent en autonomie et « chacun leur rythme », elle trouve également que l'intérêt des cartes est qu'elles les « libèrent du stylo » pour manipuler le boulier.

6 Le mot clé « abacus », boulier en anglais, permet de trouver des applications (gratuites) pour tablettes.

Comme nous le verrons plus loin, Mathilde trouve également intéressant les fiches papier-crayon. Des cartes auto-correctives pour travailler sur les grands nombres, et les fractions et décimaux ont également été fabriquées.

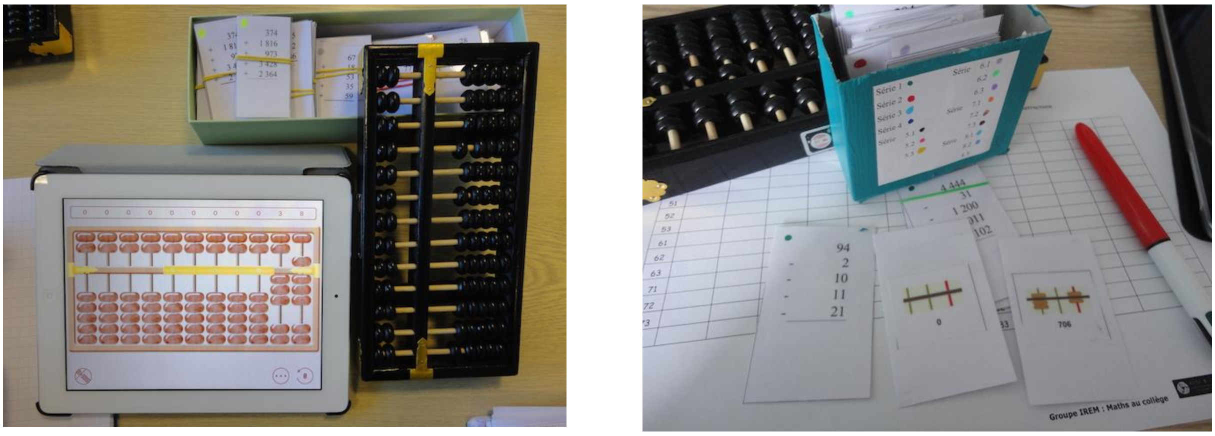


Figure 6 : Cartes autocorrectives « additions et soustractions »

Lors de sa deuxième année d'utilisation du boulier en classe, un des choix spécifiques de Mathilde est de proposer la fabrication du boulier : chaque élève construit un boulier en début d'année (en lien avec un projet d'accompagnement personnalisé AP, figure 7 et fiche[7]). Ce choix très fort est motivé par le souhait d'avoir le boulier en classe disponible lorsque nécessaire. En effet, lors de la première année, les élèves ont parfois demandé le boulier pour travailler certains aspects du nombre (multiples de 10) et il est important pour Mathilde de pouvoir y apporter une réponse favorable.

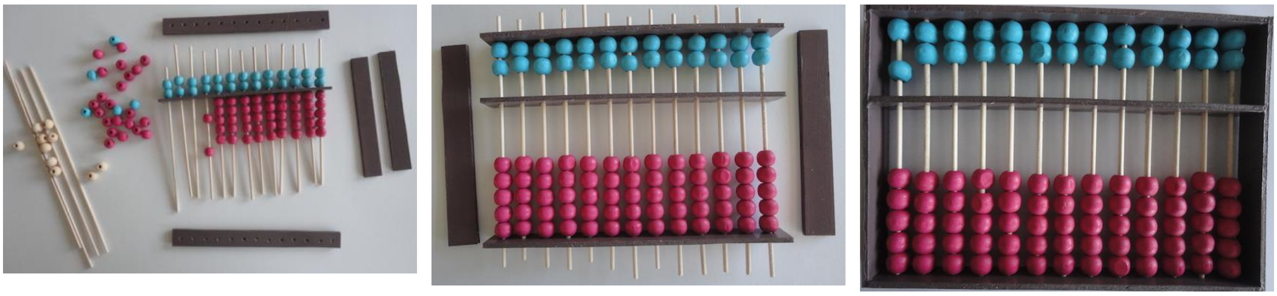


Figure 7 : Fabrication du boulier chinois

Nous avons donc détaillé plusieurs appropriations des ressources par des professeurs et décrit comment des nouvelles ressources se combinent aux ressources existantes en fonction des choix des professeurs. Certaines ressources sont également créées spécifiquement par les professeurs en fonction des objectifs d'apprentissages retenus. L'intégration de ressources utilisant les nouvelles technologies prend en compte les ressources existantes en combinant des ressources matérielles et virtuelles. Les ressources utilisant les nouvelles technologies ne remplacent pas d'autres ressources « traditionnelles ». De plus, l'appropriation de ressources permet un travail de réflexion en mathématiques et en didactique des mathématiques pour les professeurs.

3. Exemples de travaux et de procédures des élèves

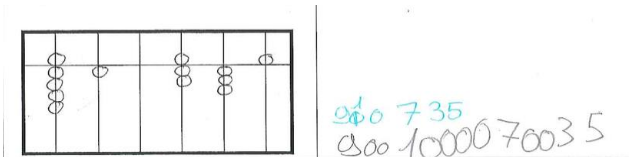
L'analyse des procédures et des erreurs des élèves se base sur des travaux d'élèves (des fiches papier/crayon), sur les observations en classe, sur les discussions lors des réunions et sur les

7 Voir Mallette « boulier chinois à l'école » : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611

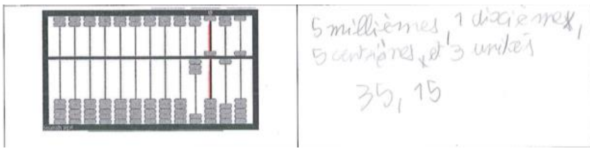
entretiens avec les professeurs. La notion de registre est utilisée concernant les nombres qui sont codés sur le boulier, en chiffres et en lettres. L'analyse de tâches soumises aux élèves montre plusieurs techniques (ou procédures) relatives à des savoirs (technologies) et différents selon le registre en jeu. Nous montrons que l'analyse des techniques est une ressource centrale pour le travail documentaire des professeurs.

3.1 Les grands nombres et les décimaux au CM1 (Rose)

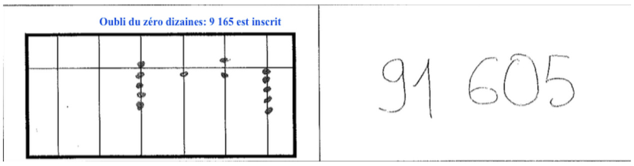
L'analyse de travaux d'élèves sur les grands nombres en CM1 a été décrit dans Poisard et al 2016. Nous l'augmentons ici d'exemples de travaux d'élèves sur les nombres décimaux (figure 8) et sur la question de recherche : « On considère que la tige de droite forme les unités, si toutes les boules sont activées : quel nombre est alors inscrit ? ».



Production d'Arnold pour écrire en chiffres un nombre inscrit sur le boulier



Réponse de Maïwenn



Production de Yann pour inscrire sur le boulier un nombre écrit en chiffres

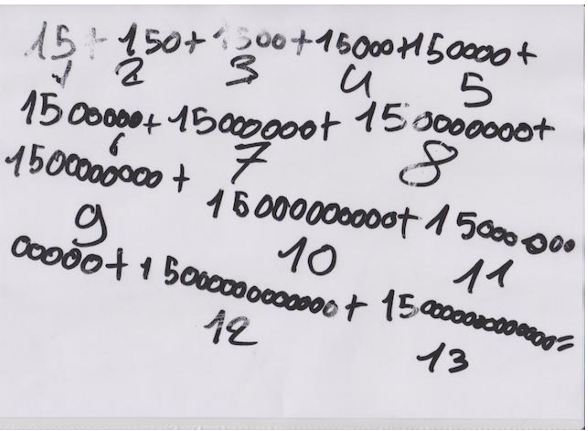
Réponse de Matthieu

Figure 8 : Exemples de travaux d'élèves de CM1

Nous pointons deux erreurs assez classiques de compréhension de la numération : le lien entre la signification orale et chiffrée des nombres et le problème de compréhension des zéros intercalés dans un nombre. Le boulier permet d'identifier ces erreurs (ou de les repérer à nouveau) et de faire un travail de remédiation. Les tâches demandées sont : « écrire en chiffres un nombre entier inscrit sur le boulier » (Arnold) et « inscrire sur le boulier un nombre écrit en chiffres » (Yann). Sur le boulier proposé à Arnold, le nombre inscrit est 910 735 c'est-à-dire en toutes lettres : « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq ». Arnold écrit ce qu'il entend en le lisant : 900 10 000 700 35. Pour Yann, le nombre à inscrire sur le boulier est 91 605, mais il inscrit 9 165 car il ne prend pas en compte l'inscription du zéro sur le boulier. Il ne laisse pas la tige des dizaines à zéro.

Afin d'évaluer les apprentissages des élèves, il est important de leur demander d'écrire en chiffres et en lettres les nombres afin de bien repérer les éventuelles difficultés. Nous analysons ici deux erreurs d'élèves pour un exercice qui propose un nombre décimal inscrit sur un boulier chinois. La consigne pour les élèves est : « écrire ces nombres en lettres (unités, dixièmes, centièmes) et en chiffres ». Le nombre inscrit sur le boulier est 35,15 soit 35 unités, 1 dixième et 5 centièmes (figure 8). Maïwenn donne une réponse juste pour l'écriture en chiffres mais ne donne pas la bonne signification des chiffres dans ce nombre. Il semble qu'il y ait une confusion entre le rang des unités et la position de la virgule. En effet, la virgule sert de séparateur entre la partie entière et la partie décimale et Maïwenn semble ne pas avoir acquis cela. De plus, elle mentionne les centièmes alors que seules deux tiges forment la partie décimale. Pour Matthieu, la réponse est juste pour l'écriture en chiffres et en lettres de la partie entière : 35 soit 3 dizaines et 5 unités. Par contre, il ne considère pas les deux rangs de la partie décimale et ajoute les deux inscriptions comme si elles étaient sur une seule tige (celle des dixièmes).

Lors d'une séance, certains élèves ont cherché à répondre à la question : « Quel est le plus grand nombre inscriptible sur le boulier ? ». Sur cet exemple, Noé (figure 9) lit le nombre maximum inscrit sur une tige 15 (selon le rang) et écrit le calcul à effectuer. Il repère le numéro de la tige : 1 pour les unités, 2 pour les dizaines (15 dizaines vaut 150) , etc. jusqu'à la 13ème tige. Il n'a pas ici posé l'opération pour donner le résultat, mais sa démarche est pertinente.



Production de Noé sur la recherche du plus grand nombre inscriptible sur le boulier chinois

Analyse de la question de recherche pour un boulier à 13 tiges :

$$\sum_{i=0}^{12} 15 \times 10^{i}$$

$=15 + 150 + 1\,500 + \ldots + 15 \times 10^{12}$

$= 15 \times (1 + 10 + 10^{2} + \ldots + 10^{12})$

$= 15 \times 1\,111\,111\,111\,111$

$= 16\,666\,666\,666\,665$

C'est un nombre à 14 chiffres avec 12 six qui se lit : « 16 mille milliards 666 milliards 666 millions 666 mille 665 ».

Figure 9 : Question de recherche, CM1

3.2 Les nombres décimaux en 6è (Mathilde)

Mathilde enseigne à trois classes de 6ème et elle a proposé une fiche « test » à ses élèves au mois de mars. Nous avons recueilli 57 fiches que nous analysons ici. Cette fiche[8] comporte huit questions :

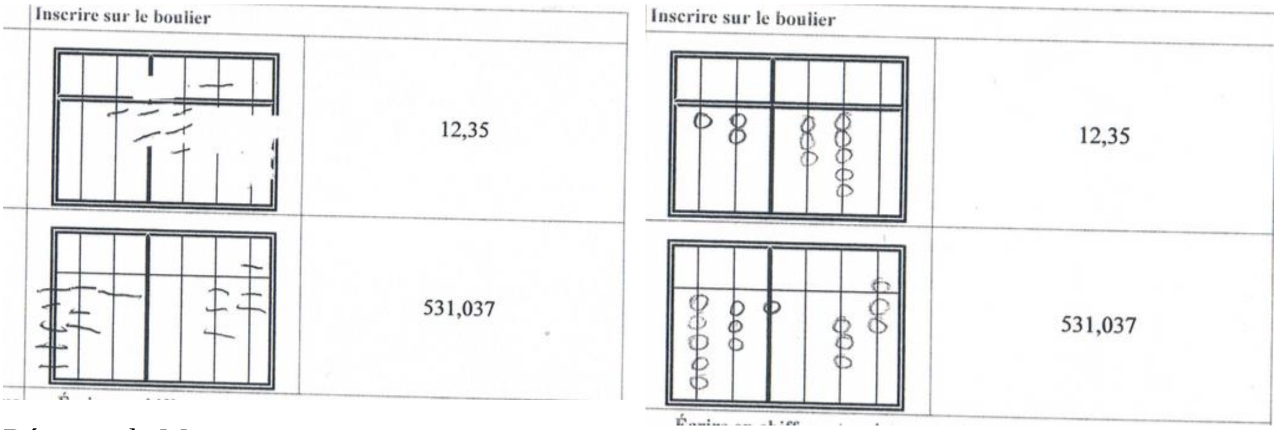
- quatre questions portent sur la tâche « inscrire des nombres sur le boulier (dessin) à partir des écritures chiffrées », les questions 1 et 2 proposent des grands nombres (91 605 et 231 880) et les questions 3 et 4 des nombres décimaux (12,35 et 531,037)
- quatre questions portent sur la tâche « écrire en chiffres et en lettres des nombres inscrits sur un boulier , les questions 5 et 6 portent sur des grands nombres (910 735 et 732 101) et les questions 7 et 8 portent sur des nombres décimaux (35,15 et 623,051).

Plusieurs registres sont en jeu : les bouliers (dessins ou copies d'écran), des nombres en chiffres et des nombres en lettres. Plusieurs variables didactiques sont à considérer : la nature des nombres (entiers ou décimaux), la taille des nombres (nombre de chiffres dans la partie entière et décimale), les zéros intercalés dans les nombre (ou non), le nombre de tiges proposées sur le boulier, le placement de la tige unité (ou non), etc. Nous avons choisi pour les questions 1 à 4 de proposer un boulier à six tiges et de fixer la tige des unités (en gras). Pour les questions 5 à 8, des copies d'écran du logiciel ont été faites, le boulier possède 13 tiges. Pour l'ensemble des questions, pour les

8 Voir Mallette « boulier chinois à l'école » : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611

nombres entiers les unités sont à droite et pour les nombres décimaux la tige unité est la quatrième en partant de la droite.

Concernant les questions 3 et 4, quelques erreurs sont à constater par rapport à la virgule pour laquelle une tige est laissée vide (figure 10). Pour Morgan par exemple, 531,037 est inscrit sur 7 tiges en utilisant le cadre gauche du boulier pour inscrire les 5 centaines, la tige des unités n'est donc pas repérée comme un séparateur entre la partie entière et la partie décimale. Pour inscrire 12,35, Morgan propose une réponse juste, mais on constate que certaines tiges sont effacées et donc qu'une rectification a été faite. Pour Sasha, une erreur apparaît pour inscrire 12,35 qui est faite sur cinq tiges avec une tige laissée vide qui semble indiquer la virgule. L'inscription de 521,037 est elle juste, mais on peut s'interroger sur la signification pour cette élève d'une tige vide : est-ce que cela correspond à zéro dixième ou bien à la virgule (ce qui serait alors une erreur) ?



Réponse de Morgan

Réponse de Sasha

Figure 10 : Travaux d'élèves de 6ème, questions 3 et 4

Concernant les questions portant sur l'écriture en lettres des nombres, un seul élève utilise une écriture mixte « 35 unités 1 dixième et 5 centièmes », alors que les autres élèves qui fournissent une bonne réponse écrivent tous les nombres en lettres. Cet élève propose d'ailleurs des réponses justes à toutes les questions. Plusieurs élèves proposent des réponses du type « trente-cinq unités et quinze centièmes » que nous validons comme réponse juste. Pour les questions 7 et 8, nous comptabilisons 17 erreurs sur les 67 travaux. Pour 10 des 17 élèves qui n'ont pas fourni de bonne réponse, l'erreur est dans le vocabulaire utilisé qui n'est pas celui attendu c'est à-dire qu'il n'utilisent pas les mots dixième et/ou centième et/ou millième. Pour 9 de ces 10 élèves, « trente-cinq virgule quinze » est proposé et un élève fournit la réponse « trente-cinq et quinze ». Ces réponses qui sont d'un usage courant sont considérées ici comme fausses car l'objectif est de travailler le vocabulaire associé aux nombres décimaux afin de travailler sur le sens de ces nombres. On constate donc 7 autres erreurs pour les questions 7 et 8, nous notons en particulier les réponses de Pierre (figure 11) qui comportent une erreur assez fréquente (en début de cycle 3) : la confusion des mots dizaines/dixièmes et centaines/centièmes.

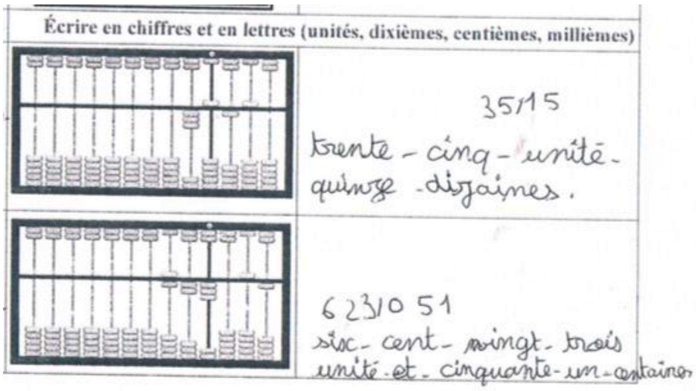


Figure 11 : Exemple d'erreur 6ème, questions 7 et 8 (Pierre)

Nous analysons ici les réponses d'une élève : Halima à l'ensemble des questions (figure 12). Pour les questions 5 à 8, le mot « unités » est systématiquement écrit pour terminer l'écriture en lettres des nombres. Pour les nombres entiers, ceci n'est pas d'usage, on dit « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq » plutôt que ce que propose Halima : « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq unités ». Les réponses aux questions 5 et 6 ne sont pas fausses, mais l'usage n'est pas de préciser les unités, ceci peut révéler un problème de compréhension pour cette élève. Par contre, pour les questions 7 et 8, l'écriture en lettres des nombres décimaux révèle un problème de compréhension de la numération : les dixièmes et les unités sont inversés pour 35,15 dont la réponse est « trente-cinq dixièmes et quinze unités ». Il semble donc que cette élève utilise un théorème en actes (Vergnaud 1990) : « les unités sont à droite » pour écrire les nombres entiers et décimaux en lettres. Ce théorème est utilisé par Halima pour répondre aux questions proposées, il donne des réponses justes pour les nombres entiers (même si la mention « unités » n'est pas d'usage au cycle 3), et des réponses fausses pour les nombres décimaux. Si on met en regard à cette analyse les réponses aux questions 1 à 4, on constate que cette élève a dessiné toutes les boules du boulier, même celles qui ne sont pas activées. Nous pouvons faire l'hypothèse d'un lien entre la nécessité de dessiner l'ensemble des boules et la non compréhension de certains aspects de la numération (pour les entiers et les décimaux) pour les élèves.

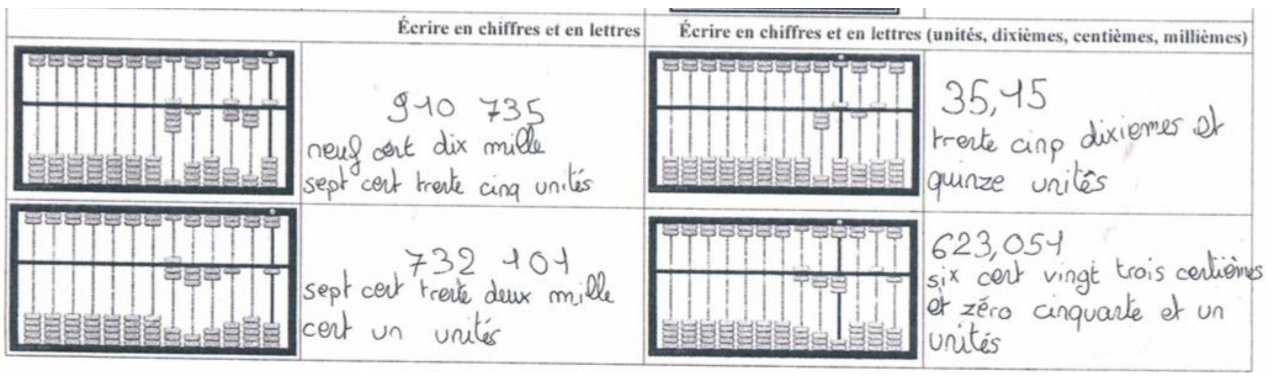
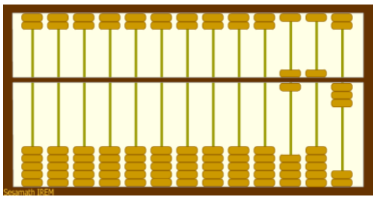
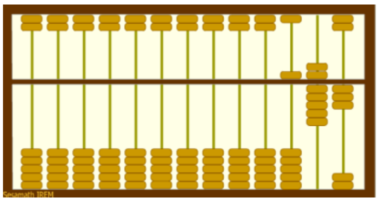
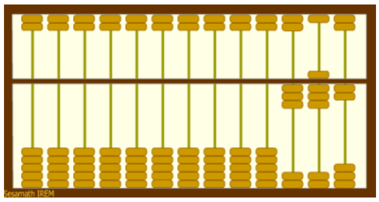


Figure 12 : Analyse des réponses de Halima, 6ème

Nous avons donc présenté des analyses de travaux d'élèves que nous considérons comme des ressources pour le professeur. Pour Élodie (CM2), le travail en classe de verbalisation qui est demandé aux élèves est central, il lui permet de mettre en place des séances de type investigation pour argumenter sur les procédures (justes ou fausses) qui sont verbalisées par les élèves. Pour Rose (CM1), c'est l'analyse de travaux d'élèves qui lui a permis d'identifier le problème de « non représentation » de la virgule sur le boulier et sur le tableau des nombres. Pour Mathilde (6ème), le travail de manipulation et les cartes auto-correctives sont importants dans les séances en classe, mais suite au test, elle pense que : « C'est un test très intéressant qui m'a permis de mettre en place une sérieuse remédiation sur la lecture des nombres. Les élèves ont trouvé cela facile ! Et ils se sont très peu servi du boulier. » C'est donc bien l'analyse de ce travail écrit qui a permis à Mathilde d'envisager de nouvelles séances en classe.

3.3 La soustraction et l'addition sur le boulier

Il est intéressant de comparer différentes techniques pour effectuer des opérations (Poisard 2009, figure 13). Ces techniques sont caractérisées par des savoirs spécifiques et peuvent dépendre du registre en jeu. Pour effectuer la soustraction (653–271) sur le boulier, c'est la technique « par emprunts » (ou technique « par cassage », ou technique « anglo-saxonne ») que l'on peut effectuer « à la main » en déplaçant des boules. On emprunte une centaine à 653 que l'on écrit comme 10 dizaines. Sur le boulier, on désactive une unaire des centaines et on active une quinaire et 5 unaires dans les dizaines. On peut maintenant enlever 271 et lire le résultat : 382.

Avec le boulier chinois :		
 6 5 3	 5 (15) 3	 3 8 2

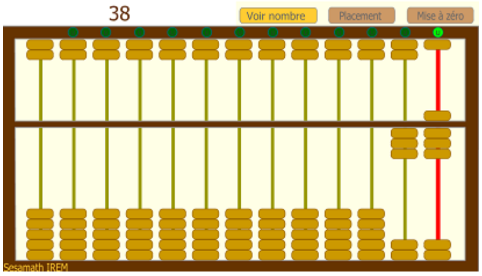
La méthode par ajouts parallèles :	La méthode par emprunts :
$\begin{array}{rccc} & 6 & {}_{1}5 & 3 \\ - & 2_{1} & 7 & 1 \\ \hline & 3 & 8 & 2 \end{array}$ 653 – 271 = (653+100) – (271+100) 100 s'écrit comme 10 dizaines (1ère ligne) puis une centaine (2ème ligne).	$\begin{array}{rccc} & 5 & & \\ & \cancel{6} & 15 & 3 \\ - & 2 & 7 & 1 \\ \hline & 3 & 8 & 2 \end{array}$ 653 – 271 = (653–100+100) – 271 On casse les 6 centaines (1ère ligne), il ne reste que 5 centaines et on ajoute 10 dizaines aux dizaines, ce qui donne 15 dizaines.

Figure 13 : Différentes techniques pour calculer (653-271)

La méthode par emprunts ne nécessite que des connaissances sur la numération de position. La méthode par ajouts parallèles, la plus répandue en France, est plus délicate à comprendre, elle nécessite de connaître la numération de position et aussi des propriétés opératoires. De plus, elle fait intervenir deux retenues que l'on écrit avec la même notation : 1, une retenue signifiant +10 et l'autre +1, ce qui est source de confusion.

Analysons maintenant l'addition (38+13). Cet exemple nous a été inspiré par une professeur des écoles qui a mis en place une séquence sur les nombres et les opérations avec le boulier en

CE1/CE2. Pour aider à la compréhension des trois techniques que nous analysons (figure 14), nous indiquons l'inscription de 38 sur le boulier.

<table>
<tr><td colspan="3">

Inscription économique de 38 sur le boulier chinois</td></tr>
<tr><td>Technique 1 :
38+13 = 38+2+11</td><td>Technique 2 :
38+13 = 38 + 3 +10</td><td>Technique 3 :
38+13 = 38 + 20 -7</td></tr>
<tr><td>On effectue :
38+2
● échange 1 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les unités
● échange 2 : 2 quinaires dans les unités contre 1 unaire dans les dizaines
● +11 (donc 40+11)
● échange 3 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines
● lire 51</td><td>On effectue
38 + (5 – 2) +10 :
● 38+5-2
● échange 1 : 2 quinaires dans les unités contre 1 unaire dans les dizaines
● +10 (1 dizaine) (donc 41+10)
● échange 2 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines
● lire 51</td><td>On effectue :
● 38 + 20 (2 dizaines)
● - 7 (donc 58 – 7)
● échange : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines
● lire 51</td></tr>
</table>

Figure 14 : Différentes techniques pour calculer (38+13)

La technique 1 comporte trois échanges : un échange entre colonnes (10 unités équivaut à 1 dizaine) et deux échanges dans une même tige entre 1 quinaire et 5 unaires (ou inversement). Le troisième échange permet d'obtenir une inscription économique dans les dizaines pour donner le résultat. Cette technique permet de travailler sur la notion d'échanges. La technique 2 fait appel à la décomposition 13 en 10+3 et aussi de 3 en 5-2. Cette technique prend en compte les caractéristiques du boulier car la quinaire des unités (non activée pour 38) est utilisée pour réaliser le calcul. Deux échanges sont nécessaires : un échange entre colonnes et un échange unaires/quinaire. La technique 3 est une technique de calcul mental réfléchi que l'on peut faire rapidement sur le boulier, 13 est considéré comme (20-7), étant donné que le nombre de départ est 38, l'ajout de 2 dizaines et le retrait de 7 unités est immédiat. Un seul échange unaires/quinaire est nécessaire pour que le résultat 51 soit donné sous forme d'inscription économique.

4. Conclusions

Pour débuter l'apprentissage sur le boulier, les deux principales tâches sont : la lecture des nombres et l'inscription des nombres (entiers puis décimaux). Le travail sur le calcul avec le boulier peut ensuite être introduit. Les différents registres de représentation proposés ici : le boulier, les écritures en chiffres des nombres, les écritures en lettres des nombres permettent de varier les représentations du nombre pour les élèves. Duval (1996) montre l'importance pour apprendre les mathématiques de prendre en compte une variété des registres de représentations sémiotiques et de coordonner ces registres. La possibilité de comprendre les nombres dans différents registres et de les convertir dans différents registres est donc centrale pour l'apprentissage des élèves.

Ce travail montre la nécessaire appropriation de ressources par les professeurs. Chaque professeur retient certaines nouvelles ressources en les combinant avec d'autres déjà en usage, en fonction de ses objectifs d'apprentissage et des contraintes sur les disponibilités des ressources. L'étude du travail d'appropriation de la ressource boulier pour Élodie, Rose et Mathilde permet de décrire et d'analyser ce travail du professeur. Nous montrons que l'articulation de ressources matérielles et virtuelles permet un travail en classe qui met en avant : l'investigation des séances, l'autonomie des élèves et la différenciation du travail pour les élèves. L'analyse des travaux et des procédures possibles d'élèves permet d'identifier le travail des élèves comme une ressource centrale du professeur. Le travail d'analyse des techniques prend en compte l'analyse des erreurs des élèves en particulier pour proposer un travail adapté au niveau de connaissances de chaque élève afin que le travail soit motivant et permette des progrès pour chacun. De plus, nous décrivons différentes techniques possibles pour répondre à des tâches de calcul. En effet, suivant le registre en jeu, plusieurs techniques de résolution sont disponibles pour les élèves. Un temps de travail en classe sur l'analyse des techniques nous semble primordial pour permettre à chaque élève de progresser dans ses apprentissages en mathématiques.

Remerciements aux professeurs et aux élèves qui ont participé à ce projet.

Références

Bueno-Ravel, L. & Harel, C. (2016). Le calcul mental à l'école : apports du boulier chinois. *Mathematice 51.*

Chevallard, Y. (1999). L'analyses des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2),* 221-266.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 16(3*), 349-382.

Gueudet G., & Trouche L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.57-74). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Gueudet, G., & Bueno-Ravel, L. (2016). Perspectives didactiques sur le boulier : un questionnement renouvelé. *Mathematice 51.*

Poisard, C. (2005). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois, *Petit x, 68,* 39-67.

Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration des ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Revue pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*. 31-2, 151-189.

Poisard, C., Gueudet, G., Bueno-Ravel, L. & Besnier, S. (2015, sept). Le plaisir de manipuler en mathématiques à l'école : ressources matérielles et virtuelles. *Les notes du CREAD, 1.*

Poisard, C. Gueudet, G., Robin, R. (2016). Ressources technologiques en mathématiques : les grands nombres au CM1. *Math-Ecole, 226, 18-22.*

Poisard, C., Riou-Azou, G., D'hondt, D., & Moumin, E. (2016). Le boulier chinois : une ressource pour la classe et pour la formation des professeurs. *Mathematice 51.*

Poisard, C., Tournès, D., & Cochet, I. (2016). De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1. *Mathematice 51.*

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot 27,* 22-25.

Vergnaud, G. (1990). La théorie et les champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques. 10/2.3.* 133-170.

Conf 03 : Grandeurs et géométrie

Matthieu Gaud,

Groupe Collège, IREM de Poitiers ; matthieugaud@gmail.com

Résumé : En nous appuyant sur des éléments d'histoire des mathématiques, nous montrerons le rôle que jouent les grandeurs angles, longueurs, aires *et* volumes *dans la construction de la géométrie élémentaire, mais aussi dans l'extension de la notion de nombre. Nous verrons que ce sont des questions liées à ces grandeurs qui ont favorisé cette construction et cette extension. D'autre part, la recherche de l'usage des connaissances de mathématiques élémentaires dans la vie actuelle et passée des hommes nous a fait prendre conscience qu'elles vivaient essentiellement à travers la manipulation de grandeurs. Nous proposons donc, un peu à l'instar de Clairaut avec ses Elémens de géométrie de 1741, un apprentissage de la géométrie à partir de l'étude des 4 grandeurs géométriques et de 4 types de tâches associés à chaque grandeur. C'est une démarche que nous expérimentons et pratiquons depuis une dizaine d'années au collège. Nous en donnerons une déclinaison au cycle 3 en en montrant les avantages.*

Mots clefs : Grandeurs ; Géométrie ; Euclide ; Clairaut ; cycle 3

Préliminaire

Si l'on regarde le type d'exercices techniques, comme multiplier un nombre par une fraction, qui figurent en abondance dans les manuels de cycle 3, et le temps qui y est consacré dans les apprentissages, on est loin des attendus de fin cycle du programme, et à la merci de la question usuelle des élèves : « *À quoi ça sert, m'sieur* ? … » Face à cette question, professeurs comme institution sont globalement désarmés. Voici quelques réponses des uns comme de l'autre :

- *C'est au programme. Et puis tu en auras besoin en cycle 4.*
- *Sans ça tu n'aurais pas de pacemakers, de portables, de fusée Ariane…*
- *Par pitié cher élève, ne me pose pas cette question…*
- « *Les mathématiques ne sont pas, de manière évidente, utiles au citoyen ; cela devra être démontré.* » (*Rapport Thélot*, 2004)
- « *Les exercices proposés dans les classes contribuent à l'image négative d'une discipline ressentie comme uniquement scolaire et éloignée de la vie.* » (*Rapport de l'I.G.E.N.*, 2007)

Notre proposition d'un enseignement à partir des grandeurs a pour ambition de relever les défis ci-dessus : ne pas couper notre enseignement de la société et de la culture selon les vœux d'Yves Chevallard (voir par exemple Chevallard, 2007). Pour cela nous sommes revenus aux sources du savoir en revisitant son histoire, et nous avons cherché où vivent les mathématiques élémentaires dans notre société. Il nous est apparu que c'est à travers l'étude des grandeurs que les notions élémentaires des mathématiques se sont construites, et que c'est à travers elles qu'elles vivent dans notre environnement. Voyons cela pour la géométrie.

La place des grandeurs dans la géométrie

> « La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur, hauteur ». (Legendre, 1817)

> *Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort.* (Lebesgue, 1935)

On ne peut pas faire de géométrie sans parler de grandeurs

Dès le départ, la géométrie pour définir ses objets, a besoin des notions de longueur, d'angle, d'aire, et de volume, même en maternelle, pour pouvoir parler du carré ou du cube. C'est ce que montre la lecture du début des *Élément*s d'Euclide, à commencer par les définitions (Euclide, 1990-2001).

La longueur, est utilisée dès le départ comme une notion connue (*Une* ***ligne*** *est une longueur sans largeur,* déf. I 2), l'aire est définie implicitement dans la définition de la surface (*Une* ***surface*** *est ce qui a seulement longueur et largeur,* déf. I 5), de même que le volume (*Est* ***solide*** *ce qui a longueur et largeur et profondeur,* déf. XI 1). Par contre l'angle est explicitement défini (*Un* ***angle plan*** *est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite,* déf. I 8). Puis ces grandeurs sont utilisées pour définir les figures, le cercle (*Un* ***cercle*** *est une figure plan, contenue par une ligne unique par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles,* déf. I 15), les différents types de triangles et de quadrilatères (déf. I 19 à 22), ou des relations entre objets. Une droite est dite perpendiculaire à une autre si elle forme avec celle-ci deux angles adjacents égaux (déf. I 10). Si Euclide définit les parallèles comme des droites qui ne se coupent pas (*Des droites* ***parallèles*** *sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre,* déf. I 23), d'autres auteurs d'éléments de géométrie, comme Clairaut, les définissent comme des droites équidistantes, adoptant un point de vue plus proche de la pratique, en lien avec leur construction. On retrouve les angles dans l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide (*Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits,* demande 5).

Quant aux neuf notions communes (ou axiomes), elles fixent les règles de la manipulation des nombres et des grandeurs sans les spécifier :

- *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
- *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
- *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*
- *Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.*
- *Et les doubles du même sont égaux entre eux.*
- *Et les moitiés du même sont égales entre elles.*
- *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*
- *Et le tout est plus grand que la partie.*
- *Et deux droites ne contiennent pas une aire.*

Ensuite toutes les propositions du corpus euclidien (théorèmes ou problèmes de construction) utilisent les grandeurs dans leurs formulations ou leurs démonstrations.

On ne peut pas parler de grandeurs sans faire de géométrie

Les grandeurs sont inextricablement liées aux figures géométriques. Au point que certains termes de la géométrie désignent tout à la fois l'objet et sa grandeur. Ainsi en est-il des mots côtés, hauteur, base, angle. Mais aussi, chez Euclide, du nom de la figure qui désigne également son aire quand il parle d'égalité de figures (voir prop. I 36). Est-ce gênant comme l'a pensé la réforme des mathématiques modernes ? En ce qui concerne les angles on pourra lire l'article cité en bibliographie (Guichard, 2015). Ce qui est sûr c'est que pour comparer des angles, on sera amené à parler de demi-droites, de superposition et des moyens de la réaliser (qu'il s'agisse de construire un gabarit, une fausse équerre, ou de faire une construction à la règle et au compas), d'intérieur et d'extérieur … mais aussi de symétries, de figures ayant des angles égaux (avec des résultats à établir, d'où une familiarisation avec le raisonnement) … On est donc d'emblée dans une construction et une appropriation des concepts, outils et méthodes de la géométrie. On pourrait multiplier les exemples.

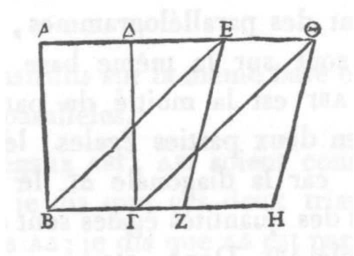


Figure 1 : Proposition I 36

Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux

Les problèmes concernant les grandeurs irriguent la géométrie

Citons-en un certain nombre.

Le problème de la comparaison et du calcul des aires planes et des volumes est au cœur des travaux des mathématiciens grecs de l'Antiquité sous différentes formes :

- Euclide dans le livre I de ses *Éléments* s'intéresse aux aires des figures polygonales avec pour point final de son étude la proposition 45 : on peut construire un parallélogramme d'angle donné dont l'aire est égale à celle d'une figure polygonale donnée ; et dans son livre XI, à l'aire du cercle, et au volume de la pyramide, du cône et de la sphère.

- Héron d'Alexandrie consacre ses *Métriques* à établir des algorithmes pour le calcul des aires et des volumes de figures.

- Archimède dans ses ouvrages célèbres *La mesure du cercle*, *La sphère et le cylindre*, *La quadrature de la parabole*, établit des formules qui sont restées célèbres.

Le problème de la quadrature des figures planes (*Construire un carré d'aire égale à celle d'une ou plusieurs figures données*) a traversé les siècles et les civilisations (Guichard, 2014). Les exemples les plus fameux en sont la quadrature du cercle, et celle de plusieurs carrés (dont un cas particulier est le « théorème de Pythagore »). Problème qui est toujours vivant car il dépend des conditions que l'on s'impose : construction à la règle et au compas, à l'aide de puzzles, de puzzles articulés, exacte ou approchée … L'équivalent dans l'espace, nous a légué aussi un problème célèbre : celui de la duplication du cube.

Le problème du partage des angles, fondamental pour la construction d'instruments de mesure, a lui aussi bien occupé les géomètres. En particulier la trisection de l'angle, célèbre problème qui a parcouru les mathématiques, est un de ces problèmes qui font les mathématiques comme le dit le titre d'un ouvrage de Jean Aymès (Aymès, 1988).

Le problème de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré (ou d'un pentagone régulier), est lié à la mesure des longueurs. Sa découverte, attribuée à Pythagore ou à son école, a amené les Grecs à élaborer une théorie des rapports de grandeurs (que l'on retrouve dans le livre V des *Éléments* d'Euclide) et l'étude des grandeurs irrationnelles (auxquelles est consacré son livre X). Contenus mathématiques qui ont traversé les siècles et dont on retrouve des traces dans le calcul sur les proportions et sur les racines carrées.

Le problème de la mesure de la circonférence du cercle, dont Archimède ne peut donner qu'un encadrement dans sa *Mesure du cercle* : « *La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion de son diamètre, qui est plus petite que le septième de son diamètre, et plus grande que les 10/71 de ce même diamètre* » (Archimède, 1807). Ce qui a donné 22/7 comme classique approximation du nombre π, bien des siècles plus tard.

Voici ce qu'en dit Héron d'Alexandrie dans ses *Métriques* (Héron, 2014) : « *D'autre part, le même Archimède démontre dans l'[écrit] sur les plinthides et les cylindres que le périmètre de tout cercle, relativement au diamètre, a un rapport, d'une part plus grand que celui qu'a 21 1875 relativement à 6 7441, d'autre part plus petit que celui qu'a 19 7888 relativement à 6 2351*[1]. *Mais puisque ces nombres ne s'appliquent pas bien aux mensurations, ils sont ramenés à des nombres minimaux, comme le 22 relativement aux 7 ; de sorte que, si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 14 unités, et qu'on veuille trouver le périmètre, il faut faire les 14 par les 22 et, de ceux-ci, prendre le septième et déclarer qu'autant que cela est le périmètre ; et il est de 44 unités.* »

La nature du nombre exprimant le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ne sera élucidée qu'au 19e siècle. C'est le problème de la mesure des longueurs, dans le cadre de la géométrie, qui a conduit aux différentes extensions de la notion de nombre, comme l'esquissent les exemples précédents.

D'autres problèmes encore, on pourrait citer aussi les problèmes concernant l'agrandissement et la réduction des figures, la mesure des grandeurs inaccessibles, le repérage, le calcul de la longueur des courbes, le problème des isopérimètres, des surfaces et volumes minimaux …

Donc l'étude des angles, longueurs, aires et volumes est au cœur de la construction du corpus géométrique, et de celle de la construction du nombre. On peut en prendre la mesure en consultant les sommaires de grands traités de géométrie.

Voici celui des *Leçons de géométrie élémentaires* de Hadamard, qui a été une référence de la première moitié du 20e siècle (Hadamard, 1922).

Livre premier : De la ligne droite (Chap. 1 Des angles, ...)
Livre II : Du cercle (... Chap. 2 Diamètres et cordes, ..., Chap. 4 Propriété de l'angle inscrit, ...)
Livre III : De la similitude
Livre IV : Des aires

[1] Ce qui montre l'intérêt des comparaisons de fractions, des encadrements de fractions par des fractions plus simples et des calculs de différences de fractions pour évaluer les écarts de précision.

Et celui des *Éléments de géométrie de Legendre*, qui a été une référence tout au long du 19e siècle (Legendre, 1817).

Livre I Généralités (Principes, angles, perpendiculaires, parallèles, triangles, quadrilatères)
Livre II Le cercle et la mesure des angles
Livre III Les proportions des figures (aires, proportionnalité, similitude)
Livre IV Les polygones réguliers et la mesure du cercle
Livre V Les plans et les angles solides
Livre VI La sphère
Livre VII Les trois corps ronds
Notes
Traité de trigonométrie

Des grandeurs sans mesure à la mesure des grandeurs

Dans Euclide les grandeurs sont omniprésentes, mais sans aucune mesure. On peut remarquer néanmoins qu'à ce stade interviennent nombres entiers et fractions, ainsi que rapports et proportions dans les problèmes de comparaison et de partage des grandeurs. Le problème de leur mesure est résolu de façon théorique au livre X qui commence par cette définition *: Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite*. C'est alors l'algorithme bien connu des soustractions successives (que nous appelons l'algorithme d'Euclide) qui va trancher (prop. 2 et 3). Par contre le problème de l'utilisation pratique d'une mesure (choix d'une unité, changement d'unité, nombres pour exprimer les mesures, calculs avec ces nombres) relève dans l'Antiquité d'un autre type d'ouvrage : traités d'arpentage, de calcul des aires et des volumes, d'astronomie...

Prenons un exemple dans les *Métriques* d'Héron d'Alexandrie (1er siècle), qui utilise le livre I des *Éléments* d'Euclide pour établir et justifier les algorithmes pour le calcul des aires des différentes figures polygonales. Ces algorithmes sont mis en œuvre sur des mesures de longueurs données.

Voici par exemple (Héron, 2014, et IREM de Poitiers, 2017, p 18) le calcul de l'aire d'un triangle équilatéral de 10 unités de côté :

> *Les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par eux-mêmes : il en résulte 10000 ; de ceux-ci, prends les 3/16 : il en résulte 1875 ; de ceux-ci, prends un côté ; et puisqu'ils n'ont pas un côté exprimable, qu'il soit pris de manière approchée avec une différence, comme nous l'avons appris ; et l'aire sera 43⅓.*

ou dans Columelle, un auteur latin de la même époque, dans un contexte plus pratique avec la gestion des unités :

> *Soit un champ triangulaire offrant sur chaque côté trois cents pieds ; multipliez ce nombre par lui-même, prenez le tiers de quatre-vingt-dix mille, produit de cette multiplication, c'est-à-dire trente mille, puis le dixième qui est de neuf mille ; réunissez ces deux sommes, vous trouverez trente neuf mille, nombre de pieds carrés que contient ce triangle, et qui équivalent à un jugère un trient et un sicilique.*

Remarquons au passage comment l'algorithmique, nouvellement incluse dans les programmes, s'insère naturellement dans le calcul sur la mesure des grandeurs. On pourra trouver de nombreux exemples dans la brochure *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs* (IREM de Poitiers, 2017). Plus près de nous, après les efforts des mathématiciens du 19e siècle pour construire les nombres réels à partir des entiers en se débarrassant des grandeurs continues[2]. Lebesgue propose de les définir à partir de la mesure des longueurs et du système décimal. Voici le plan de son ouvrage *La mesure des grandeurs* avec les résumés qu'il en fait au paragraphe 54 (Lebesgue, 1975, page 79).

> ***Chapitre I : Comparaison des collections ; Nombres entiers***
> *Les nombres entiers ne sont que des symboles matériels inventés pour servir de comptes rendus aux expériences physiques de dénombrement.*
> ***Chapitre II : Longueurs ; Nombres***
> *Les nombres quelconques ne sont eux aussi que des symboles destinés à servir de comptes rendus à des expériences physiques; schématisées géométriquement certes, mais de telle manière que l'on peut presque dire que l'opération n'a pas été schématisée, que ce sont seulement les objets sur lesquels elle porte qui l'ont été. Au lieu de placer un mètre en bois sur le mur à mesurer, nous avons porté un segment unité sur un segment à mesurer.*
> ***Chapitres III et IV : Aires et volumes***
> *Les aires et les volumes ne sont que les mêmes nombres, les mêmes symboles, mais utilisés comme comptes rendus d'autres opérations, les opérations de quadrature et de cubature.*

Et quelques pages plus loin (paragraphe 55, page 82), il résume l'esprit de sa démarche :

> *Pour être prêts à traduire des mesures physiques de plus en plus précises, le procédé auquel les hommes sont arrivés, celui qui emploie des nombres à une infinité de chiffres, paraît à la fois le plus naturel et le plus simple. Mais ceci a pour conséquence que ce qui nous intéresse dans une mesure géométrique, notre but, ce ne sont pas les nombres obtenus au premier ou au second stade de la mesure, c'est le nombre auquel nous ne parviendrons que par une opération de l'esprit.*

Ces nombres élaborés à partir de la mesure des grandeurs vont permettre d'aller toujours plus loin dans le calcul sur les grandeurs, et dans leur numérisation, comme nous le rappelle aujourd'hui le monde numérique dans lequel nous vivons, et qui en montre la puissance. C'est bien le problème de la mesure des grandeurs qui amène à concevoir des nombres nouveaux capables de rendre compte de la mesure du continu de façon simple et naturelle.

On peut partir des problèmes sur les grandeurs pour découvrir toute la géométrie

Une géométrie naturelle, qui ne rebute pas les débutants, tel est le projet de Clairaut lorsqu'il rédige ses Elémens de géométrie en 1741 (Clairaut, 1741). Son idée : construire toute la géométrie plane à partir du problème de la mesure des terrains, et la géométrie dans l'espace à partir de la mesure des solides. À partir de ces deux problématiques, Clairaut en rencontre d'autres que nous avons signalées précédemment, comme la mesure des grandeurs inaccessibles, ou la quadrature des figures.

Voici le plan de son ouvrage :

PREMIERE PARTIE (pages 1 à 72)
Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.
DEUXIEME PARTIE (pages 73 à 102)

[2] C'est le point de vue adopté par la réforme des mathématiques modernes à partir des années 1970, et dont on a pu mesurer les dégâts sur les apprentissages premiers : voir par exemple (Chambris, 2007).

De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.
TROISIEME PARTIE (pages 103 à 144)
De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.
QUATRIEME PARTIE (pages 145 à 215)
De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

Pari gagné, car son ouvrage a connu un grand nombre de réimpressions, rééditions et traductions dans de nombreuses langues s'étendant sur plus d'un siècle. Ce sera l'ouvrage recommandé par les programmes de 1852. Pour les plus petites classes (11 – 13 ans), les instructions indiquent : « *Le livre de Clairaut, qui devra être suivi, à peu d'exceptions près, pour tout ce qui concerne la géométrie, est d'ailleurs le commentaire le plus net et le plus précis qui puisse être fait de cette partie des programmes* » (voir Chavalarias, 2012). Peut-être que le statut de savant de son auteur, travaillant dans divers domaines non cloisonnés des sciences, comme en témoigne sa participation à l'expédition en Laponie pour déterminer l'aplatissement de la Terre, n'est pas étranger à la nature de ses Elémens de Géométrie, et à l'intérêt qu'y voit aujourd'hui Étienne Ghys (Ghys, 2013).

La place des grandeurs dans la vie des hommes

> *L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.* (Chevallard, Bosch, 2002)

Que les longueurs, angles, aires et volumes soient très présentes dans la vie des hommes, cela ne fait guère de doute. Arpentage, astronomie, urbanisme, architecture, déplacements, échanges de biens ou de marchandises, autant de domaines où pour des raisons pratiques ces grandeurs et leurs mesures ont vu le jour et ont été étudiées pour répondre à une foule de questions que se sont posées et se posent toujours les hommes, comme celles-ci :

- ***mesurer*** des longueurs, des angles, pour calculer des trajets, des longueurs inaccessibles, pour dresser des plans, pour s'orienter

- ***partager*** des longueurs ou des angles pour construire des instruments de mesure

- ***calculer*** des longueurs pour clôturer des propriétés, planter des haies, prévoir des coûts de matériaux vendus au mètre, pour construire des figures

- ***comparer ou partager*** des surfaces agricoles pour les échanger, les acheter, les vendre

- ***comparer ou évaluer*** des aires à partir de figures à l'échelle, à partir d'un plan, de photos aériennes (Google Earth, IGN, ..), à partir d'un schéma

- ***calculer*** une aire pour estimer une quantité de peinture, de semence, de tuiles, de carrelage, de papier pour un patron ou encore pour déterminer un prix (terrain à bâtir, crépi d'une maison…)

- ***calculer*** des volumes pour le transport de marchandises, pour fabriquer des solides de volume donné (emballages, cuves,…)

- …

Ce sont ces problèmes pratiques de comparaison, de partage, de mesure et de calcul des grandeurs qu'a pris en charge la géométrie, et plus largement les mathématiques, au point d'en donner la définition suivante : *Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs* (Bossut, 1784). On entrevoit que les solutions qui vont être apportées par les mathématiques vont vouloir être générales. Cependant, de nombreux obstacles vont apparaitre et obligeront les mathématiques à développer des méthodes adaptées à des classes de situations, et à inventer de nouveaux concepts et de nouveaux outils.

Prenons par exemple le cas de la mesure des aires. *Mesurer l'aire d'une figure, c'est choisir une figure comme unité, et trouver combien d'unités se trouvent dans la figure*. Problème plus ou moins simple selon le choix de l'unité et la forme et les dimensions de la figure à mesurer.

Choisissons un carré pour unité. On peut facilement mesurer l'aire d'un rectangle en le découpant en carrés unité, ou en le recouvrant de carrés unité : sa mesure est le nombre de carrés qui le composent. Si l'on choisit pour unité de longueur celle du côté du carré unité, alors cette mesure peut s'exprimer par la formule bien connue : Longueur × largeur. À condition que les côtés du rectangle mesurent un nombre entier de fois la longueur du côté du carré unité. Si ce n'est pas le cas, ce procédé permettra toutefois d'obtenir un encadrement de la mesure.

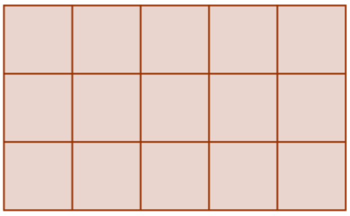


Figure 2 : Aire du rectangle = Longueur × Largeur

Mais en prenant un carré unité plus petit (par exemple de côté 10 fois plus petit), on aura un meilleur recouvrement, et toujours la même formule. La répétition de ce processus permet de trouver une mesure de l'aire aussi précise que l'on veut et de comprendre la validité de la formule donnant l'aire du rectangle quelles que soient ses dimensions.

La méthode du quadrillage va pouvoir s'utiliser pour toute sorte de figures, mais le dénombrement des carrés peut devenir difficile voire impraticable, en particulier avec des objets réels (aire d'un bois, d'un lac, d'un pays …). Pour ces derniers, on va par exemple en faire des plans qui justifient l'utilisation d'une échelle de réduction et la mise au point de techniques de reproductions de figures à partir de longueurs et d'angles mesurables, en utilisant une échelle de réduction. Pour des figures comme le cercle ou l'ellipse on peut découper des bandes rectangulaires et utiliser la formule de l'aire du rectangle.

Si avec des carrés il est facile de faire des rectangles, il va par contre être difficile de réaliser d'autres figures simples comme le triangle ou le losange. D'où l'idée, pour calculer l'aire d'une figure, de la découper en morceaux et avec ces morceaux de reconstituer un rectangle.

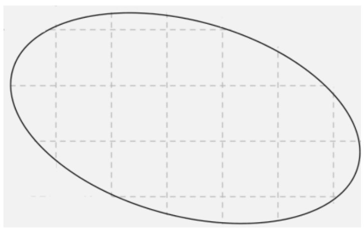


Figure 3 : **Quadrillage de l'ellipse avec des carrés unité**

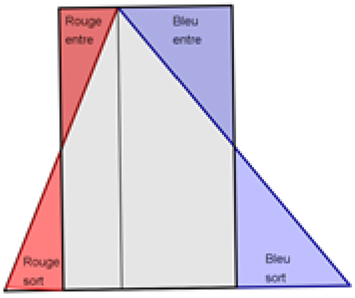


Figure 4 : Un découpage chinois du triangle

Cette méthode du découpage va permettre de ramener l'aire de toute figure polygonale à celle d'un rectangle, et d'établir pour des formes usuelles de figures polygonales des formules de calcul à partir de certaines longueurs de la figure (hauteur, base, apothème …).

Pour des figures courbes, rien de général, mais on peut utiliser la méthode du découpage en un nombre infini de fois. C'est ce qui a permis à Archimède de trouver une formule pour l'aire du cercle : A = ½ périmètre × diamètre.

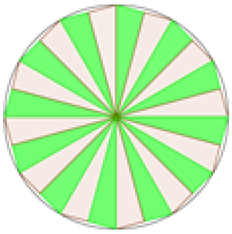


Figure 5 : Découpage du 12-gone inscrit dans le cercle

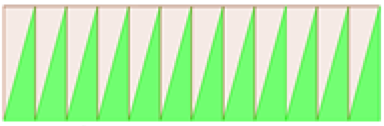


Figure 6 : Rectangle de même aire que le 12-gone

Cette formule est bien utile au forestier qui peut mesurer facilement la circonférence et le diamètre d'un arbre, et en déduire le cubage de l'arbre avec la mesure de sa hauteur. Cet exemple montre comment la recherche de formules de calcul d'aire de figures en fonction des grandeurs facilement accessibles à la mesure, se justifie dans des situations rencontrées dans la vie. C'est ainsi qu'Héron d'Alexandrie établit géométriquement sa célèbre formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de ses trois côtés. Les méthodes du quadrillage et du découpage sont des sources d'inspiration pour les méthodes de calcul numérique et d'intégration que nous utilisons maintenant et qui permettent d'élargir le champ des domaines dont on peut calculer l'aire.

Remarquons que les techniques, qu'elles reposent sur le découpage des surfaces, l'utilisation du quadrillage, l'utilisation de formules, loin de se substituer les unes aux autres, de se hiérarchiser les unes par rapport aux autres, se complètent, et s'enrichissent. Leur apprentissage de toutes ces techniques oblige à se familiariser avec les propriétés et la construction des différentes figures géométriques qui deviennent alors fonctionnelles : on voit à quoi elles servent et quels types de problèmes elles permettent de résoudre.

Ces quelques considérations montrent que ces questions de comparaison, de mesure, de calcul d'une grandeur restent largement ouvertes pour des études courant sur toute la scolarité. Que même si on crée des savoir-faire, ceux-ci reposent sur une classe bien précise de problèmes, laissant le champ libre à d'autres études.

Nos choix

Le bilan que nous tirons des analyses précédentes nous amène aux choix suivants.

Ne pas séparer l'apprentissage des grandeurs géométriques de celui de la géométrie

Même si le programme a choisi d'en faire deux parties séparées, il incite à établir des liens entre ces parties. On peut lire dans l'introduction de la partie 3 *Espace et géométrie* du programme de cycle 3 : *Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec deux thèmes : résoudre des problèmes de proportionnalité, utiliser en situation les grandeurs (géométriques) et leur mesure*. Et dans les repères de progressivité : *On peut noter que certaines compétences de construction sont menées conjointement avec les apprentissages du domaine « grandeurs et mesures »*.

Faire de la géométrie à partir de l'étude des grandeurs

On peut parcourir toute la géométrie du cycle 3 à partir de problèmes de comparaison, de partage, de mesure et de calcul des longueurs, angles, aires, et volumes. On en trouvera des réalisations effectives dans nos brochures : *Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs* (voir, à la fin de la bibliographie, la rubrique : *Mises en œuvre réalisées*). Ces problèmes sont en prise directe avec la vie des hommes et permettent de comprendre comment s'est construite la géométrie élémentaire, et en quoi c'est une science au service des hommes. On réconcilie ainsi l'enseignement des mathématiques avec la société.

Des conséquences découlent de ces choix.

- *Un apprentissage conjoint des trois parties du programme*. En effet, les problèmes liés au partage des grandeurs et à leur mesure débouchent sur la nécessité de l'utilisation de nombres entiers, fractions, décimaux, irrationnels … Ils permettent de travailler les contenus de la première partie du programme *Nombres et calculs* sur des situations porteuses de sens. Cela correspond bien à ce que l'on peut lire dans l'introduction de cette partie : *Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires, et repérer des points*.

- *Un apprentissage progressif*. Dans l'étude de chaque grandeur, on retrouve les mêmes types de tâche (comparer, partager, mesurer, calculer), et les mêmes objets mathématiques (figures géométriques, entiers, fractions, décimaux). Elles permettent un apprentissage progressif sur l'année et sur le cycle.

- ***Sur l'année*** : dans l'étude de chaque grandeur on retrouve des connaissances géométriques et numériques qui ont été vues dans les précédentes, mais qui sont réutilisées, réinvesties et approfondies dans un contexte différent.

- ***Sur le cycle*** : pour chaque grandeur on aborde, à chaque niveau, de nouveaux types de situations qui permettent d'approfondir les questions qui ont été étudiées au niveau précédent, ou d'en introduire de nouvelles.

- Un apprentissage ouvert sur le monde et sur les autres disciplines, non pas ponctuellement, mais en continu, car les grandeurs parlent du monde qui nous entoure. Les problématiques qui les portent et les situations dans lesquelles elles vivent en font partie.

- Un apprentissage de la mathématisation. La construction et l'étude des grandeurs imposent de partir du réel et d'y revenir. Les grandeurs sont ancrées dans notre vie, et ont été conçues pour essayer de maitriser et transformer le monde qui nous entoure.

Notre mise en œuvre au cycle 3 de l'apprentissage de la géométrie

C'est au travers l'étude des 4 grandeurs, longueurs, angles, aires, volumes, que nous réalisons l'apprentissage de la géométrie par les élèves. Ce sont nos 4 chapitres de géométrie. Pour chaque chapitre, et à chaque niveau, la rencontre et la familiarisation avec les notions et techniques de la géométrie se font par l'étude de situations. Elles permettent d'élaborer des techniques et stratégies pour répondre à une ou plusieurs des 4 questions : comment comparer, partager, mesurer, calculer la grandeur ?

On peut noter que *comparer*, *mesurer*, *calculer* font partie des compétences à développer pour ces grandeurs au cycle 3 (voir la partie 2 *Grandeurs et mesures* du programme) ; que *comparer*, *partager* permettent de construire la grandeur en tant que grandeur (sans mesure), et ce faisant de construire les connaissances et compétences géométriques du programme ; et que *mesurer*, *calculer* permettent de construire les compétences numériques et pré-algébriques (utilisation de formules) du programme.

Voici nos choix pour chaque année liés aux compétences et connaissances à faire acquérir à chaque niveau :

- pour les aires : comparer, partager, mesurer, calculer sont traités dans les classes de CM1, CM2 et 6^{e}, la progression étant dans un approfondissement progressif, en particulier pour le calcul avec une formule où l'aire du triangle et du cercle est réservé à la 6^{e}. La progressivité ne se joue pas au niveau des questions, mais des techniques (enrichissement de celles-ci), et des situations (figures en jeu, leurs constructions, les problèmes à résoudre ...).

- pour les volumes : comparer, partager, mesurer des contenances (CM1, CM2), mesurer, calculer (pour le pavé en 6^{e})

- pour les angles : comparer, partager, calculer (CM1, CM2), partager, mesurer, calculer (6^{e})

- pour les longueurs : comparer, partager, mesurer, calculer (cycle 2), calculer le périmètre avec ou sans formule en cycle 3 (carré rectangle : CM1, CM2, cercle : 6^{e}).

	Comparer	Partager	Mesurer	Calculer
Aires	CM1, CM2 et 6ème			
Volumes	CM1, CM2		CM1, CM2, 6ème	6ème
Angles	CM1, CM2		6ème	Cycle 4
Longueurs	Cycle 2		Cycle 3	Cycle 3

Un exemple : les aires (Voir Tarra Fabrice, 2010, et IREM de Poitiers, 2010)

Il faut donc de toute nécessité être en possession de la notion d'aire avant de calculer des aires. (Lebesgue, 1935)

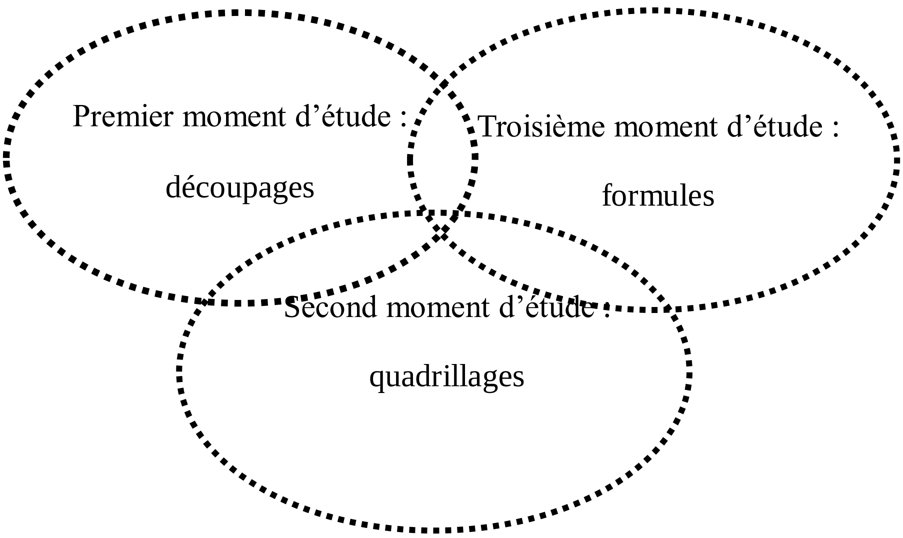


Figure 7

***Premier temps de l'étude : les découpages*.**

On met en lumière que, par des découpages ou des assemblages, on peut comparer des aires, résolvant ainsi toute une classe de problèmes et mettant au point la notion de grandeur. Nous mettons l'accent sur une figure particulière : le rectangle. Sa place est fondamentale, car on peut transformer ainsi tout polygone d'aire donnée en un rectangle de même aire (Voir *APMEP & Puzzles*, pôle 4, 2016).

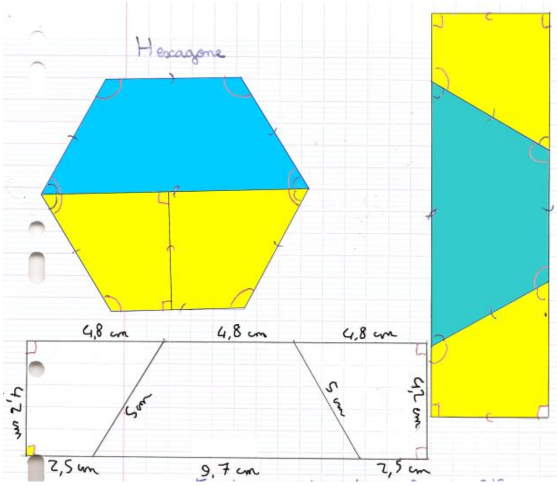


Figure 8 : Transformation de l'hexagone régulier en rectangle : 3 pièces

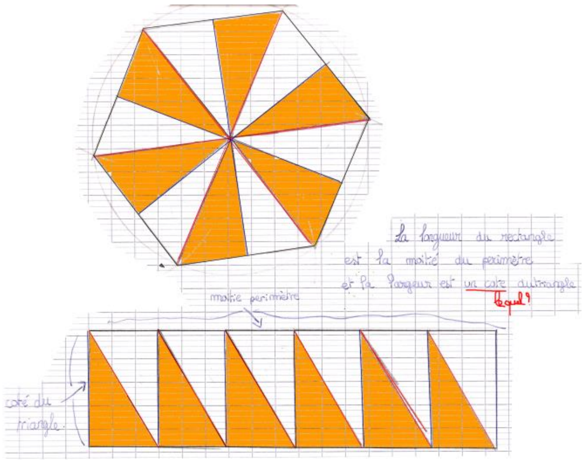


Figure 9 : Transformation de l'hexagone régulier en rectangle : 12 pièces

Deuxième temps de l'étude : les quadrillages.

C'est un outil de mesure des aires qui met en œuvre la définition de la mesure d'une aire (report d'une unité choisie et dénombrement). Il peut se transformer facilement en un instrument (quadrillage sur transparent) qui correspond à ce qu'est la règle graduée pour les longueurs. Son utilisation pose d'emblée le problème de l'utilisation de sous unités, et donc de l'utilisation de nombres décimaux illimités (dont l'écriture peut se poursuivre indéfiniment : les nombres de Lebesgue).

Il apparait que le maillage du plan par un réseau est un outil efficace pour résoudre une classe supplémentaire de problèmes. Il permet de valider la formule de l'aire d'un rectangle quels que soient les nombres qui mesurent ses côtés, et de calculer des encadrements de l'aire de figures aux contours très divers.

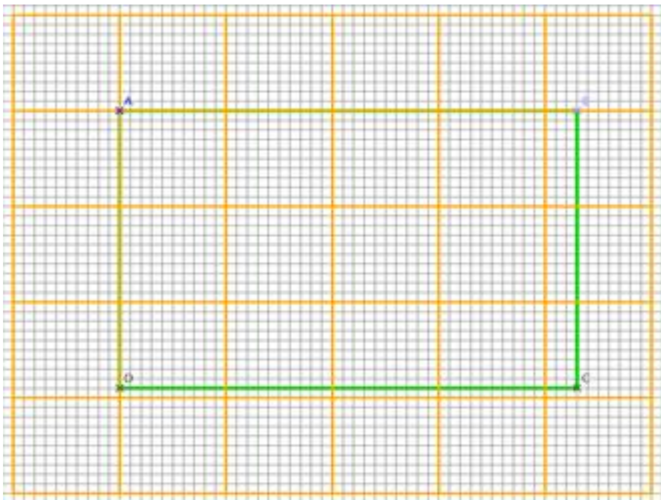


Figure 10 : Aire du rectangle

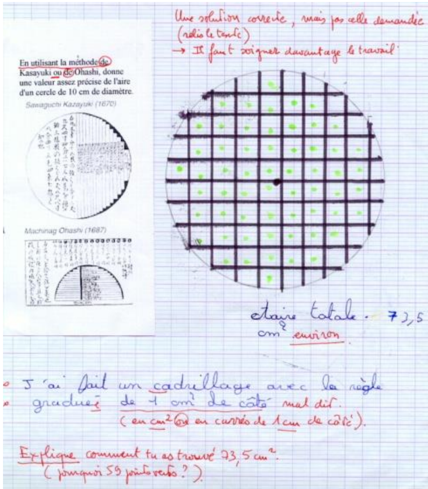
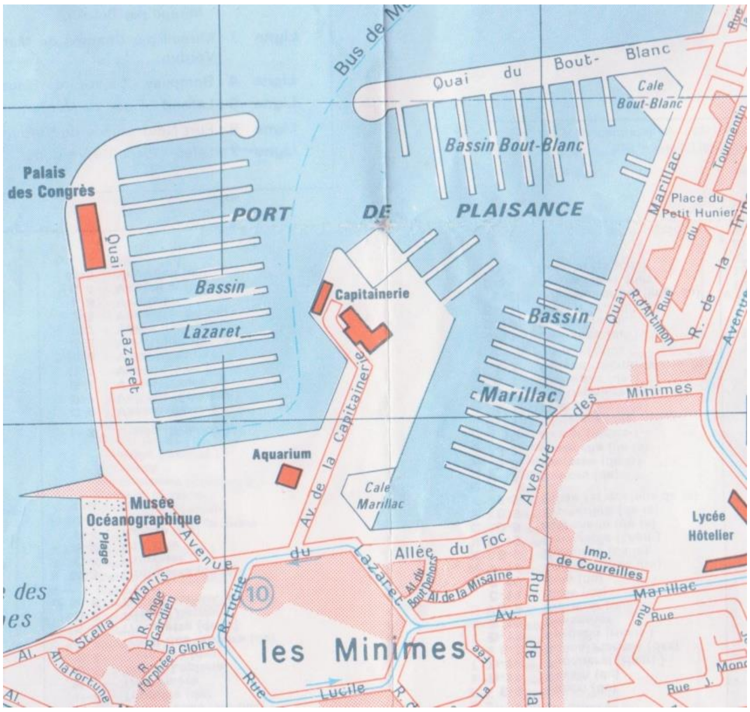


Figure 11 : Aire du cercle

Dernier temps de l'étude : les formules. On montre la richesse de l'utilisation de la formule précédente (aire du rectangle) pour résoudre toute une nouvelle classe de problèmes. Le découpage du premier temps de l'étude permet d'établir des formules ou des algorithmes de calcul pour des figures usuelles, mais aussi de découper la figure dont on cherche l'aire en figures simples dont on peut calculer l'aire comme pour calculer la superficie du port des Minimes de La Rochelle.

Superficie du port des Minimes à La Rochelle

> *« À partir du plan ci-dessous, trouve la superficie du port de plaisance en m² et en ha, en sachant que 1 cm sur la carte vaut 100 m dans la réalité. Explique ta méthode et ton résultat. »*



Les techniques nouvelles, loin de se substituer aux techniques précédentes, doivent apparaitre comme répondant à une classe supplémentaire de problèmes dont les exercices en feront une routine, quitte à ce que la technique s'améliore. Est-ce le découpage, l'assemblage, le décalquage qui me sera utile ? Est-ce l'utilisation du maillage, du réseau ? Est-ce l'utilisation de la formule ? Sont-ce les trois techniques en même temps ?

C'est au prix d'une telle construction du parcours que le savoir apparaîtra comme une connaissance disponible. La progression dans l'étude ne doit pas écarter les connaissances précédentes. Même si les moments d'études s'enchaînent chronologiquement, ils ne se hiérarchisent pas selon « l'importance » du savoir. Seule la classe de problèmes associés au type de tâche et la construction de la grandeur justifient le découpage. La chronologie du parcours répond donc à une autre exigence, celle de la nécessité d'une organisation mathématique utile à la construction des techniques, mais pas à leur performance relative.

Les aires : un parcours sur toute la scolarité

L'analyse précédente a amené à privilégier le rectangle. Pour les aires, c'est la rectangulation, pour les volumes c'est la cubature (où la parallépipédisation) ramenant tout volume à un pavé droit (ou à un prisme droit - à base triangulaire - qui en est « sa moitié »). De plus tout est démontrable, et pour que cela soit possible, il ne faut pas oublier d'étapes permettant d'établir les liens entre toutes les figures géométriques. Or actuellement, prévaut une idée de la non nécessité de démontrer qui se traduit, devant la contrainte –organisée- du manque de temps, par : on ne démontre plus rien. Cela se fait à partir des figures du programme à savoir les triangles et quadrilatères ayant des axes de symétrie, ces axes étant des indicateurs forts des découpages à opérer. Le triangle et la recherche de pièces articulées ont davantage leur place en 5^e avec la symétrie centrale et l'aire du triangle. L'axe fort sera alors la triangulation. On voit ainsi comment le parcours sur les aires peut se poursuivre au fil de la scolarité. Pour le calcul des aires en 6^e et la 5^e, il est important que les figures soient données mais pas leur dimensions : il s'agira donc, comme dans la vie pratique, de savoir quelles dimensions mesurer pour pouvoir faire les calculs. Si des dimensions sont données, comme sur un plan, il ne faudrait pas qu'il y ait uniquement les dimensions utiles pour faire le calcul. Comme on peut le voir dans les manuels, avec parfois une faute contre la raison en donnant les mesures des 3 côtés d'un triangle rectangle pour obliger l'élève à faire un choix ! En 4^e et 3^e le parcours sur les aires peut se poursuivre comme un lieu pour problématiser le calcul des longueurs et des angles (Pythagore, Thalès, trigonométrie). Pour les longueurs et les angles que l'on a pu mesurer en 6^e et 5^e, établir de nouvelles formules pour calculer des aires permet de gagner en précision, ce qui peut être indispensable par exemple en astronomie. On peut le faire pour l'aire d'un triangle (cf. arpentage), dont on a pu mesurer la longueur de 2 côtés et un angle, ou 1 côté et 2 angles, ou les 3 côtés. Cela amène rapidement à justifier des mathématiques plus sophistiquées. Par exemple pour trouver la formule de Héron pour le triangle, on mesure l'ampleur de toutes les connaissances qu'il faut maîtriser.

Concernant le problème du découpage des aires, on voit là aussi que ce problème, si simple dans son énonciation et pour certaines figures, peut devenir très complexe (c'est une des caractéristiques des mathématiques qu'il ne faudrait pas perdre de vue). Par exemple la quadrature du rectangle qui consiste trouver un carré et un rectangle de même aire est simple lorsqu'il s'agit de passer d'un carré au rectangle est facile alors que l'inverse est plus ardu mais peut être traité en 3^e. Le découpage articulé, comme pour la table géniale que nous présentons en début de parcours, est un problème de recherche pour les mathématiciens contemporains... (Voir *APMEP & Puzzles*, 2016).

La démarche de cycle 3 peut donc être poursuivie en cycle 4, avec les mêmes grandes questions, élargies et d'autres grandeurs pour faire aborder l'ensemble des notions des programmes.

Conclusion

Nous espérons avoir montré que géométrie, mesure des grandeurs, nombres et calculs entretiennent des liens naturels, qui permettent d'articuler l'enseignement des 3 parties du programme de cycle 3 autour de l'étude des grandeurs. Cela a en outre l'avantage d'assoir cet enseignement sur l'étude de situations de la vie des hommes d'hier et d'aujourd'hui, associant culture et modernité.

Références

APMEP, (2016) *Maths & Puzzles.* Brochure n°1009. APMEP : Paris.

ARCHIMÈDE, (1807). *La mesure du cercle.* Dans *Œuvres d'Archimède,* traduites par Peyrard, F. Buisson, Paris.

AYMES Jean, (1988). *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle).* Brochure n°70. APMEP : Paris.

CHAMBRIS Christine, (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, pp. 5-31. Metz : Topiques éditions.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, pp. 5-32, IREM : Grenoble.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, pp. 43-76, IREM : Grenoble.

CHEVALLARD Yves, (2007). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin APMEP* 471, 2007, pp. 439-461. APMEP : Paris.

CHEVALARIAS Nathalie, (2012). *Des figures semblables à la similitude dans l'enseignement secondaire français : 1845-1910. Des choix témoins des tensions entre pratique et théorie dans l'enseignement des mathématiques*. Mémoire de Master de recherche, Université de Nantes.

CLAIRAUT Alexis, (1741). *Élémens de Géométrie*. Lambert et Durand : Paris.

EUCLIDE, *Les Éléments*. (1990-2001). Traduction et commentaires Bernard Vitrac, Vol. 1, Introduction générale, Livres I à IV, 1990, Vol.2, Livres V à IX, 1994, Vol. 3, Live X, 1998, Vol. 4, Livres XI à XIII, 2001. PUF : Paris.

GHYS Étienne, (2013). *Les "éléments de géométrie" de Clairaut (1741) : une manière moderne d'enseigner la géométrie ?* Conférence pour le tricentenaire de Clairaut, mathématicien et géophysicien, Académie des sciences, 14 mai 2013 (http://www.academie-sciences.fr/fr/Colloques/tricentenaire-de-clairaut-mathematicien-et-geophysicien.html).

GUICHARD Jean-Paul, (2009). Les volumes en classe de sixième. *Repères IREM 76*, pp. 5-29, juillet 2009. Metz : Topiques éditions.

GUICHARD Jean-Paul, (2014). Quarrer des figures. *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, dir. Évelyne Barbin, p. 57-86. Ellipses : Paris.

GUICHARD Jean-Paul, (2015). L'angle, un concept ambivalent, et La mesure des angles. *Tangente* Hors Série n° 53, pp. 22-29, 98-101. Éditions Pole : Paris.

HADAMARD Jacques, (1922). *Leçons de géométrie élémentaires, tome 1 Géométrie plane*. 2e éd., Armand Colin : Paris.

HÉRON d'Alexandrie, (2014). *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur : Pise-Rome.

IREM de Poitiers, (2017). *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs*. IREM de Poitiers : Poitiers.

LEBESGUE Henri, (1935). La mesure des grandeurs. Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1, Genève. Réédition A. Blanchard 1975 : Paris.

LEGENDRE Adrien-Marie, (1817). *Eléments de géométrie*. Firmin Didot, 11e éd., Paris.

PRESSIAT André, (2009). La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. APMEP, *Bulletin APMEP* 483, 2009. APMEP : Paris.

ROUCHE Nicolas, (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères -IREM*, 15, pp. 25-36. Metz : Topiques éditions.

TARRA Fabrice, (2010). Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs, *Repères IREM*, 78, pp. 71-100. Janvier 2010. Metz : Topiques éditions.

Mises en œuvre réalisées

IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs :* les Angles (2009), les Aires (2010), les Volumes (2011), les Longueurs (2012).

Brochures disponibles à l'IREM de Poitiers (http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/)

Conf 04 : Les évaluations externes des élèves en mathématiques : apports, enjeux et perspectives*[1]

Jean-François Chesné

Directeur scientifique du Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco); jean-francois.chesne@education.gouv.fr

Résumé : Les évaluations nationales et internationales révèlent depuis une trentaine d'années une proportion préoccupante pour la France d'élèves en difficulté en fin d'école primaire ou *de collège. Les récents résultats de l'enquête internationale TIMSS menée en fin de CM1 en 2015 auprès des élèves de CM1 ont confirmé cette situation.*

Après une présentation générale de ces évaluations, de leurs objectifs et de leurs résultats, ce texte se centre plus spécifiquement sur le domaine des nombres et du calcul, en prenant appui sur les travaux du Conseil national d'évaluation du système éducatif (Cnesco) et sur des résultats de recherche en didactiques des mathématiques. À partir du dispositif PACEM (Chesné, 2014), il s'efforce de montrer en quoi des évaluations externes des acquis des élèves, en étant ciblées et adaptées à des projets locaux, peuvent constituer des outils de formation professionnelle des enseignants.

Mots clefs : évaluation, nombres et calcul, développement professionnel, Cnesco.

Introduction

Le débat sur le niveau des élèves en mathématiques se pose régulièrement en France et concerne désormais, à des degrés divers et pour des raisons différentes, un public très large : professionnels de l'enseignement et de la formation des enseignants, chercheurs, décideurs politiques, parents, … Les évaluations nationales et internationales alimentent de plus en plus ce débat, en révélant une proportion préoccupante d'élèves en difficulté en mathématiques, en fin d'école primaire et en fin de collège. Les récents résultats de l'enquête internationale TIMSS menée en fin de CM1 en 2015 auprès des élèves de CM1 ont confirmé cette situation. Après une présentation rapide du Conseil national d'évaluation du système éducatif (Cnesco), nous dresserons un panorama de ces évaluations, de leurs objectifs et de leurs résultats, puis nous centrerons notre intervention plus spécifiquement sur le domaine des nombres et du calcul, en prenant appui sur les travaux d'évaluation du Cnesco et sur des résultats de recherche en didactique des mathématiques. Nous nous efforcerons enfin, en nous appuyant notamment sur les résultats du dispositif PACEM[2] (Chesné, 2014), de proposer de nouvelles voies pour l'usage des évaluations externes, et en particulier, de montrer en quoi des évaluations externes des acquis des élèves, en étant ciblées et adaptées à des projets locaux peuvent constituer des outils de formation des enseignants.

Le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco)

Créé par la Loi de la refondation de l'école de 2013, le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) a été installé en janvier 2014 afin d'assurer une évaluation scientifique et

[1] Ce texte est celui d'une présentation de juin 2017, antérieur à une reprise d'évaluations exhaustives menées à la rentrée 2017 par le ministère de l'Education nationale auprès des élèves de CP et de sixième.
[2] Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques.

indépendante du système scolaire, complémentaire aux travaux d'évaluation internes au Ministère de l'éducation nationale. Il est composé majoritairement de chercheurs issus de plusieurs champs scientifiques, spécialistes de l'évaluation, mais aussi de parlementaires et de membres du Conseil économique, social et environnemental. L'article L. 241-12 de la loi du 8 juillet 2013et la lettre de mission qui le complète, définissent les trois principales missions du Cnesco :

- évaluer le fonctionnement du système scolaire et ses résultats ;
- diffuser les résultats des évaluations des élèves, des dispositifs et des politiques scolaires ;
- évaluer les méthodologies mises en œuvre par les évaluateurs internes au ministère de l'Éducation nationale et celles mises en œuvre par les organismes internationaux.

En trois années, en s'appuyant sur un réseau de plus de 200 chercheurs et experts internationaux et en associant largement la communauté éducative, le Cnesco a ainsi investigué un champ très large de thématiques cruciales pour l'école française, depuis les pratiques pédagogiques dans la classe et l'établissement (la lecture, les mathématiques, le redoublement, le traitement de la difficulté scolaire) jusqu'aux politiques scolaires (le handicap, l'enseignement professionnel, l'éducation à la citoyenneté, les inégalités sociales et migratoires, la mixité). Afin de diffuser efficacement les résultats de la recherche et d'enrichir le débat sur l'éducation, le Cnesco a développé six formats d'activités, avec la collaboration de plusieurs partenaires (l'Ifé/ENS de Lyon, le CIEP, Réseau Canopé, l'ESENESR, le réseau des Espé…) :

- **des conférences de consensus** : à partir de ressources d'évaluations scientifiques produites par le Cnesco, un jury d'acteurs de la communauté éducative est chargé d'auditionner des experts de disciplines variées pour produire des recommandations ;
- **des conférences de comparaisons internationales** : à partir de ressources d'évaluations scientifiques sur les politiques scolaires produites par le Cnesco, un public de décideurs français et internationaux sont réunis et échangent autour des politiques publiques afin de proposer des préconisations ;
- **des conférences virtuelles** : des échanges en direct et à distance sont ouverts entre des experts d'une thématique et des acteurs de terrain sur les évaluations du Cnesco ;
- **des rapports scientifiques** : des évaluations quantitatives et qualitatives pluridisciplinaires sont développées dans la durée, pour évaluer l'état de l'école ;
- **des notes d'actualité, et des forums en région**.

Le Cnesco met à disposition de tous des dossiers de ressources complets et multimédias (rapports scientifiques, dossiers de synthèse, préconisations, vidéos…) sur son site Internet : www.cnesco.fr.

De quoi parle-t-on quand on parle d'évaluations externes des acquis des élèves ?

Que sont les évaluations externes des acquis des élèves et quels rôles peuvent-elles jouer dans notre système éducatif ? La question mérite d'être posée. En effet, « aux côtés des évaluations internes des élèves – c'est-à-dire qui relèvent de la responsabilité exclusive de l'enseignant dans sa classe et son établissement – s'est développée depuis les années 1990, dans les pays de l'OCDE une panoplie d'évaluations externes – c'est-à-dire des évaluations qui relèvent d'acteurs extérieurs à l'établissement scolaire – par les administrations centrales des ministères de l'éducation, des agences indépendantes en charge de l'évaluation des élèves ou encore les collectivités territoriales, dans certains pays très décentralisés » (Cnesco, 2014). Hormis les examens certificatifs, comme le baccalauréat, ou les épreuves finales du diplôme national du brevet, les évaluations externes des acquis des élèves font le plus souvent référence à des évaluations qui ne sont pas d'ailleurs certificatives en France, les évaluations standardisées des acquis des élèves. La conception, l'administration et la correction des tests ainsi que la publication des résultats répondent à un cadre de référence normé (Mons & Pons, 2006). Elles se distinguent en cela d'autres évaluations externes, plus locales, qui peuvent s'en rapprocher, ou s'en inspirer, comme les évaluations pilotées par les académies ou les départements, ou encore les évaluations de l'APMEP[3].

Traditionnellement, on oppose deux finalités principales de ces évaluations standardisées : diagnostic et bilan. Plus précisément, Trosseille et Rocher (2015) leur assignent trois objectifs différents :

- « *fournir aux enseignants des outils afin d'enrichir leurs pratiques pédagogiques en évaluant mieux les acquis de leurs élèves ;*
- *disposer d'indicateurs permettant de mesurer, au niveau national, les performances de notre système (évolutions temporelles et comparaisons internationales) ;*
- *doter les « pilotes de proximité » (recteurs, DASEN, IEN) d'indicateurs leur permettant de mieux connaître les résultats des écoles et d'effectuer une vraie régulation*. »

Selon son objectif, une évaluation standardisée peut être exhaustive (elle concerne tous les élèves d'un même niveau scolaire) ou réalisée sur échantillon, ce qui a évidemment une influence sur son coût et son organisation.

Quoi qu'il en soit, les psychométriciens considèrent qu'une confusion des objectifs est dangereux méthodologiquement, et qu'il y a une distinction nécessaire à effectuer et à afficher (rapport IGEN, 2005, rapport du HCE, 2011). Il est couramment admis que cette confusion a existé, au début des années 2000 et entre 2009 et 2012, ce qui a conduit en grande partie à l'abandon actuel des évaluations de type 1 et de type 3.

Mais cette prudence statistique n'est pas la seule à souligner à propos des évaluations externes. Il faut également y associer une réserve des enseignants - qui peut aller de l'indifférence à une opposition forte – une réticence des formateurs (sur l'utilisation des évaluations standardisées et de leurs résultats en formation), et une certaine prudence des chercheurs sur la validité de ces évaluations et leurs résultats. Ces réserves, voire ces défiances, sont d'autant plus fortes que :

- le flou/la confusion sur les enjeux, les objectifs et les usages sont importants ;
- la transparence de la part des opérateurs sur les contenus des tests est faible ;
- la montée en puissance des évaluations de pilotage national fait peser une pression médiatique de plus en plus grande sur l'école ;
- des retours négatifs de l'étranger (dérives du concept de « *hard accountability* »; Mons, 2007) font craindre le pire aux établissements et aux enseignants ;
- le travail d'information et de formation des enseignants… et des formateurs est insuffisant.

[3] Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

Quelles évaluations nationales et internationales et que nous apprennent-elles ?

Toutes les évaluations nationales sont menées par le ministère de l'éducation nationale, et le plus souvent par la direction de l'évaluation, de la prospective et la performance (Depp). Elles concernent essentiellement la scolarité obligatoire, et sont de plusieurs natures. Elles peuvent être :

- diagnostiques, comme les évaluations menées de 1989 à 2008 à l'entrée en CE2 et l'entrée en sixième, puis les évaluations menées en CE1 et en CM2 par la direction générale de l'enseignement scolaire (Dgesco) entre 2009 et 2012 ;
- conçues pour fournir des indicateurs pour le Parlement dans le cadre de la LOLF (loi organique relative aux lois de finances) menées en CM2 et en troisième ;
- bilans, en fin d'école et en fin de collège comme celles du programme Cedre (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons) mené pour la première fois en 2008 pour les mathématiques, puis en 2014 ;
- à objectif de comparaisons temporelles comme l'étude menée en 2007 (permettant d'apprécier des variations sur plusieurs années d'intervalles de connaissances analogues (calcul posé et résolution de problèmes arithmétiques)
- destinées à identifier les jeunes en situation d'illettrisme (et en 2013 en situation d'innumérisme), comme les tests de la Journée défense et citoyenneté, adressés aux jeunes de 17 ans. et e, et

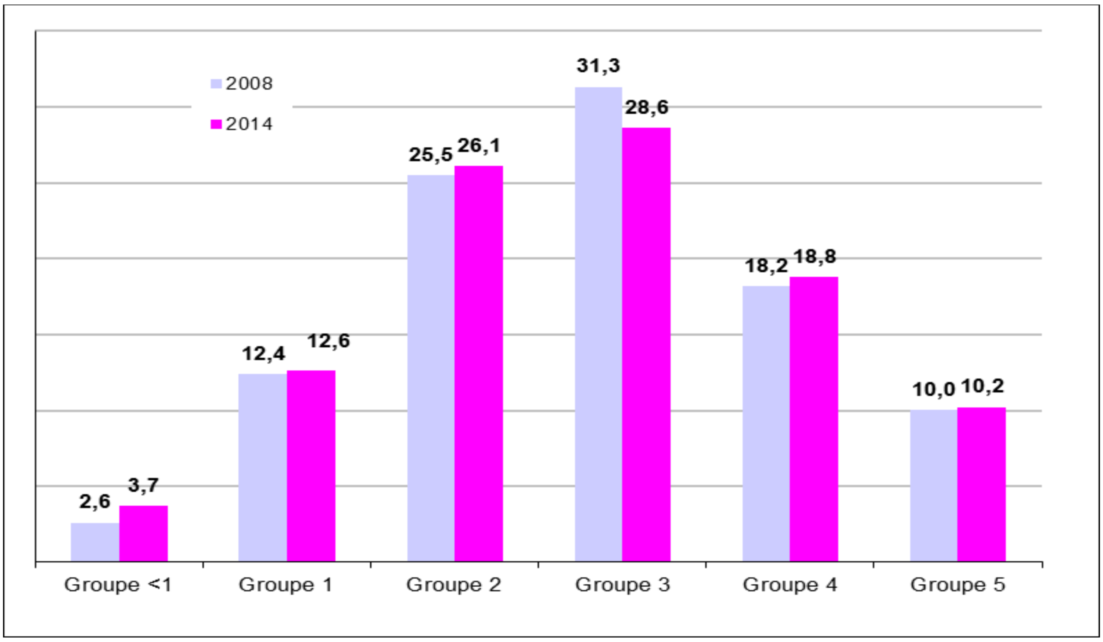
Au niveau international, le Programme international de suivi des acquis des élèves (PISA) mis en place pour la première fois en 2000 par l'OCDE s'est aujourd'hui imposé. Les enquêtes PISA concernent l'ensemble des élèves dont l'âge est compris entre 15 ans et trois mois et 16 ans et 2 mois, quels que soient le niveau scolaire et la filière qu'ils occupent dans le système éducatif. L'OCDE part de l'idée que le développement des économies des pays dépend largement de la qualité de leurs systèmes éducatifs et que le citoyen doit savoir mobilier ses connaissances scolaires pour résoudre les problèmes qu'ils sont susceptibles de rencontrer dans « la vie réelle ». PISA n'évalue donc pas strictement des champs disciplinaires, mais une littératie mathématique, scientifique et en compréhension de l'écrit (Cnesco, 2016).

Un autre programme d'enquêtes internationales, TIMSS (*Trends in international mathematics and science study*), est mené depuis 1995. Les enquêtes TIMSS concernent les élèves qui sont dans leur quatrième ou huitième année de scolarité (en France, élèves de CM1 et de quatrième). En 2015, la France a participé pour la première fois au programme TIMSS pour le CM1, aux côtés de 47 autres pays. La France a également participé en 2015 à TIMSS *Advanced* après avoir participé à la première édition en 1995, et après 20 ans de non-participation. Cette enquête a pour population cible les élèves qui sont en classes scientifiques de fin d'études secondaires, la terminale S en France. Les enquêtes TIMSS et TIMSS *Advanced* cherchent à mieux connaître les systèmes éducatifs en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques et des sciences et moins directement, à améliorer les politiques scolaires. Elles s'intéressent avant tout aux contenus d'enseignement présents dans les programmes scolaires, et aux acquis des élèves relativement à ces contenus.

Les principaux enseignements de l'ensemble de ces évaluations, convergents et désormais partagés au sein de l'institution, sont les suivants :

- Environ 40 % des élèves français n'ont pas le niveau attendu à la sortie de l'école primaire (Figure 1) ;
- Cette proportion a augmenté entre 2008 et 2014 en fin de collège (Figure 2) ;
- Le nombre d'élèves français « de bas niveau » (obtenant de scores peu élevés) augmente (Figures 2 et 3).

Figure1 : Répartition des élèves par niveaux de compétence aux évaluations Cedre fin d'école en 2008 et en 2014



Source : Depp-MENESR. Note d'information N°18, DEPP, Mai 2015

Les élèves des 3 groupes « de bas niveaux » (groupes inférieurs à 1, 1 et 2) ne maîtrisent pas complètement les nombres entiers, très peu les nombres décimaux, et n'ont une maîtrise assurée que de l'addition et de la soustraction des nombres entiers (avec ou sans retenue). La proportionnalité n'est pas acquise.

TIMSS 2015 (CM1) a confirmé ces résultats avec un résultat supplémentaire très inquiétant : la France obtient le score le plus faible en mathématiques des 26 pays de l'OCDE participant à l'enquête, juste devant le Chili. Plus précisément :

- La proportion d'élèves « de bas niveaux » est supérieure en France (42 %) à celle des pays européens participants (24 % en moyenne) ;
- La proportion « de niveau élevé » est inférieure en France (2 %) à celle des pays européens participants (9 %) ;

Les exemples ci-dessous, issus de TIMSS 2015 (CM1), illustrent les résultats des élèves français dans le domaine des nombres et du calcul[4] :
Exemple 1 :

[4] https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-database/index.html

Yassine commence à écrire une suite logique de nombres :

6, 13, 20, 27, …

Il ajoute à chaque fois le même nombre pour obtenir le nombre suivant.

Quel est le nombre suivant qu'il devrait écrire dans sa suite logique ?

Le taux de réponses correctes pour la France est 59 % alors qu'il s'élève à 70 % pour l'ensemble des pays participants à l'enquête. A cet exercice, comme à bien d'autres, de niveaux de difficulté divers, le score de la France est le plus bas des pays de l'OCDE (hors le Chili).

Exemple 2 :

Célia a 12 longueurs de fil, 40 perles rondes, et 48 perles plates.

Elle utilise 1 longueur de fil, 10 perles rondes, et 8 perles plates pour fabriquer 1 bracelet.

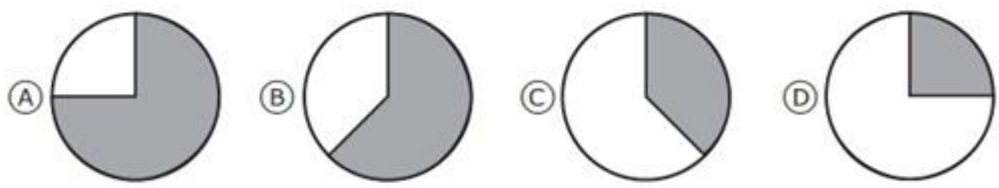
Si Célia fabrique des bracelets tous identiques, combien peut-elle en fabriquer ?

(A) 40
(B) 12
(C) 5
(D) 4

Le taux de réponses correctes pour la France est 28 % alors qu'il s'élève à 37 % pour l'ensemble des pays particpants à l'enquête.

Exemple 3 :

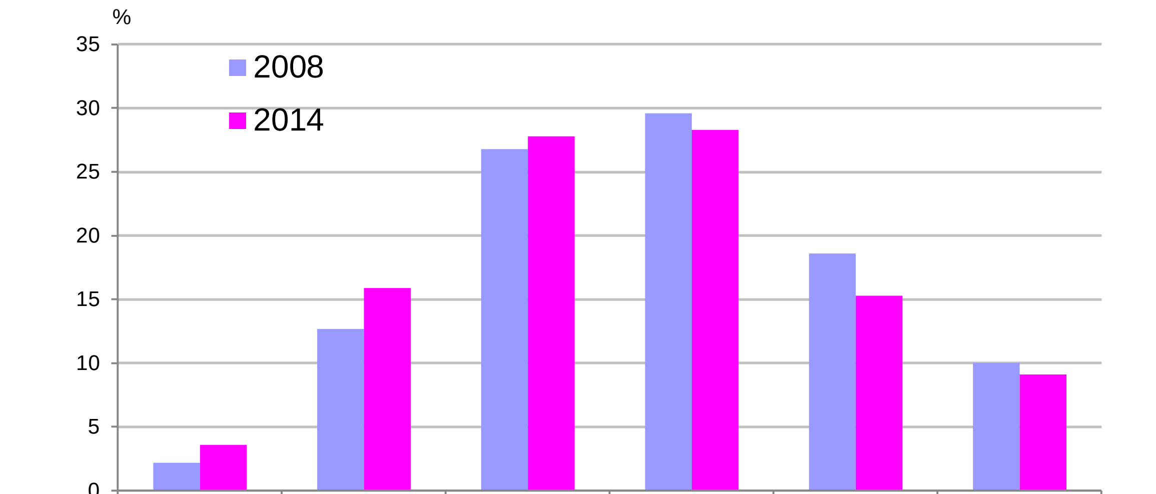
A. Lequel des cercles ci-dessous a les $\frac{3}{8}$ de sa surface grisés ?



Le taux de réponses correctes pour la France est 15 % alors qu'il s'élève à 24 % pour l'ensemble des pays particpants à l'enquête.

Au collège, les difficultés des élèves s'accroissent, comme le montre les résultats de l'évaluation Cedre en fin de troisième.

Figure 2 : Répartition des élèves par niveaux de compétence aux évaluations Cedre fin de collège en 2008 et en 2014

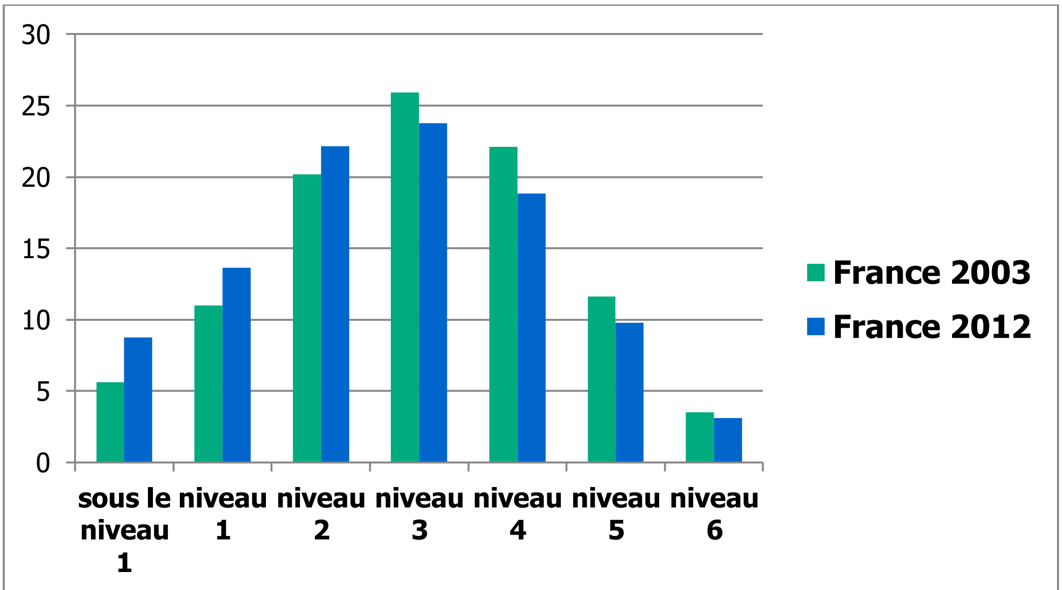


	Groupe <1	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5
2008	2,2	12,7	26,8	29,6	18,6	10
2014	3,6	15,9	27,8	28,3	15,3	9,1

Source : Depp-MENESR. Note d'information N°19, DEPP, Mai 2015

L'augmentation de la proportion des élèves des groupes 1 et inférieurs à 1 est nette, alors que celle des groupes 4 et 5 diminue, ce qui traduit une nette détérioration du niveau des élèves entre 2008 et 2014. Les élèves des groupes 1 et 2 maîtrisent les opérations sur les nombres entiers, relatifs compris, et savent résoudre des situations de proportionnalité dans des cas simples. Mais l'utilisation du calcul littéral est une difficulté pour eux, tout comme celle des nombres rationnels. Là aussi, cette évolution se retrouve dans les résultats des évaluations internationales

Figure 3 : Répartition des élèves par niveaux de compétence aux évaluations PISA en 2003 et en 2012



Source : Depp-MENESR. Note d'information 13.31

De plus, et c'est un résultat bien identifié désormais mais néanmoins très inquiétant, il existe en France une forte corrélation entre l'environnement socio-économique des élèves et leur réussite scolaire. Ainsi, selon Cedre école 2014, les scores des écoles socialement défavorisées baissent, et notamment dans les écoles en éducation prioritaire, le nombre d'élèves en grande difficulté augmente. Cette corrélation devient de plus en plus marquée, ce qui se traduit dans PISA par une détérioration de l'équité entre 2003 et 2012, telle qu'elle est mesurée par l'enquête : l'écart de score associé à la variation d'une unité de l'indice socio-économique a augmenté depuis 2003 de 14 points, soit l'augmentation la plus importante de tous les pays de l'OCDE, pour passer à 57 points, qui devient en 2014 l'écart plus important parmi les pays de l'OCDE, et renseigne donc sur des inégalités à l'école d'origine socio-économique très fortement marquées en France. .

Enfin, la France compte parmi les pays où les élèves ont le moins confiance en eux concernant leurs compétences et font le moins preuve de persévérance pour résoudre des problèmes. Selon PISA 2012, la France se classe toujours parmi les pays de l'OCDE où le niveau d'anxiété est le plus élevé, ce niveau n'ayant pas changé depuis 2003 (Cnesco, 2016).

L'ensemble de ces résultats conduit donc à des constats alarmants, d'autant plus que le cadre de référence des enquêtes TIMSS comme celui de Cedre est fondé sur les programmes scolaires contrairement à celui de PISA qui s'en émancipe délibérément. Cela implique nécessairement des lectures différentes des résultats de ces deux enquêtes, mais le fait que ces résultats se rapprochent constitue une alerte sérieuse…même si certaines limites liées aux évaluations elles-mêmes existent :

- La nature des items, et en particulier le format QCM, qui oriente les réponses fournies par les élèves selon les réponses possibles (par exemple, selon que, parmi les résultats proposés au calcul 3,8 + 1,2 un distracteur fortement attractif comme 4,10 figure ou non, les choix des élèves peuvent différer). Mais, au-delà du format des items, des contraintes fortes liées à la nécessité de pouvoir construire une échelle de performance impose d'écarter certains items estimés non satisfaisants au regard de ce modèle, après un test expérimental (caractère unidimensionnel du modèle statistique utilisé appelé « modèle de réponse à l'item »).
- Dans le même temps, le fait que les items ne soient que très partiellement libérés ne permet pas d'apprécier sur quel nombre d'items et sur quelles tâches sont fondées les échelles de compétences, et donc d'avoir une connaissance effective de ce qui est mesuré.
- Les questions de la langue, de traduction (PISA, TIMSS) et le fait que dans les tests PISA, le champ de connaissances ou le domaine qu'il mobilise ne soit pas spécifié aux élèves dans les exercices proposés, peuvent constituer des facteurs supplémentaires de difficulté pour des élèves habitués à résoudre des tâches bien identifiées comme relevant d'une matière donnée.
- Les évaluations standardisées comme PISA ou Cedre se déroulent en mai. Ces tests sont présentés aux élèves comme non notés. Il est tout à fait vraisemblable que des élèves, en situation scolaire difficile, ne fassent pas leur maximum pour les réussir au mieux … En particulier, le taux élevé de non-réponses des élèves français a pu être attribué à la peur de mal faire. Il est peut-être dû aussi à un manque de motivation pour un travail à faible enjeu dans un environnement scolaire où la note est prépondérante.

Pour davantage d'information sur les contenus de ces évaluations, on pourra se référer aux travaux nombreux de Bodin sur PISA notamment (2006, 2008), à l'article de Roditi et Salles qui ont effectué une nouvelle analyse des items de PISA 2015 en s'intéressant aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques provoquées par les tâches proposées aux élèves (2015), à la thèse de Grapin (2015) qui s'est intéressée à la validation des tests utilisés par Cedre fin d'école, et enfin au rapport du Cnesco consacré à la fois à l'analyse des cadres de référence des enquêtes PISA et TIMSS et à leurs contenus (Cnesco, 2016).

Quoi qu'il en soit, il nous paraît tout à fait essentiel de ne pas occulter ces résultats, ne serait-ce que par qu'ils résonnent avec d'autres résultats qui sont autant de signaux inquiétants pour le système scolaire et l'avenir de la France : la difficulté de recruter des enseignants en mathématiques au second degré, d'affecter ceux du premier degré dans les écoles difficiles (Cnesco, 2016) ; un sentiment de compétence perçue/niveau de satisfaction professionnelle mitigé , notamment chez les enseignants du 1er degré (TIMSS 2015), l'inadéquation déclarée de la formation initiale avec les conditions réelles d'exercice et le déficit de formation continue des enseignants (TALIS, 2013). Notre point de vue est donc que ces évaluations méritent d'être prises en considération, parmi d'autres éléments producteurs d'informations sur l'état des connaissances des élèves, et qu'elles doivent l'être, à tous les niveaux, aussi bien aux niveaux national, académique et départemental qu'à celui des établissements et des classes.

Quels acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à la charnière école/collège?

Nos propres travaux de recherche, complétés par des analyses que nous avons menées avec Jean-Paul Fischer dans le cadre de la conférence de consensus du Cnesco et de l'Fé/ENS de Lyon en novembre 2015 montrent des difficultés récurrentes et persistantes que manifestent les élèves à l'entrée au collège :

- L'écriture des grands nombres ;
- La connaissance des tables, en particulier des tables de multiplication ;
- Les nombres décimaux (écriture, comparaison, intercalation, encadrement, multiplication par 10 - 100 -1 000) ;
- Le calcul mental (« sens des nombres », ordre de grandeur d'un résultat) ;
- Le calcul posé ;
- Les résultats sur la résolution de problèmes qui sont très variables.

L'analyse approfondie de ces évaluations (contenus et résultats) nous a conduit à formuler deux hypothèses fortes, qui auraient des incidences fortes en termes de contenus à enseigner, de supports utilisés en classe et de pratiques enseignantes :

- une réussite opératoire sur des tâches portant sur les nombres entiers pourrait masquer une conceptualisation insuffisante de ces nombres ;
- les difficultés repérées sur les nombres décimaux pourraient renvoyer à cette conceptualisation insuffisante des nombres entiers.

TIMSS 2015 confirme les difficultés observées, en les rendant plus flagrantes au regard des résultats d'autres pays :

- dans les trois domaines cognitifs du cadre de référence de TIMSS (connaître, appliquer, raisonner), les scores des élèves français sont bien inférieurs à la moyenne des pays européens participants ;
- les résultats des élèves français sont particulièrement faibles sur les questions portant sur les nombres et le calcul et sur la gestion de données (lecture et interprétation de tableaux et graphiques). ;
- dans l'ensemble des pays participants, 52 % des enseignants s'estiment très satisfaits d'exercer leur métier, alors qu'ils ne sont que 30 % en France.

Vers de nouvelles voies?

Cette question de la pertinence, de la compatibilité des évaluations externes au regard des contextes professionnels des enseignants est investiguée depuis longtemps par les sciences de l'éducation, plus récemment par la didactique.

Une des questions importantes, une fois qu'on a traité de la validité et de la fiabilité de ces évaluations, est posée ainsi par Marcel Crahay (*in* Mottier-Lopez & Crahay, 2009) : « Articuler l'évaluation en classe et le pilotage des systèmes, est-ce possible ? »

« *Le défi est de taille. Le « challenge » paraît impossible tant le pilotage par évaluations externes a été présenté comme antinomique de l'évaluation interactive que pratiqueraient les enseignants dès lors qu'ils gèrent la vie d'une classe tout au long de l'année. Pourtant, écrivons-le d'emblée, il nous semble possible de coordonner ces deux pôles d'un faisceau de tensions qui peuvent s'avérer positives dès lors que certaines conditions sont réunies*. »

De Ketele (2017), lors sa conférence d'ouverture du dernier colloque de *l'A*ssociation pour le Développement des Méthodologies d'Évaluation en Éducation (ADMEE), a effectué une tentative de modélisation très intéressante qui intègre les différentes dimensions de l'évaluation. Nous partageons cette vision globale de l'évaluation,et nous pensons qu'il est possible de compléter cette modélisation, en imaginant de nouvelles fonctions et de nouveaux usages pour les évaluations externes des acquis des élèves, qui combinent plusieurs aspects que nous avons évoqués ci-dessus.

Un exemple est celui du dispositif PACEM que nous avons conçu et mis en œuvre entre 2010 et 2012, dans les académies de Créteil et d'Aix-Marseille, et qui a produit des résultats positifs sur les acquis des élèves. Ce dispositif qui repose sur une conception spécifique de l'enseignement des mathématiques et de la formation des enseignants, consiste à partir d'un test standardisé adapté comme amorce d'une formation d'enseignants. Ce test présente les caractéristiques suivantes :

- les items ont été validés statistiquement ;
- il porte sur un champ d'évaluation limité ;
- les tâches proposées sont familières aux élèves et aux enseignants ;
- la durée de passation du test est « raisonnable ».

On obtient ainsi un matériau facilement partageable entre enseignants d'une même école ou d'un même établissement, et entre écoles et établissements. La formation des enseignants qui est ancrée sur ce test, vise explicitement l'amélioration des acquis des élèves en misant sur l'évolution des pratiques professionnelles et contient les éléments suivants :

- un questionnement des processus d'apprentissage des élèves et des pratiques des enseignants;
- des apports mathématiques et didactiques;
- un travail sur les contenus et sur les déroulements pour co-construire et « conscientiser » une palette de « bonnes pratiques possibles », avec un objectif de partage de pratiques.

Ces évaluations standardisées, sous certaines conditions, peuvent donc constituer des éléments parmi d'autres, de développement professionnel des enseignants en mathématiques : elles peuvent en effet générer une réflexion à la fois individuelle et collaborative, intégrée aux contextes et aux enjeux locaux, et prioritairement centrée sur les apprentissages des élèves.

À l'heure où un retour des évaluations standardisées exhaustives des acquis des élèves est possible, il nous semble donc important d'une part de considérer ces évaluations comme des objets de recherche, et d'autre part que tous les acteurs du système éducatif réfléchissent ensemble comment les définir, comment les mettre en œuvre et comment les prendre en compte.

Références

Bodin, A. (2008). Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. *Petit x* ; n° 78, pp. 53-78, IREM de Grenoble.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Chesné, J.-F. & Fischer, J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire*. Rapport rédigé pour le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco).

Cnesco (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire.* Dossier de synthèse. http://www.cnesco.fr/fr/numeration/

Cnesco (2016). *Acquis des élèves : comprendre les évaluations internationales PISA et TIMSS*. Dossier de synthèse. http://www.cnesco.fr/fr/comparaison-pisa-timss/

Cnesco (2016). *Résultats de l'enquête internationale TIMSS : éclairage du Cnesco sur les mathématiques au primaire*. Note d'actualité.

De Ketele, J.-M. (2017). A quoi bon évaluer. *Actes du colloque de l'ADMEE 2017* (à paraître).

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

HCE (2011). *Les indicateurs relatifs aux acquis des élèves. Bilan des résultats de l'école*.

IGEN-IGAENR (2005). *Les acquis des élèves, pierre de touche de la valeur de l'école ?* Rapport n°2005-089.

Mons, N. & Pons (2006). *Les standards en éducation dans le monde francophone. Une analyse comparative.* Neuchâtel : IRDP.

Mons, N. (2007). *Les nouvelles politiques éducatives*. Paris : PUF.

Mottier Lopez, L. & Crahay, M. (sous la direction de) (2009) *Evaluations en tension. Entre la régulation des apprentissages et le pilotage des systèmes.* De Boeck : Bruxelles.

Roditi, E. & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête Pisa 2012 en mathématiques. Un autre regard sur les résultats. *Éducation & Formations,* n°86-87. MENESR-Depp.

Trosseille, B. et Rocher, T. (2015). Les évaluations standardisées des élèves. Perspective historique. *Educations & Formations,* n°86-87. MENESR-Depp.

Ateliers

At 12 : Initiation à la programmation et enseignement de la géométrie au cycle 3

Maha Abboud, Isabelle Bois et Cécile Kerboul

ESPE de l'Académie de Versailles et IREM de Paris ;

maha.blanchard@u-cergy.fr ; isabelle.bois@u-cergy.fr ; cecile.kerboul@u-cergy.fr

Résumé : Avec les nouveaux programmes, les enseignants du cycle 3 ont vu arriver une nouvelle thématique à travailler avec leurs élèves : l'initiation à la programmation, notamment «à travers la programmation de déplacements ou de construction de figures». Se pose alors la question de l'impact de l'utilisation de logiciels de programmation sur les apprentissages géométriques. Comment faire pour enseigner des notions géométriques avec des logiciels de programmation comme Scratch ? Qu'apporte l'utilisation de tels logiciels aux apprentissages géométriques ? Faut-il changer les pratiques usuelles d'apprentissage de la géométrie, ou bien les activités articulant programmation et géométrie peuvent-elles être isolées du reste et traitées comme visant principalement l'initiation à la programmation ? Nous proposons d'éclairer ces interrogations à partir d'une part, d'un regard critique sur les programmes officiels et d'une étude croisée de quelques manuels et d'autre part, d'observations de classes dont nous présentons une analyse synthétique des résultats.

Mots clefs *: géométrie ; programmation ; algorithmique ; Scratch ; cycle 3 ; construction de figures ; utilisation de logiciels en classe*

Introduction

L'arrivée du thème de la programmation dans les programmes du cycle 3 constitue la concrétisation d'un discours fréquent et divers mis en avant depuis plusieurs années dans la sphère médiatico-politique qui peut se résumer par : « initier les enfants depuis leur plus jeune âge à l'informatique, permet de former des futurs citoyens qui comprennent le monde numérique dans lequel on vit ». Les spécialistes et les chercheurs en informatique ont appuyé également, à travers leurs propres approches, cette demande récurrente en argumentant l'intérêt de l'initiation à la pensée informatique et algorithmique dès l'école primaire : « l'informatique apporte une nouvelle manière de penser et il est important d'initier les élèves à la pensée informatique ou computationnelle » (Dowek, 2016) ; « il y a donc un enjeu fort de culture générale scientifique, de culture générale informatique pour tous […] Il faut donc initier tous les élèves aux notions de base de l'informatique: algorithmique, langage et programmation » (Abitboul, 2015) ; « il est important que les élèves puis les adultes soient conscients de l'activité humaine à l'origine de toute application informatique, et de la rationalité qui préside à cette activité. Le repérage des difficultés nous conduit à penser qu'il est utile que l'initiation commence tôt de façon que les processus de maturation conceptuelle des élèves puissent avoir lieu sur le temps long des études » (Lagrange & Rogalski, 2015).

Ce nouveau thème est donc apparu à la rentrée 2016 dans les programmes de mathématiques ; les enseignants du cycle 3 ont à l'aborder en articulation avec des domaines du programme de mathématiques, en particulier celui des activités spatiales et géométriques.

Cette nouveauté paraît à même de soulever plusieurs interrogations chez les enseignants de CM1 – CM2 et de 6ème. Comment faire pour enseigner des notions géométriques avec des logiciels de programmation comme Scratch ? Qu'apporte l'utilisation de tels logiciels aux apprentissages géométriques ? Faudra-t-il changer les pratiques usuelles d'apprentissage de la géométrie, ou bien les activités articulant programmation et géométrie peuvent-elles être isolées du reste et traitées comme visant principalement l'initiation à la programmation ?

Notre travail de recherche vise à éclairer ces interrogations et à explorer des pistes de réponses. Dans un premier temps, nous nous fixons comme objectif d'observer les activités que des enseignants de CM2 et de 6ème vont mettre spontanément en place en se basant sur les ressources pédagogiques mises à leur disposition. Nous avons choisi de nous centrer sur des activités liées à la construction de figures géométriques en utilisant le logiciel Scratch. Le second temps de notre travail mettra le focus sur la formation initiale des enseignants et sur la création de ressources au service des formateurs.

Dans cet article, nous rendons compte des résultats de la phase exploratoire de notre recherche. Une première partie, présente notre lecture des programmes et étude des manuels. Les observations de classes sont présentées dans une deuxième partie, suivies d'une analyse synthétique des résultats.

Contexte

Dans cette première partie, nous dressons d'abord un panorama des instructions officielles et des programmes relativement à l'enseignement de la programmation à l'école primaire. Nous étudions ensuite quelques manuels du cycle 3 (CM1, CM2 et 6ème) pour tenter d'y détecter les différentes approches adoptées par les éditeurs et leur éventuelle évolution au cours du cycle.

Les programmes

Au cycle 1[1], les élèves rencontrent les premiers algorithmes pour lesquels il est attendu qu'ils sachent identifier les principes de leurs organisations et poursuivre leurs applications. Ils sont ainsi invités à « organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des « rythmes» de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée » (p. 15).
Cette première familiarisation avec les algorithmes se poursuit à l'école élémentaire et le thème de la programmation vient s'inscrire dans le domaine « Espace et Géométrie ».
Au cycle 2[2], dans la continuité du cycle 1, les algorithmes concernés restent simples. Les programmes incitent fortement, sans prescrire, à utiliser un logiciel de programmation pour « (se) repérer et (se) déplacer ». C'est la seule compétence travaillée dans ce cycle. « Dès le CE1, les élèves peuvent coder des déplacements à l'aide d'un logiciel de programmation adapté, ce qui les amènera au CE2 à la compréhension, et à la production d'algorithmes simples » dans des espaces familiers, sur un quadrillage, sur un écran (p. 84-86). En parallèle, le document d'accompagnement

[1] *Programme d'enseignement de l'école maternelle,* arrêté du 18-2-2015
[2] *Programmes pour les cycles 2 3 4*, MENESR, 2016, p 82-87

pour l'évaluation des acquis du SCCC[3] apporte, sans être prescriptif, des pistes pour cette évaluation. Par exemple, « l'aptitude à anticiper les différentes étapes d'un déplacement peut être évaluée dans l'écriture de programmes – exprimés en langage courant ou dans un langage spécifique – permettant de produire une succession de déplacements d'un personnage pour se rendre d'un point à un autre dans un environnement donné sur écran ou sur un quadrillage » (p. 5).
Ce qui était incitatif au cycle 2 devient une prescription au cycle 3[4]. La programmation occupe une place conséquente dans le programme de mathématiques. Notons toutefois qu'elle est abordée uniquement dans le domaine « Espace et Géométrie ». Les activités géométriques, de repérage ou de déplacement ciblent trois compétences, soit deux de plus qu'au cycle 2 : « programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran » ; « reproduire, représenter, construire : des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) » ; « réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel » (p. 210-211). On notera que la première compétence « programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran » est présentée comme une situation-activité au cycle 2. Concernant les situations-activités qui l'accompagnent, le programme suggère, sans plus de précision, de « travailler (…) avec de nouvelles ressources comme les systèmes d'information géographique, des logiciels d'initiation à la programmation » (p. 8). Concernant les deux autres compétences, aucun exemple de situations-activités n'est donné si bien que, par exemple, pour atteindre la compétence « réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide de logiciel », on ne sait quel(s) logiciel(s) est (sont) préconisé(s) (logiciels de géométrie dynamique ? logiciels de programmation ? autres ?). Par ailleurs, le document d'accompagnement pour l'évaluation des acquis du SCCC[5] précise que celle-ci porte sur « l'aptitude à lire ou à écrire un programme, dans un langage approprié, permettant l'exécution d'un déplacement d'un robot ou d'un personnage sur un écran » et plus seulement, comme au cycle 2, sur son anticipation » (p. 8).
Cette étude des programmes et des documents d'accompagnement laisse entrevoir quantité de zones d'ombre laissées à la charge de l'enseignant. L'étude de manuels apporterait-elle une sorte de traduction des programmes pour accompagner l'action de l'enseignant ?

Les manuels

Les manuels scolaires du cycle 3 font des choix très différents par rapport à l'application des programmes relatifs à la programmation et à l'intégration des technologies dans l'enseignement de la géométrie. Les approches choisies relativement aux trois niveaux (CM1, CM2 et 6ème) au sein d'une même collection se révèlent parfois être non cohérentes. Nous ne relatons pas ici une étude exhaustive de l'ensemble des manuels, mais plutôt une vision généraliste à travers l'étude de quelques-uns[6]. Nous nous intéressons particulièrement à la manière dont la programmation est prise en compte dans les leçons et les exercices et à la place des logiciels de programmation dans la palette des outils numériques présentés pour le travail de l'élève.

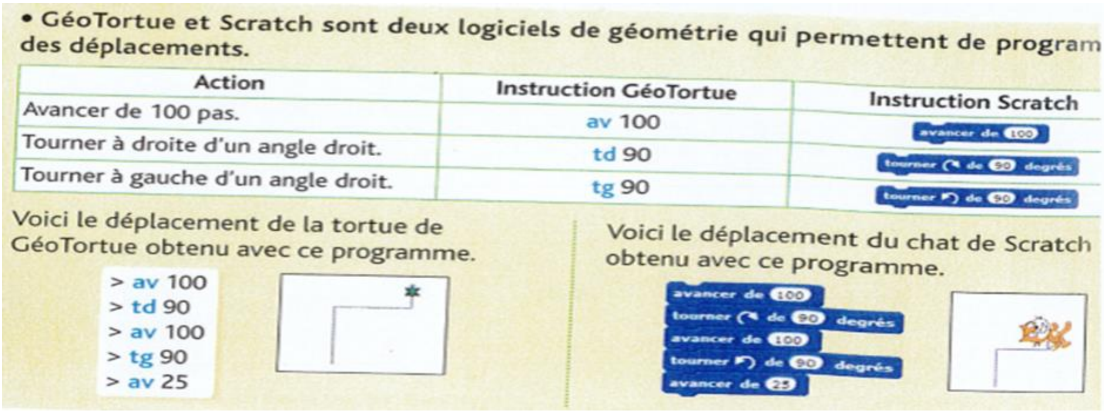
Manuels de CM1 et CM2

---

[3] *Document d'accompagnement pour l'évaluation des acquis du socle commun de connaissances, de compétences et de culture. Éléments pour l'appréciation du niveau de maîtrise satisfaisant en fin de cycle 2* (2016)
[4] *Programmes pour les cycles 2 3 4*, MENESR, 2016, p 209-214
[5] *Document d'accompagnement pour l'évaluation des acquis du socle commun de connaissances, de compétences et de culture. Éléments pour l'appréciation du niveau de maîtrise satisfaisant en fin de cycle 3* (2016)
[6] Il s'agit des manuels dont nous disposions au début de l'étude.

Les manuels de CM1 et de CM2 ne traitent pas tous de la programmation et font, généralement, d'autres choix comme celui d'utiliser des logiciels de géométrie dynamique, le tableur, la calculatrice (lesquels figurent dans les anciens programmes de 2008). Quand ils l'abordent, ce peut être sous la forme d'une « méthode » en vue de programmer un déplacement ; la programmation au service de la réalisation d'une figure géométrique se trouve plus fréquemment dans les manuels de CM2.

Arrêtons-nous sur les manuels de CM1 (2016) et de CM2 (2017) de deux collections : *Graine de maths,* Nathan et *Les nouveaux outils pour les maths*, Magnard. Dans *Graine de maths CM1 (CM2)*, Nathan, 2016 (2017), deux logiciels de programmation sont utilisés : Géotortue et Scratch. Ils sont vus comme des «logiciels de géométrie » associés à la programmation des déplacements en CM1 (p. 136-137) et en CM2 (p. 146-147).



• GéoTortue et Scratch sont deux logiciels de géométrie qui permettent de program des déplacements.

Action	Instruction GéoTortue	Instruction Scratch
Avancer de 100 pas.	av 100	avancer de 100
Tourner à droite d'un angle droit.	td 90	tourner ↻ de 90 degrés
Tourner à gauche d'un angle droit.	tg 90	tourner ↺ de 90 degrés

Voici le déplacement de la tortue de GéoTortue obtenu avec ce programme.

> av 100
> td 90
> av 100
> tg 90
> av 25

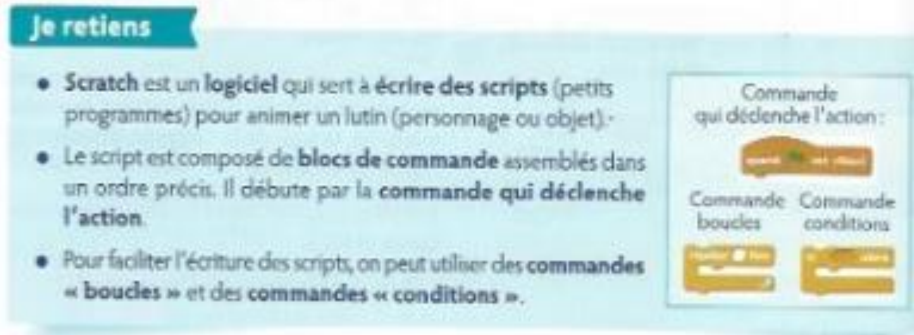
Voici le déplacement du chat de Scratch obtenu avec ce programme.

avancer de 100
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 100
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 25

Figure 1 : Extrait de *Graine de maths* CM1, Nathan (2016), p. 136

Entre le CM1 et le CM2, la vision évolue. En CM2, deux parties apparaissent avec une nette distinction entre *réaliser* et *construire* une figure géométrique : premièrement, seul Scratch (mais pas Géotortue) est associé à la nouvelle partie « réaliser une figure simple à l'aide d'un logiciel de programmation » (p 146). Deuxièmement, le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra, absent dans le manuel de CM1, fait son entrée ; il permet la construction de figures (p. 178).

Quant à la collection *Les nouveaux outils pour les maths CM1 (CM2)*, Magnard, 2016 (2017), les visions relatives à la programmation et à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) sont identiques en CM1 et en CM2 : le logiciel Scratch sert à animer un lutin et il n'y a aucun lien entre le logiciel de programmation et la programmation d'un déplacement ou de la réalisation d'une figure (CM2, p. 148-149).



Je retiens

- **Scratch** est un **logiciel** qui sert à **écrire des scripts** (petits programmes) pour animer un lutin (personnage ou objet).
- Le script est composé de **blocs de commande** assemblés dans un ordre précis. Il débute par la **commande qui déclenche l'action**.
- Pour faciliter l'écriture des scripts, on peut utiliser des **commandes « boucles »** et des **commandes « conditions »**.

Commande qui déclenche l'action

Commande boucles

Commande conditions

Figure 2 : Extrait *Les nouveaux outils pour les maths*, CM2, Magnard, 2017, p. 148

Graine de Maths et *Les nouveaux outils pour les maths* adoptent ainsi deux visions différentes de la programmation. Ce qui différencie également les deux manuels est la manière d'intégrer la géométrie dynamique : *Les nouveaux outils pour les maths* propose d'utiliser GeoGebra en CM1 et en CM2, alors que *Graine de maths* ne le propose qu'en CM2 (p.152-153). Par contre, les visions de ce logiciel de géométrie se rejoignent dans les deux manuels : permettre la construction de figures.

Manuels de 6ème

Sur un panel de sept manuels de 6ème parus en 2016 ou 2017, nous observons que le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra et le tableur y trouvent leur place (dans les programmes depuis plusieurs années). Nous ne pouvons cependant en dire autant concernant Scratch. Ainsi certaines collections l'ont peu - voire pas - intégré (*Kwyk 6^{e}*, Hachette, 2016 ; *Transmath 6^{e}*, Nathan, 2016) alors que d'autres ont essayé de l'aborder dans la plupart des chapitres (*Mission Indigo 6^{e}*, Hachette, 2017, *Maths Monde 6^{e}*, Didier, 2017).

On peut y trouver des tentatives pour définir Scratch auprès des élèves. Par exemple :

- "un **logiciel** qui permet de faire exécuter des commandes à un ou plusieurs lutins" (*Mission Indigo 6^{e}*, Hachette, 2017, p 10) ou encore « un **logiciel** qui permet de programmer en langage naturel » (*Phare 6^{e}*, Hachette, 2017, livret d'accompagnement p. IX)
- « un **langage** de programmation visuel » (*Maths Monde 6^{e}*, Didier, 2017, p. 260)

Enfin, les activités proposées sont de natures très diverses : certaines sans lien avec les mathématiques, d'autres dans le cadre numérique ou géométrique.

En ce qui concerne les activités autour de la construction de figures avec Scratch, on retrouve une structure assez commune dans plusieurs manuels et conforme aux programmes : un script étant proposé, il s'agit dans un premier temps, soit de l'analyser (en faisant par exemple un dessin à main levée), soit de l'exécuter directement à l'aide du logiciel pour voir la figure géométrique tracée par le lutin. Puis, dans un second temps, il est demandé de modifier ce script (ou de l'adapter) pour répondre à une consigne donnée.

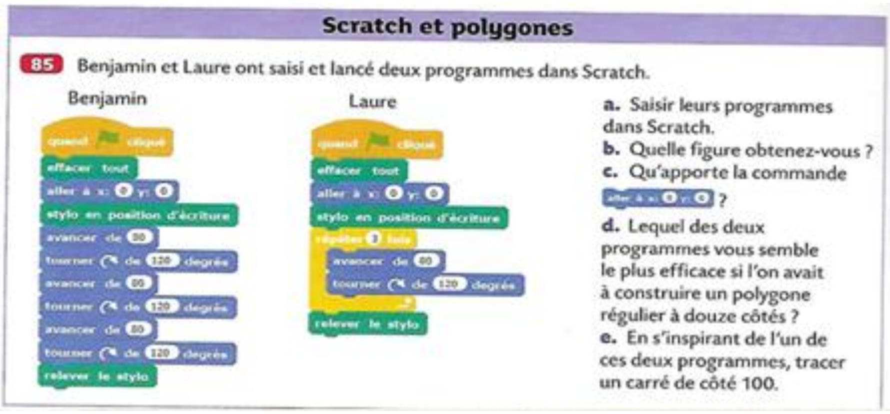


Figure 3 : Extrait de *Maths Monde 6^{e}*, Didier, 2017, p. 192

Expérimentations

A l'issue de ce premier travail d'étude des ressources disponibles, programmes et manuels, nous nous sommes dirigées vers les observations de classe autour de l'utilisation du logiciel Scratch. Des discussions avec plusieurs enseignants nous ont révélé que face à la variabilité dans les manuels, et pour se conformer aux programmes, ces enseignants se dirigent souvent vers les documents d'accompagnement et les ressources proposées sur les sites officiels, en l'occurrence ici le document : « Initiation à la programmation aux cycles 2 et 3 »[7].

Nous avons proposé à une enseignante de classe de 6ème (Cindy) de mettre en place une séance utilisant le logiciel Scratch en se basant si possible sur les documents d'accompagnement des programmes. Elle s'est emparée de la ressource « Initiation à la programmation. Annexe 5.4 : Scratch – Figures Géométriques »[8] sur le site Eduscol. Elle l'a cependant adaptée afin de donner aux élèves l'opportunité de produire par eux même un script, sans « modèle ». De plus, elle espérait profiter d'une telle situation pour introduire les notions de répétitions et de boucles (cf. annexe 1).

Elle a mis en place cette activité après une séance en débranché sur les déplacements et deux séances de familiarisation avec Scratch en salle informatique. Les 30 élèves de la classe ont travaillé par binômes (un binôme par ordinateur). Le travail de trois binômes a été observé et retranscrit. L'enseignante n'a pas fait d'interventions collectives pendant la séance, elle a cependant demandé aux élèves d'enregistrer régulièrement leurs scripts pour une exploitation ultérieure. Nous avons eu accès à ces scripts.

L'activité conçue par Cindy a été ensuite proposée à Gilles, un enseignant en double niveau CP/CM2. Il a décidé de la mettre en place avec ses 10 élèves de CM2. En début de séance, l'enseignant a réuni les élèves autour d'une table et a organisé un bilan collectif sur les activités déjà faites avec Scratch. Ces interventions collectives ont été filmées et transcrites. Par la suite, les élèves ont travaillé individuellement sur ordinateur. Le travail de trois élèves a été observé et retranscrit.

Dans cet article, nous ne détaillons pas les analyses faites pour chacune des deux séances. Nous optons plutôt pour la présentation des résultats d'une façon synthétique en les illustrant par des extraits des observations.

Résultats

Un regard synthétique sur les résultats partant de notre problématique initiale nous permet de les regrouper selon trois entrées.

Mobiliser des connaissances mathématiques pas encore là !

L'angle de 90°

Le logiciel Scratch propose les commandes « tourner à droite de … degrés » et « tourner à gauche de … degrés ». Or d'après les instructions officielles, l'introduction d'une unité de mesure d'un angle et l'utilisation d'un outil de mesure ne sont abordées qu'à partir du collège.

Pour esquiver l'utilisation de cette notion, beaucoup de manuels de CM1 et CM2 ne proposent que des activités de déplacement et/ou de construction géométrique avec Scratch n'utilisant que des blocs préformatés à 90° (même en 6ème). Certains manuels s'aventurent cependant un peu plus loin : par exemple, dans *Les nouveaux outils pour les maths CM2* (Magnard, 2017, n°5 p 149) où l'angle

[7]http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Initiation_a_la_programmation/92/6/RA16_C2_C3_MATH_inititation_programmation_doc_maitre_624926.pdf
[8]http://cache.media.education.gouv.fr/file/Initiation_a_la_programmation/91/6/RA16_C2_C3_MATH_annexe_5_4_scratch_figures_geo_624916.pdf

de 45° est présenté comme un demi-angle droit (comme un code à connaître) ou encore dans *Maths Monde 6ème* (cf. Fig. 3) avec la construction d'un triangle équilatéral.

Cindy et Gilles sont bien conscients de cette ambiguïté, passée sous silence lorsqu'il s'agit d'activités avec Scratch.

Gilles prend en charge la notion de mesure d'angle lors du regroupement en début de séance. Il introduit l'unité de mesure d'un angle et l'instrument de mesure (il montre un rapporteur de tableau aux élèves) et note sur un affichage qu'un angle droit mesure 90°. Quant à Cindy, elle explique, lors d'un entretien post-observation, qu'elle n'a pas encore travaillé sur les angles à l'heure de l'expérimentation Scratch. Elle a cependant anticipé ce problème et profité de l'activité en débranché sur les déplacements pour montrer aux élèves que « tourner à droite ou à gauche » ne suffit pas pour guider une personne et qu'il faut donc être plus précis : « tourner comment et de combien ? ».

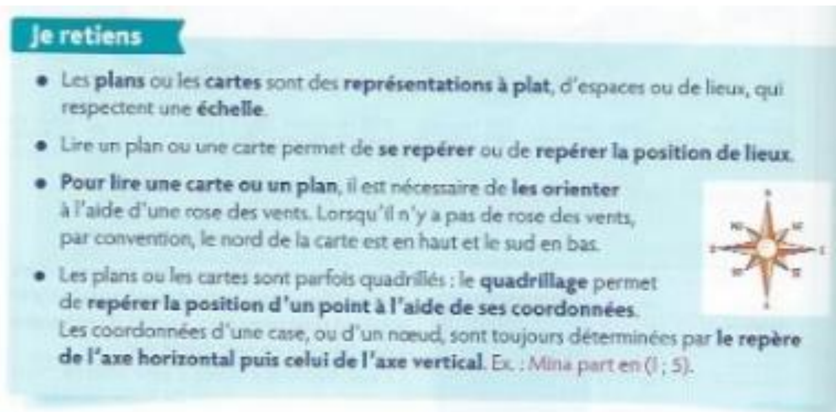
L'observation des élèves montre qu'ils insèrent quasi-systématiquement « 90 » dans le bloc « tourner de … degrés », reprenant ainsi les instructions préalables de l'enseignant. S'ils écrivent un autre nombre, ils corrigent rapidement en le remplaçant par 90. A l'évidence, ils manipulent ce « 90 », tel « un code », sans réellement comprendre la notion d'unité de mesure d'angle sous-jacente.

Quelques élèves « bricolent » avec ces angles de 90° pour obtenir l'orientation souhaitée. Par exemple, lorsqu'ils veulent remettre à l'endroit leur lutin qui a « la tête en bas », ils répètent deux fois « tourner de 90 degrés » (avec ou sans boucle) pour faire un demi-tour (cf. annexe 2).

Le repère du plan et les coordonnées des points

Lorsqu'on utilise le logiciel Scratch, on peut être amené à travailler sur la notion de coordonnées dans le plan. La scène est en effet munie d'un repère (visible ou pas, au choix de l'utilisateur), qui permet notamment de définir la position du lutin à un instant t. Or, d'après les instructions officielles, se repérer dans le plan muni d'un repère orthogonal est au programme du cycle 4.

La notion de coordonnées est utilisée cependant dans certains manuels, comme par exemple dans exercices de programmation du manuel *Les nouveaux outils pour les maths,* CM2, Magnard, 2017 (p. 146-147). Pour les auteurs de ce manuel, il semble qu'il soit nécessaire, vraisemblablement pour garder une certaine cohérence, d'introduire la notion de coordonnées ou de rappeler la notion des points cardinaux en amont de la programmation (dans la partie « Se repérer et se déplacer dans l'espace »).



Je retiens

- Les **plans** ou les **cartes** sont des **représentations à plat**, d'espaces ou de lieux, qui respectent une **échelle**.
- Lire un plan ou une carte permet de **se repérer** ou de **repérer la position de lieux**.
- **Pour lire une carte ou un plan**, il est nécessaire de **les orienter** à l'aide d'une rose des vents. Lorsqu'il n'y a pas de rose des vents, par convention, le nord de la carte est en haut et le sud en bas.
- Les plans ou les cartes sont parfois quadrillés : le **quadrillage** permet de **repérer la position d'un point à l'aide de ses coordonnées**. Les coordonnées d'une case, ou d'un nœud, sont toujours déterminées par **le repère de l'axe horizontal puis celui de l'axe vertical**. Ex. : Mina part en (I ; 5).

Figure 4 : Extrait *Les nouveaux outils pour les maths*, CM2, Magnard, 2017, p 146

Dans le manuel *Mission Indigo 6*^{e} (Hachette, 2017, p 144), les auteurs ne cherchent pas à définir ce que sont les coordonnées d'un point (puisque ce n'est plus au programme). Il est cependant utile parfois de commencer le script au centre de la scène et c'est à cette occasion que la commande « aller à x:0 et y:0 » est introduite. A noter que pour les élèves, ceci n'a pas de sens mathématique, d'autant plus que le repère n'est pas visible sur la scène.

Figure 5 : Extrait *Mission Indigo 6*^{e}, Hachette, 2017 (p 144)

Nous présentons ci-après quelques observations de classe relativement à cette entrée.

En début de séance de CM2, lorsque l'enseignant procède à un rappel des séances précédentes, il demande aux élèves de rappeler quelle est la différence entre les commandes « tourner » et « s'orienter », ce qui l'amène à revenir sur la notion de coordonnées. Après ce rappel et lorsqu'il passe aider individuellement les élèves, nous remarquons que l'enseignant a besoin des coordonnées, en particulier pour réinitialiser son programme, et qu'il couple alors le bloc « aller à » au bloc « s'orienter à 90 ». Pour un des élèves observés, nous remarquons que, malgré l'aide de l'enseignant pour orienter le chat, il ne semble pas avoir conscience de ce qu'il fait ; pour lui, les blocs « tourner » et « s'orienter » restent confus.

Le script proposé ci-dessous laisse supposer que la commande « aller à… » est souvent utilisée dans son sens commun, c'est-à-dire pour faire aller le lutin d'un point à un autre point, lesquels étant repérés par des coordonnées visibles à l'écran. Ce script est produit par un élève de CM2 après 7 minutes de recherche de la question 1. Auparavant, il écrit à l'issue d'une seconde tentative le bloc de réinitialisation. Il le teste en demandant au lutin « avancer 100 ». L'élève cherche alors à faire faire un quart de tour au chat. Il utilise en première intention la commande « aller à … ».

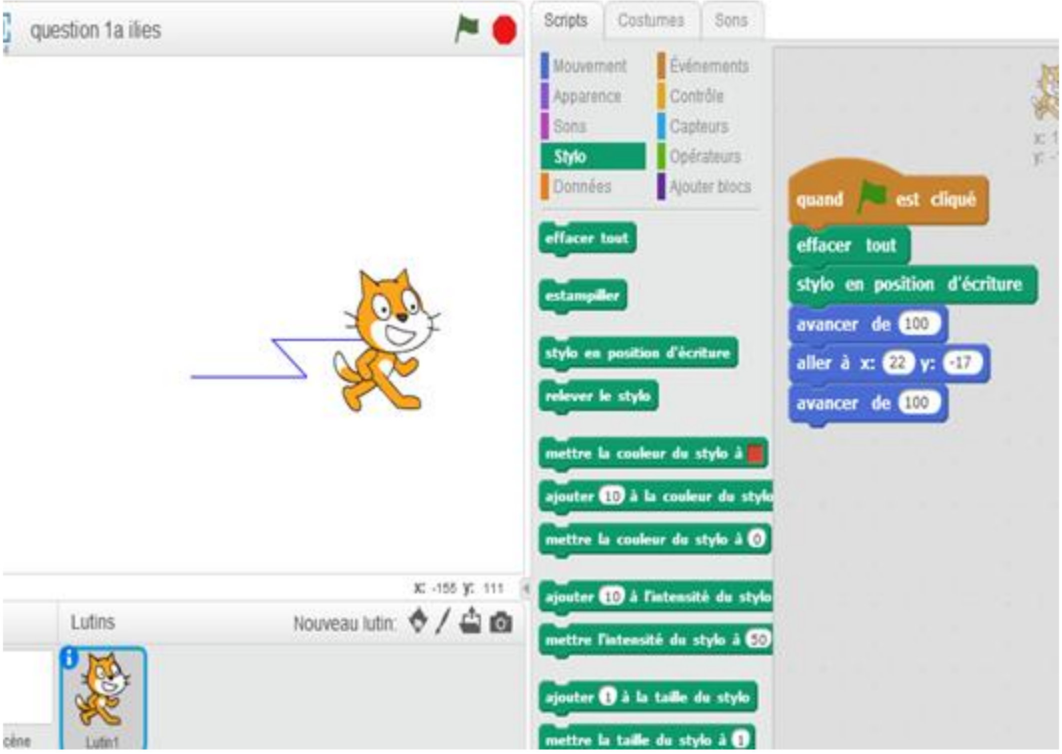


Figure. 6 : Script d'Iliès, tentative de réponse à la question 1

Nous avons également observé une autre utilisation contrainte des coordonnées (toujours avec la commande « aller à… ») pour replacer, dans le champ de la scène, le lutin qui sort de l'écran. Certains élèves peuvent donc recourir aux coordonnées par nécessité relative à la manipulation, sans pour autant convoquer les connaissances mathématiques sous-jacentes. Cette observation permet par ailleurs de pointer une des difficultés techniques d'utilisation du logiciel Scratch liées au comportement du lutin aux bords de la scène visible à l'écran et liées également à son interprétation par l'élève.

Nous pouvons conclure ici que l'utilisation de Scratch amène les élèves de cycle 3 à mobiliser des connaissances qui relèvent du programme de cycle 4 et non de leur cycle d'enseignement. Ils s'en sortent (presque) toujours en recourant à des stratégies d'essais-erreurs ou en demandant de l'aide à l'enseignant jusqu'à comprendre les fonctionnalités de certaines commandes. Cette compréhension semble rester à un niveau empirique, mais y a-t-il un « sens mathématique » qui vient s'y adjoindre, ou déclenche–t-elle la recherche d'un tel sens ?

Construction de figures géométriques : oui mais !

Les programmes et les documents d'accompagnement soulignent que le logiciel Scratch permet de tracer des figures géométriques et certains manuels proposent des activités allant dans ce sens. Toutefois nos observations nous amènent à poser trois grandes questions relatives à ce type d'activités :

Les élèves construisent-ils des figures géométriques ou bien s'agit-il pour eux de « dessiner » des chemins, si possible fermés ?

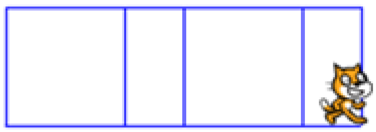
En effet, nous observons souvent les élèves répéter : « avancer de x », « tourner de 90 » jusqu'à ce que le dessin se ferme, mais sans vraisemblablement tenir compte du fait qu'avancer correspond à « construire un segment » ou bien que tourner de 90 correspond à « préciser la mesure d'un angle ».

Nous donnons ici l'exemple d'un élève de CM2 qui écrit un script correct pour dessiner la figure de la question 1 et appelle l'enseignant pour la validation. L'enseignant lui pose la question si c'est « toujours un carré » et l'élève répond « non ». S'ensuit un dialogue où l'enseignant essaye de faire dire à l'élève les propriétés des carrés, qui sont bien vérifiées par le script, pour qu'il se rende compte qu'il a vraiment construit un carré. Ce sont donc uniquement les questions de l'enseignant qui guident vers la mobilisation de connaissances géométriques : formuler l'égalité des angles et reconnaître l'égalité des angles.

Assiste-t-on à une régression dans la progression de l'apprentissage de la géométrie ?

Rappelons que les recherches didactiques ont montré un cheminement dans l'apprentissage qui part de la géométrie perceptive, évoluant vers la géométrie de l'argumentation basée sur l'utilisation des propriétés et vers enfin la géométrie déductive. En particulier, Houdement et Kuzniak (2006) montrent la progression (du cycle 1 au cycle 4) de l'apprentissage de la géométrie (GI) qui a pour source de validation la réalité, le sensible et qui est basée sur l'expérience, vers la géométrie (GII) axiomatique naturelle où la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Les exemples que nous avons observés ne montrent-ils pas un risque de perturbation de cette progression ? Assiste-t-on à un mouvement, inverse, de la GII vers la GI qui d'ailleurs n'est pas présent, rappelons-le, lors de l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique ?

Quelle appréhension ont les élèves de la figure géométrique lorsqu'ils travaillent avec Scratch ?



Lors du travail sur des figures géométriques, les élèves peuvent mobiliser différentes appréhensions de la figure (Duval, 1994). Lors de la reproduction de figures avec Scratch, les élèves en ont nécessairement une appréhension perceptive, cependant la discrimination en sous-figures ne coïncide pas nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure modèle. De même, l'ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure (appréhension séquentielle) et qui dépend principalement des propriétés mathématiques à représenter et des constructions techniques des instruments utilisés (logiciels de géométrie dynamique, règle et compas…) n'est plus le même.

Citons ici l'exemple de la question 3 de l'annexe 1 : plusieurs élèves ont vu ici un grand rectangle qu'il faut d'abord dessiner puis partager par des traits verticaux. Cette stratégie est pertinente, voire économique, dans un environnement papier-crayon. Cependant, la mettre en place dans cette question les aurait obligés à modifier leurs scripts ou à le refaire pour réaliser une frise plus longue.

On voit ainsi des confusions multiples entre des procédures et des connaissances mobilisées en papier crayon qui ne sont plus les mêmes avec Scratch et qui viendraient parasiter le travail dans l'un ou l'autre des deux environnements. Ceci est d'autant plus vrai lorsque le projet didactique lié aux connaissances informatiques à mobiliser (la notion de boucle par exemple) n'est pas visible aux élèves.

Connaissances et stratégies relevant de la programmation : approche assumée ou non !

Les boucles

Pour la tâche proposée, le recours aux boucles peut être motivé par le caractère répétitif des instructions, notamment à partir de la question 3. Les élèves observés les ont-ils utilisées ?

Dans la classe de 6ème de Cindy, aucun élève n'a eu, pour première intention, l'idée d'utiliser la boucle « répéter ». Quant aux élèves de CM2 de Gilles, ils l'ont davantage utilisée, vraisemblablement parce que l'enseignant l'avait introduite collectivement au cours d'une séance précédente.

En analysant les scripts, on remarque que plusieurs élèves ont réussi la construction de la frise sans utiliser de boucle : les scripts sont très longs, mais cela ne semble pas les perturber. Dans d'autres scripts, on note que les boucles apparaissent là où l'enseignant ne les attendait pas : par exemple, dans son script (cf. annexe 2), Clément a utilisé une boucle itérative pour permettre au lutin de faire un demi-tour, mais n'a pas eu l'idée d'en utiliser une pour construire son carré de départ.

Nous en concluons que l'utilisation de boucles ne semble pas « naturelle » pour les élèves, même si les contraintes de la tâche sont choisies pour motiver cette utilisation. Un apprentissage plus spécifique de cette notion importante dans le domaine de la programmation serait donc nécessaire.

Les stratégies par bricolage

On observe que les élèves bricolent dans le but de contourner leur(s) difficulté(s) du moment. Ils mettent en œuvre des stratégies personnelles pour pouvoir avancer dans la tâche. Reprenons ici par exemple le moment au cours duquel il s'avère nécessaire de réorienter le lutin. En étudiant les scripts d'Iliès et de Clément (annexe 2), on s'aperçoit que ces deux élèves, n'ayant probablement pas compris la commande « s'orienter à », ne l'utilisent pas. Mais cela ne les empêche pas de progresser dans la tâche. En effet, tous deux bricolent différemment en s'appuyant sur ce qu'ils voient à l'écran : Iliès utilise deux fois de suite la commande « tourner de 90 degrés » tandis que Clément l'utilise une seule fois dans une boucle de deux répétitions.

Par ailleurs, nous avons également montré comment certains élèves parviennent à faire abstraction des notions mathématiques de coordonnées et de repères, par exemple en utilisant la commande « aller à » qui permet au lutin de se déplacer en ligne droite d'un point à un autre après avoir repéré qu'ils étaient associés à des valeurs (sans savoir qu'il s'agit de coordonnées).

Nos observations de classe nous amènent donc à penser que les élèves sont capables de s'approprier ce qu'ils voient à l'écran ou trouvent dans les menus, sans pour autant comprendre les contenus mathématiques sous-jacents. D'ailleurs ce type de stratégies est fréquent lors de l'appropriation d'un artefact technique et les stratégies par essais-erreurs font partie du paysage de la programmation. Mais comment allier ce bricolage à visée de « réussite technique » de la tâche (un programme qui tourne) et le nécessaire recours à un raisonnement fondé sur des connaissances lorsqu'on travaille en classe de géométrie ?

Discussion

Un regard global sur les premiers résultats de notre recherche nous permet d'avancer que l'utilisation d'un logiciel de programmation (ici Scratch) pour faire de la géométrie ne paraît pas compatible avec une intégration « naturelle » dans l'activité géométrique des élèves du cycle 3.

Cette utilisation peut parfois constituer un obstacle à la mobilisation de connaissances géométriques, pourtant supposées acquises, en centrant l'activité sur les connaissances techniques liées à l'environnement. Elle peut aussi venir parasiter les stratégies usuelles d'analyse géométrique de la figure dans le but de la reproduire en introduisant des contraintes obligeant l'élève à penser les figures comme des lignes continues et non en les déconstruisant en des segments/droites liés par des propriétés géométriques.

Toutefois, une initiation préalable au logiciel dans des séances dédiées (sans avoir l'objectif de « faire des mathématiques »), pourrait décharger l'élève (et aussi l'enseignant) lors des séances mathématiques de la gestion de problèmes liés à des connaissances techniques et centrerait son attention sur une reconnaissance d'un environnement géométrique dans lequel ses connaissances anciennes peuvent être mises à profit. Ceci ouvrirait la palette des tâches géométriques en introduisant une nouvelle nuance autour des régularités des figures et la construction à moindre coût de frises (voire de pavages).

Cette initiation préalable à l'utilisation du logiciel en tant que tel recentrerait l'objectif de cette utilisation sur sa visée originelle, à savoir « l'initiation des élèves à la pensée informatique ». Enseigner cette pensée tendra à développer des compétences adéquates : savoir décomposer un problème en sous-problèmes plus simples ; savoir réfléchir aux tâches à accomplir en termes d'étapes et d'actions (Tchoukinine, 2017) et à adopter une approche orientée « informatique créative » autorisant voire encourageant les stratégies par essais-erreurs et les démarches de projet. Autrement dit, engager l'enseignant de cycle 3 dans un nouveau domaine d'enseignement comme c'est le cas pour le cycle 4, clarifiera, à notre avis, l'enjeu pour l'enseignant et permettra d'éviter des contradictions, parfois handicapantes, entre une approche mathématique « familière » et une approche informatique nouvelle qui n'a pas encore fait ses preuves pour ce niveau d'enseignement.

Cette dernière réflexion pose d'emblée la question de la formation des enseignants. Nous reprenons ici à notre compte des questions avancées par Tchounikine (2017) qui peuvent structurer une telle formation : quels objectifs pédagogiques (des conceptions-approches orientées « algorithmique » et « informatique créative ») peut-on considérer pour l'enseignement de l'informatique ? Que veut dire « utiliser Scratch pour enseigner la pensée informatique » ? Que faut-il comprendre de Scratch en tant qu'enseignant, et comment s'y prendre ? Comment définir et gérer des situations pédagogiques? Quelles difficultés peut-on attendre et anticiper ?

C'est à construire de telles formations et à les expérimenter que nous consacrons la suite de notre travail de recherche.

Références

Abitboul, S. (2015). L'école au cœur du numérique - enseigner l'informatique. http://peep.asso.fr/thematiques/numerique-a-l-ecole/la-peep-l-informatique-et-l-ecole/l-ecole-au-c-ur-du-numerique-enseigner-l-informatique-table-ronde-du-93eme-congres-peep/. Consulté le 25 septembre 2017

Dowek, G. (2016). En informatique, il est important de commencer tôt. http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2016/06/03062016Article636005337946309506.aspx. Consulté le 22 septembre 2017.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM,* 17, 121-138.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Lagrange J.B. & Rogalski, J. (2015) Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. In A.C. Mathé & E. Mounier (Éds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques* (pp. 155176). IREM Paris.

Tchounikine, P. (2017). Initier les élèves à la pensée informatique et à la programmation avec Scratch - http://lig-membres.imag.fr/tchounikine/PenseeInformatiqueEcole.html. Consulté le 24 septembre 2017.

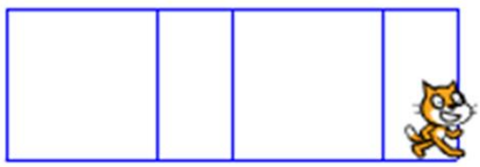
Annexe 1 : activité de Cindy

Des carrés et des rectangles avec Scratch

1. Le chat veut tracer un carré de longueur 100 pixels.
Créer un script qui permet de tracer un tel carré.
Appeler le professeur.
Enregistrer le script.

2. Le chat souhaiterait maintenant accoler un rectangle de largeur 50 pixels et de longueur 100 pixels au carré qu'il a dessiné précédemment.
Compléter le script précédent.
Appeler le professeur.
Enregistrer le script.

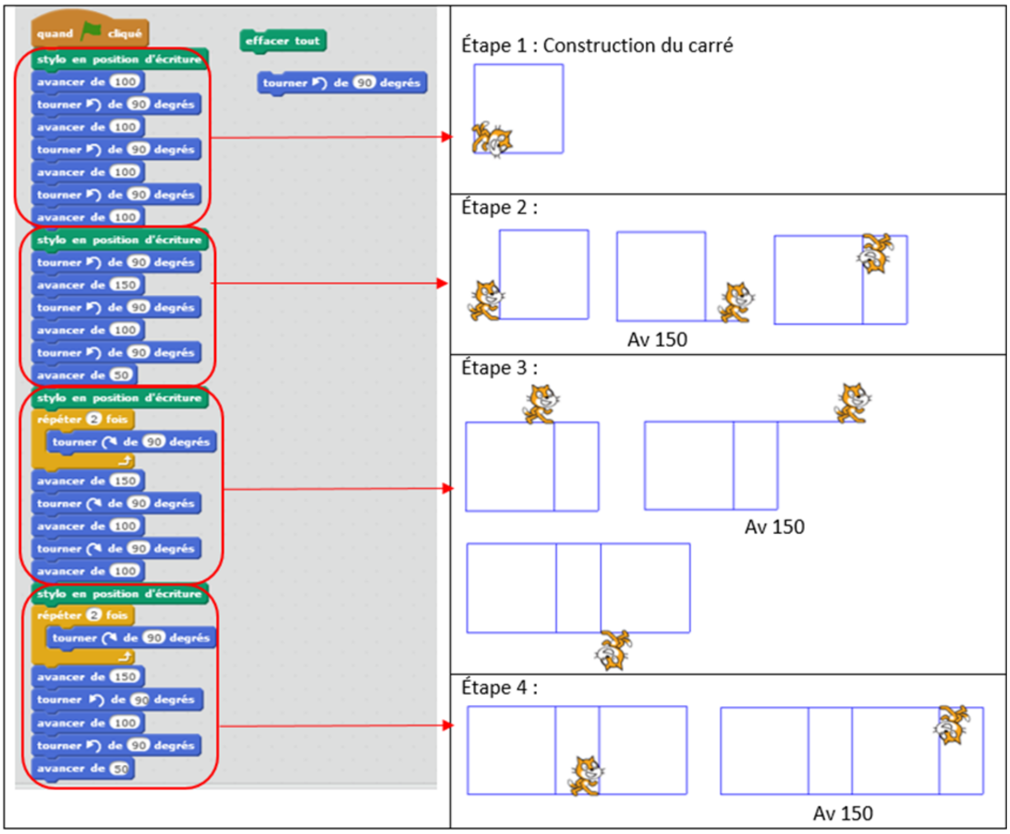
3. Le chat aime beaucoup dessiner !



A partir du script précédent, aide le chat à dessiner la frise ci-dessus.
Appeler le professeur. Enregistrer le script.

Annexe 2 : Question 3 – scripts d'Iliès et de Clément

Script d'Iliès



Script de Clément

At 13, 24, 25, 35 : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3

Marc Moyon[1], Renaud Chorlay[2] et Frédérique Plantevin[2]

[1]IREM de Limoges; marc.moyon@unilim.fr

[2]IREM de Paris, IREM de Brest; renaud.chorlay@espe-paris.fr, frederique.plantevin@univ-brest.fr

Résumé : Dans cette contribution, nous décrivons un projet de recherche intitulé « Passerelles » et mené dans le cadre de la commission inter-IREM « épistémologie et histoire des mathématiques ». Ce projet impliquant neuf IREM du réseau national (Brest, Dijon, Grenoble, La Réunion, Limoges, Lyon, Paris, Paris Nord, Poitiers), propose des expérimentations d'introduction d'une perspective historique ou philosophique dans l'enseignement des mathématiques. Quatre des neuf IREM – Limoges, Paris, Brest et Dijon – ont répondu à l'appel à contributions au colloque « Mathématiques au cycle 3 » et animé quatre ateliers distincts. Pour les présents actes, le choix a été fait de regrouper trois de ces travaux de manière à pouvoir à la fois exposer le cadre général de la recherche, et ensuite l'illustrer par des exemples présentés à Poitiers. La forme de présentation retenue devrait permettre de comprendre et de s'approprier les réflexions et les enjeux inhérents à ces expérimentations.

Mots clefs : Histoire des mathématiques ; géométrie plane ; numération ; calcul ; interdisciplinarité.

Introduction : objectifs, modalités du projet de recherche "Passerelles"

Neuf groupes IREM, répartis sur l'ensemble du territoire français (Brest, Dijon, Grenoble, La Réunion, Limoges, Lyon, Paris, Paris Nord, Poitiers) et réunis au sein de la commission inter-IREM « épistémologie et histoire des mathématiques »[1], travaillent sur l'introduction, au cycle 3, d'une perspective historique ou philosophique dans l'enseignement des mathématiques. Chaque groupe développe, dans son propre IREM, une ou des séquences d'enseignement qui sont expérimentées dans des classes de CM1, CM2 et/ou 6e autour d'un document historique (texte officiel, décret de loi, source mathématique ou philosophique) ou d'un artefact matériel (machine, abaque ou instrument de mesure). Le projet « Passerelles : les mathématiques par leur histoire au cycle 3 » est original[2] au sens où il s'adresse à la fois aux professeurs des écoles dont la polyvalence est envisagée comme une richesse, et aux professeurs de collèges et lycées, à la fois spécialistes de leur discipline et enclins aux projets interdisciplinaires. En mathématiques, les trois grands domaines du programme de cycle 3 sont abordés : « nombres et calculs », « grandeurs et mesure » et « espace et géométrie ». Les périodes historiques traitées s'étendent de l'Antiquité à l'époque contemporaine. De nombreuses compétences sont explicitement travaillées. Outre les six compétences majeures des

[1] http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15

[2] À notre connaissance, uniquement deux ouvrages francophones ont proposé, par le passé, des séances d'enseignement des mathématiques en intégrant une perspective historique pour l'école élémentaire : (Cerquetti-Aberkane et Rodriguez 1997) et (Cerquetti-Aberkane et *al*. 2002). Signalons encore les ouvrages plus récents (Jasmin, Brenni 2004) et (Djebbar et *al*. 2009), issus des travaux de « La main à la pâte », mais qui s'intéressent davantage à l'histoire des sciences expérimentales que mathématiques, exception faite de (Moyon 2009) pour l'étude des frises et pavages en CM2/6e.

mathématiques (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer), on peut encore citer : se repérer dans le temps ; comprendre un document, notamment historique.

Comme les instructions officielles le précisent,

> *La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves.* (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 3, Mathématiques, p. 198)

Cependant, pour nous, l'apport ne peut être envisagé que dans ses dimensions culturelles. En effet, à l'instar des ouvrages collectifs (Barbin 2010, Barbin 2012) auxquels un grand nombre d'entre nous a participé, nous poursuivons l'étude des *modalités* de l'introduction d'une perspective historique – *via* des sources historiques primaires et/ou une mise en contexte – au regard des *effets* potentiels en termes de motivation des élèves, de dévolution des problèmes et d'appropriation des connaissances. En outre, dans le projet « Passerelles », nous allons encore plus loin dans les analyses didactiques des expérimentations (*a priori* et *a posteriori*). Nous souhaitons ainsi que tous les enseignants du cycle 3 et en particulier ceux du primaire, pour qui les mathématiques ne représentent qu'une des matières à enseigner, puissent s'approprier nos expérimentations pour les mettre en place à leur tour. Nous avons aussi voulu donner suffisamment de matériel pour que nos travaux puissent être utiles en formation initiale d'enseignants dans les ESPE et en formation continue (stages ou animations pédagogiques de circonscription).

À la suite de l'ensemble des expérimentations et des analyses, notre groupe est donc en train de finaliser un recueil collectif dans lequel tous les chapitres sont construits selon le même modèle. Nous présentons, de manière synthétique, les points du programme et les compétences spécialement travaillées. Ainsi, le lecteur peut choisir de lire plus spécifiquement un chapitre plutôt qu'un autre en fonction de ses objectifs d'enseignement ou de formation. Dans une première partie, chaque chapitre décrit les éléments historiques et culturels nécessaires à la prise en charge de la (ou des) séquence(s) proposée(s). De cette manière, le lecteur a en tête l'essentiel du contexte historique des documents ou artefacts travaillés. C'est aussi cette partie qui lui permet d'introduire la (les) séquence(s) en classe ou en formation. Dans une deuxième partie, nous détaillons la (les) séquence(s) proprement dite(s). En guise d'analyse *a priori*, les enjeux pédagogiques et didactiques sont explicités pour comprendre l'intérêt de celle(s)-ci. Nous décrivons ensuite les modalités précises de la (des) séquence(s) telle(s) que nous l'(les) avons mise(s) en œuvre. Parce que nous désirons montrer nos expérimentations au plus près du terrain, tous les chapitres sont largement illustrés de travaux d'élèves (voire de vidéos accessibles *via* internet) afin de guider notre analyse *a posteriori*. Enfin, dans une troisième et dernière partie, des prolongements possibles sont proposés en prenant en compte diverses orientations : la liaison école-collège, l'interdisciplinarité, l'utilisation du numérique...

Nous avons choisi de donner à voir trois des dites expérimentations qui ont été présentées au colloque de Poitiers. Cela nous permet de montrer l'esprit dans lequel le projet « Passerelles » s'est développé dans trois domaines d'enseignement : la géométrie avec la reproduction de figures de Léonard de Vinci, les grandeurs avec la duplication du carré chez Platon et enfin la numération et le calcul avec leur mécanisation à l'aide de l'étude d'instruments conçus au XVII^{e} siècle.

Faire de la géométrie avec Léonard de Vinci

Cette partie rend compte du travail du groupe “Liaison CM2-6e par l’histoire des mathématiques” de l’IREM de Limoges[3] composé de Chantal Fourest, Jérôme Dufour, Véronique Lefranc, Marc Moyon, Valérie Rosier-David et David Somdecoste.

Objectifs d’enseignement

Notre travail intègre l’enseignement de la géométrie plane, envisagé à partir de problèmes de reproduction de figures.

> *La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes.* (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 2, Mathématiques, p. 83)

En outre, notre approche s’appuie sur les recherches didactiques de Marie-Jeanne Perrin et de son équipe[4]. En particulier, dans leur travail sur la continuité de l’enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans, il est écrit que :

> *Faire de la géométrie demande de porter un regard spécifique sur les figures (...) :*
> *- il faut être capable de passer d’une vision de figures juxtaposées à des figures superposées (et réciproquement), en ajoutant, effaçant des lignes,...*
> *- Il faut être capable de voir des objets de plusieurs dimensions dans les figures : des surfaces, des lignes, des points et des relations entre eux (...).* (Perrin et *al.* 2013, 17)

Comprendre qu’un point est l’intersection de deux lignes (non nécessairement droites) est un enjeu du cycle 3. Il faut donc mettre en place des situations-problèmes riches qui amènent progressivement les élèves à chercher des lignes qui, à leur tour, permettent de construire des points. Par exemple, les élèves doivent voir un sommet d’un quadrilatère comme l’intersection de deux côtés et pas seulement comme un coin de la figure (le polygone étant alors envisagé uniquement comme une surface). En effet, si un élève reste dans une géométrie des formes, il sera incapable de créer de nouvelles lignes pour obtenir des points (extrémités ou intersections de lignes) ou pour établir, par exemple, des relations d’alignement.

La figure à reproduire est alors envisagée comme un support de recherche des relations géométriques qu’on peut construire. Elle permet d’expérimenter ce qu’on peut tracer et ce qui manque. L’observation de cette figure est une phase indispensable d’analyse, c’est-à-dire de recherche de conditions nécessaires, du problème.

Les élèves sont donc amenés à créer des points par intersection de deux lignes, points qui à leur tour définissent des lignes. Deux points caractérisent un segment mais aussi un cercle (le centre et un point du cercle). Deux points peuvent aussi déterminer une demi-droite ou une droite.

Pour travailler la reproduction de figures, nous avons choisi de décrypter certaines figures du *codex atlanticus* – compilation de plusieurs carnets de croquis – de Léonard de Vinci, célèbre artiste de la

---

[3] Nous tenons à remercier particulièrement Sylvie Marceau, IEN de Brive Centre, d’avoir rendu possible notre travail au sein de sa circonscription, notamment en facilitant le remplacement des professeurs des écoles.

[4] Citons, entre autres, (Duval et al. 2005), (Keskessa et *al.* 2007), (Offre et *al.* 2006) et (Perrin et *al.* 2013). Il sera encore utile de lire la contribution de Marie-Jeanne Perrin « Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas » dans les présents actes du colloque de Poitiers.

Renaissance que les élèves de cycle 3 connaissent relativement bien. Avant de détailler pédagogiquement notre travail, donnons quelques éléments historiques sur Léonard et son *codex*.

Léonard de Vinci et le *codex atlanticus*

Léonardo naît à Vinci, petite ville de Toscane en Italie. C'est un autodidacte qui se forme à partir des livres de sa bibliothèque personnelle, ou au contact d'érudits contemporains. Apprenti d'Andrea de Verrochio, à Florence, il est officiellement membre de la guilde des peintres de Florence vers 20 ans. C'est aussi à Florence qu'il invente ses premières machines. Une dizaine d'années plus tard, en 1482, il se présente comme artiste et ingénieur à Milan où le Duc de la ville, Ludovico Sforza, va le protéger au sein de sa cour. À Milan, en plus de ses travaux en peinture, il étudie la musique ou encore la transformation du mouvement afin de mettre au point des machines et autres automates pour animer les fêtes du prince. En 1490, il est entièrement reconnu à Milan comme artiste éclectique. C'est aussi à ce moment-là qu'il commence à s'intéresser aux mathématiques. En effet, c'est à Milan, en 1496, qu'il rencontre Fra Luca Pacioli (vers 1445-1514), important mathématicien à qui l'on doit au moins deux ouvrages abordant les principaux domaines des mathématiques de son époque. En 1499, la ville de Milan est occupée par les français et Léonard quitte la ville avec son ami. Il parcourt la Toscane et la Romagne en tant qu'ingénieur militaire pour Cesare Borgia, son nouveau mécène. Quelques années après, vers 1506, il arrive à la cour française de Milan, gouvernée par Charles d'Amboise qui admire son travail. Toute liberté lui est offerte pour ses propres travaux : c'est à cette époque qu'il précise, entre autres, son projet « Mona Lisa » qu'il n'achèvera que bien des années plus tard. Lorsqu'en 1511, les Français sont chassés de Milan, Léonard quitte à nouveau la ville pour se réfugier dans d'autres villes. Entre autres, à partir de 1513, il est accueilli à Rome par le pape Léon X qui lui offre sa protection. En 1515, les troupes françaises, menées par François Ier, capturent à nouveau Milan. Et dès 1516, Léonard vient s'installer à Amboise (en France) sur invitation du jeune roi. Même affaibli par une paralysie du bras droit, il continue son travail de création. Il meurt à Cloux en 1519.

Léonard est un homme de tous les arts et de toutes les sciences. Il peint, il sculpte, il invente des machines. Toutes ses œuvres, réalisées ou pas, reposent sur une observation attentive, minutieuse de l'homme, de la faune, de la flore et des propriétés de la nature en général. L'artiste laisse de nombreuses notes et dessins qui sont rassemblés dans plusieurs ensembles qu'on appelle *codex* (ou *codices* au pluriel).

Le *codex atlanticus* est un de ces ensembles. Il s'agit d'une compilation réalisée à titre posthume : plus de mille feuillets en 12 volumes. Il est aujourd'hui conservé à la grande bibliothèque Ambrosienne de Milan. On lui attribua le nom de *codex atlanticus* à cause de son grand format (64,5 × 43,5 cm) rappelant celui des atlas. Il couvre une très longue période de la vie de Léonard (de 1478 et 1519). Il illustre ainsi tout son génie : machines volantes, engins de guerre, instruments de musique, astronomie, géographie, botanique, architecture, anatomie, notes autobiographiques et considérations philosophiques. C'est à l'intérieur de ce *codex* que notre groupe a trouvé l'inspiration pour mettre en place des activités autour de la reproduction de figures planes. Nous avons exploité plusieurs figures correspondant à plusieurs feuillets[5]. Nous montrons ici le seul feuillet 1040 (recto), intitulé « quadrature du cercle ». En effet, Léonard était préoccupé par cette

[5] Nous développons ailleurs l'utilisation d'autres figures pour le cycle 3. Voir notamment, Marc Moyon, « La géométrie des carnets de Léonard de Vinci », (à paraître).

question antique de la construction, à la règle et au compas, d'un carré d'aire égale à celle d'un disque donné.

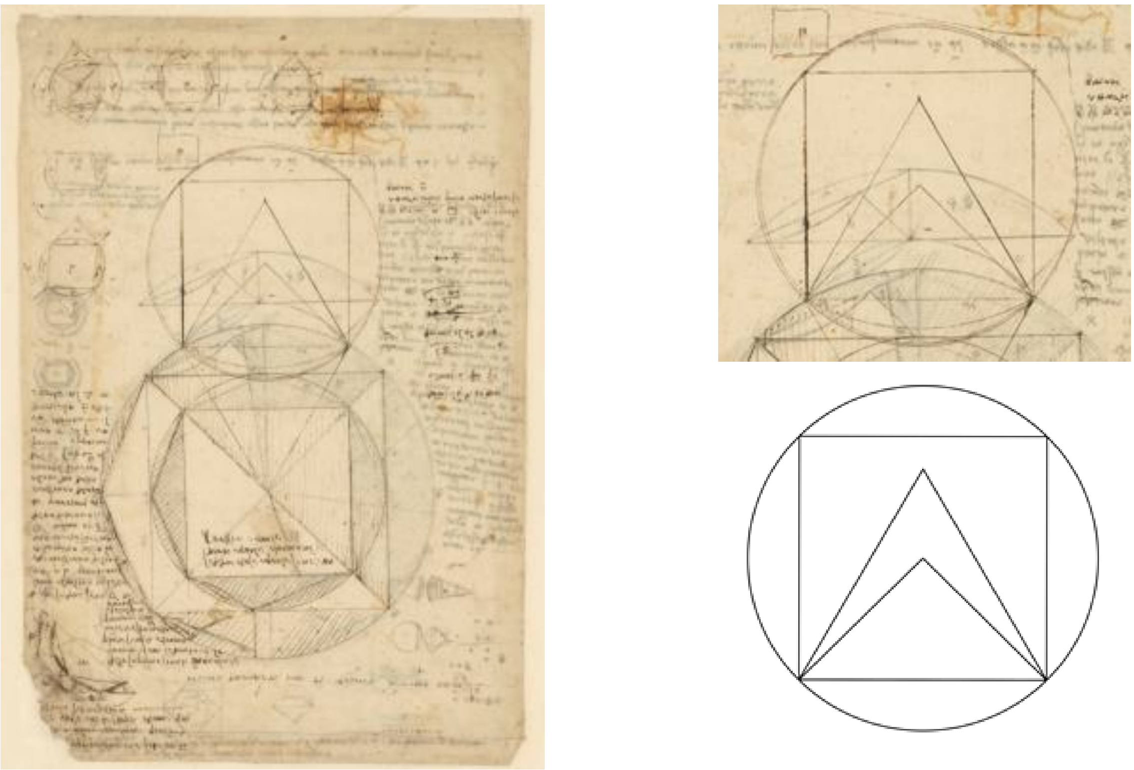


Figure 1 : *codex atlanticus*, fol. 1040 (recto)[6].

Mise en œuvre de la séquence

Nous avons mis en place une séquence de deux séances en CM1/CM2 et en 6e. Pour plus de détails sur la différence des mises en place et des consignes entre les CM1/CM2 et les 6e, on peut utilement consulter le classeur *canoprof* préparé par David Somdecoste et Chantal Fourest[7]. Nous donnons ici les grandes lignes des séances et les éléments d'analyse. Les deux séances ont permis de mettre en place plusieurs phases distinctes de l'observation, la réalisation, la confrontation à la rédaction d'un programme de construction.

Le temps d'observation est envisagé collectivement en CM1/CM2. Il a pour objectif de repérer, à partir de la projection de la figure 2 (tableau numérique ou simple tableau à craies/feutres), toutes les figures élémentaires qui constituent la figure complexe. Le débat oral collectif permet d'établir le tableau 1 qui servira aussi de synthèse à l'activité.

Figure	**Définition ou Propriété**	**Outils**
Cercle	- Centre - Rayon	Compas
Carré	- Longueur de côtés - Angles droits	Règle + équerre
Triangle équilatéral	3 côtés de même longueur	Règle + Compas
Triangle isocèle	2 côtés de même longueur	Règle + Compas

Tableau 1

[6] Image disponible pour un usage pédagogique sur http://www.gettyimages.fr/detail/photo/squaring-of-curved-surfaces-from-atlantic-codex-by-Léonardo-da-photo/120856796

[7] https://david-somdecoste.canoprof.fr/eleve/Irem%20Poitiers%20juin%202017/Séquence%20n°1%20Léonard%202017/index.xhtml

Il est aussi possible de distribuer à chaque élève la figure de Léonard. Cependant, si les élèves ont cette figure à leur disposition, ils sont amenés à mettre en place des stratégies où la mesure domine, et non plus les positions relatives des droites et les alignements de points. Étant donné notre objectif, nous pensons qu'il est préférable d'imposer une règle non graduée. Les reports de longueurs (pour les côtés du triangle) se font alors au compas : c'est là une utilisation experte du compas qui est explicitement visée au cycle 3[8].

Figure 2 : Utilisation de la mesure (règle graduée).

En 6e, la phase d'observation se fait individuellement, au sein du groupe de travail, avec une figure originale par élève. Il s'agit d'une observation « avec intention », c'est-à-dire qu'elle doit permettre de faire ressortir les figures élémentaires mais aussi les relations entre elles, avec les propriétés d'alignement et de la recherche des points d'intersection.

L'observation est essentielle tout au long du cycle 3 car c'est elle qui donne à l'élève tous les éléments pour reproduire une figure et qui lui permet, peu à peu, d'évoluer d'une géométrie des figures à la géométrie du point (Perrin et al. 2013).

Une fois le problème clairement défini, les élèves sont amenés à réaliser les constructions nécessaires sur papier blanc (feuille A4). Les élèves comprennent vite que l'ordre des étapes de construction des différentes figures élémentaires a des conséquences. En effet, si l'on débute par le cercle – attitude majoritaire car le cercle est la figure englobante –, il faut alors tracer un carré inscrit dans ce cercle. Les 6e en sont capables en passant par deux diamètres perpendiculaires ; ils correspondent alors aux deux diagonales du carré. Pour les élèves de CM1/CM2, c'est difficile (voire impossible) car peu d'entre eux connaissent la propriété des diagonales d'un carré[9]. Après quelques essais où le carré n'est jamais carré (*cf*. figure 4 : le cercle n'est clairement pas circonscrit au carré (tracé avec peu de précision), mais l'élève a tracé quatre arcs de cercles dont chacun a deux sommets du carré pour extrémités), les élèves comprennent qu'il est préférable de débuter par le carré, et tracer ensuite son cercle circonscrit.

[8] « Le report de longueurs sur une droite déjà tracée avec le compas peut être abordé au CE2 mais il relève surtout du cycle 3. » (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 2, Mathématiques, p. 86)

[9] Pour éviter cette difficulté, on peut aussi choisir, pour certains élèves, de mettre en place une activité de « restauration de figures » en donnant, sur feuille blanche, le carré ou deux côtés de celui-ci. Il s'agit alors de compléter la figure (Perrin et *al.* 2013, 26 et suivantes).

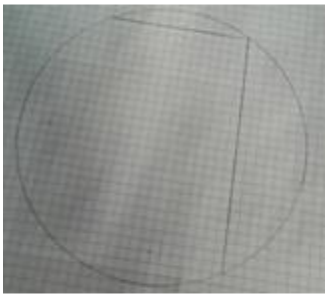


Figure 3 : Tracé difficile d'un carré inscrit dans un cercle.

Les élèves qui sont en difficulté pour tracer un carré sur papier blanc se voient proposer un papier quadrillé (petits carreaux). Les instruments autorisés sont la règle, l'équerre et le compas.

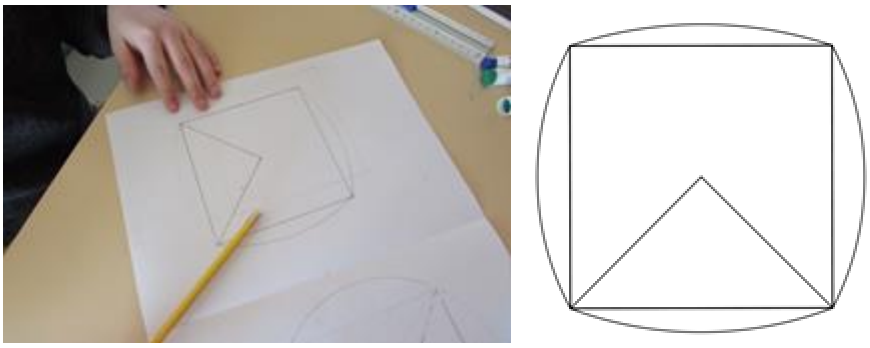


Figure 4 : Exemple de construction où les relations entre les figures ne sont pas respectées.

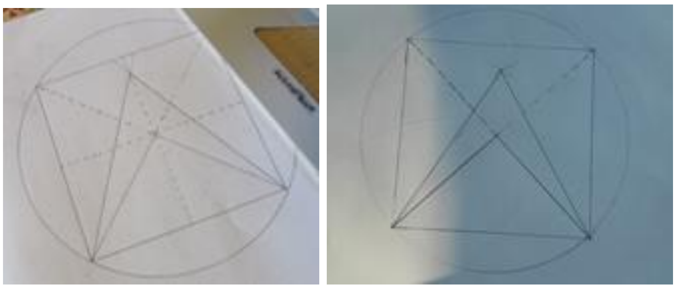


Figure 5 : Exemples de figures où les relations – alignements, milieux et centre – sont indiquées.

Pour réussir à rédiger un programme de construction de cette figure complexe, nous sommes passés par une narration de construction. Les élèves doivent alors rédiger un texte décrivant les différentes étapes de leur construction. Voici trois exemples de narration des élèves de 6^{e} :

> *Tout d'abord, j'ai tracé un carré de 4cm. Ensuite, tracé un triangle isocèle et un triangle équilatéral, qui eux sont tracés dans le carré. Puis, tracé un cercle qui a pour centre le sommet du triangle équilatéral.*
>
> *Tracer un carré de 5 cm de côté. Tracer les diagonales du carré. Puis tracer le cercle passant par les sommets du carré. Tracer un triangle équilatéral dont la base est le côté du carré. Ensuite, faites la même chose mais cette fois pour un triangle isocèle.*
>
> *Tout d'abord, j'ai tracé un carré. Ensuite, j'ai tracé les deux diagonales du carré pour trouver son centre. Ce centre sera le sommet du triangle rectangle qui aura les deux autres sommets du carré pour sommets. Et tracer un autre triangle mais équilatéral pour sommets les deux mêmes que ce que l'on avait utilisé pour le triangle rectangle. Enfin, tracer un cercle de rayon le milieu du carré et le sommet du carré.*

Cette étape a été réalisée à l'oral, en collectif, en CM2. À tous les niveaux, les élèves ont bien respecté la chronologie avec l'utilisation de connecteurs de temps. Ils ont en général utilisé le bon vocabulaire. On note néanmoins la confusion entre « milieu » et « centre » ou encore entre « milieu » et « moitié ». Aussi, beaucoup d'élèves se sont trouvés gênés pour rédiger leur texte sans avoir particularisé deux sommets du carré. Nommer certains points de la figure est alors fort utile, sinon indispensable.

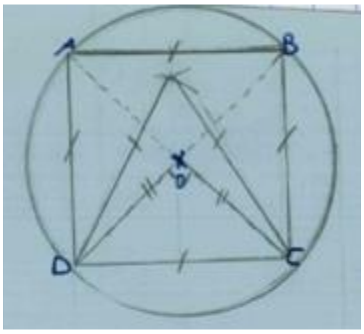


Figure 6 : Figure finale avec le nom de certains points utiles à la rédaction du programme de construction.

Voici, enfin, le programme de construction établi collégialement avec les CM2 et testé dans d'autres classes (CM1, CM2 et 6[e]). Les figures obtenues sont enfin comparées avec la figure originale de Léonard de Vinci pour validation.

> *Tracer un carré ABCD. Tracer les diagonales du carré. Elles se coupent en O. Tracer le cercle de centre O et passant par les points A, B, C et D. Tracer le triangle DOC. Tracer le triangle équilatéral de base DC, à l'intérieur du carré.*

En conclusion, la seule figure du feuillet 1040 (recto) du *Codex atlanticus* de Léonard de Vinci présente divers intérêts pour l'enseignement de la géométrie tout au long du cycle 3, ou en liaison CM2/6[e]. D'une part, elle ancre les savoirs mathématiques dans la pratique d'un célèbre polymathe et favorise l'interdisciplinarité. En outre, elle permet une approche de l'enseignement de la géométrie par la résolution de problèmes avec des éléments de différenciation faciles à mettre en place dans les classes. Pourquoi s'en priver ?

Doubler le carré avec Platon

Cette partie rend compte du travail du groupe de l'IREM de Paris, composé de Renaud Chorlay, Alexis Gautreau et Dominique Heguiaphal.

Objectifs d'enseignement

Nous proposons dans cette partie une séquence de trois séances, conçue et expérimentée en CM2 et en 6[e], à partir d'un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques. Dans le dialogue intitulé *Ménon*, Platon (env. 427 – 348 avant notre ère) écrit un échange entre trois personnages, le philosophe Socrate, un noble athénien nommé Ménon, et un esclave au service de Ménon. Socrate part d'un carré (A) et demande à l'esclave de tracer un carré d'aire double. L'esclave trouve la question facile, et propose de doubler le côté du carré (état (B)). Socrate lui montre que cette solution est fausse : la figure (B) est bien un carré, mais son aire est quadruple de celle du carré (A), comme le montre la figure (C). Socrate relie alors quatre points de la figure (C), et affirme que le carré qui apparaît est – lui – double en aire du carré initial. Il le justifie en dénombrant dans les deux figures (A) et (D) les triangles rectangles isocèles que sont les demi-carrés : deux dans le carré (A), quatre dans le carré (penché) au centre de (D).

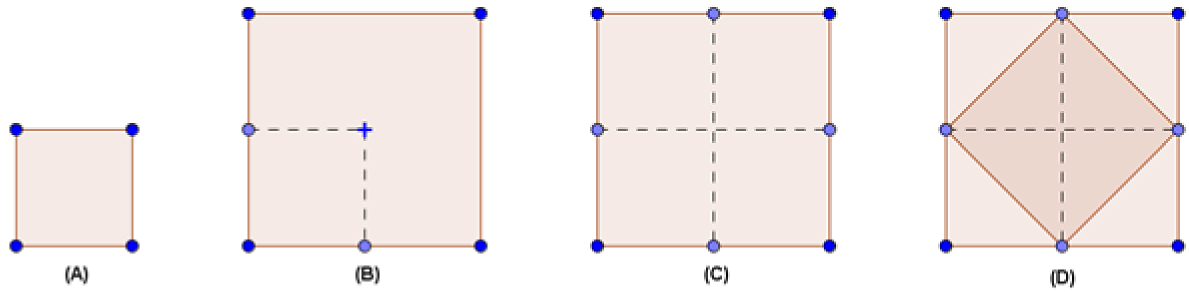


Figure 7 : Les figures successives du dialogue platonicien.

On voit que le problème porte sur des notions et des thèmes de travail fondamentaux au cycle 3 : utilisation d'un vocabulaire précis pour décrire des figures géométriques assez complexes ; caractérisation des quadrilatères usuels (en particulier, pour vérifier que le quadrilatère « penché » est bien un carré) ; comparaison d'aires, soit sans mesures – par découpage et recollement – soit en mesurant, tantôt avec des unités conventionnelles (ici le pied) tantôt avec des unités choisies en fonction de la situation (ici le demi-carré (A)). En outre, l'erreur de l'esclave permet de travailler sur deux obstacles épistémologiques : difficulté à distinguer dans une même figure plane deux grandeurs différentes (la longueur du contour, l'aire de la surface) ; non proportionnalité des longueurs et des aires dans les situations d'agrandissement/réduction.

Notre parti-pris dans la construction de séquence a été de faire travailler les élèves non seulement sur le *problème* du *Ménon* – doubler (en aire) un carré donné – mais sur le *texte* du *Ménon* (Platon 1967). Notre motivation était double.

Premièrement, cela nous semblait favoriser l'entrée dans le travail d'argumentation en géométrie, dans un contexte où l'on ne vise pas de « démonstration » au sens que ce terme prendra au cycle 4 : d'une part le texte est un texte de nature *argumentative* ; il présente des échanges d'arguments – entre Socrate et l'esclave – à propos de figures et de grandeurs. D'autre part, le travail confié aux élèves va consister non seulement à chercher la réponse au problème posé, mais aussi à s'approprier et évaluer les arguments échangés dans le texte.

La séquence que nous proposons n'est pas conçue comme une situation visant la découverte ou la première rencontre avec les notions en jeu, du moins pour ce qui est de la caractérisation instrumentée du carré, et de la comparaison d'aires avec ou sans mesures. Au contraire, la situation met régulièrement l'élève en situation d'*expert* devant s'appuyer sur la connaissance de ces notions non seulement pour chercher à résoudre un problème géométrique, mais aussi pour *reformuler* – voire critiquer – des formulations parfois éloignées des nôtres, ainsi que pour *évaluer* la qualité d'arguments proposés dans le texte.

Le lecteur pourra être surpris de ne pas voir dans notre séquence de travail *numérique* sur le côté du carré cherché. Cette approche a déjà fait l'objet de publications (Kosyvas & Baralis 2010).

Choisir de faire travailler les élèves sur le *texte* du *Ménon* c'est choisir de se confronter, en tant qu'enseignant, à cette difficulté du texte. Il ne s'agit pas là d'un caprice de notre part. Nous y sommes incités aussi bien par les programmes de Français que par les travaux de didactique du Français ; par ceux, en particulier, portant sur la compréhension de texte.

Nous avons cherché à concevoir la séquence en nous appuyant sur l'analyse des enjeux cognitifs et didactiques de la compréhension de texte tels qu'ils sont décrits par l'équipe des rédacteurs des manuels *Lector & Lectrix* (Cèbe & Goigoux 2009). Ils rappellent que « comprendre un texte » englobe plusieurs familles de savoir-faire : décodage du code écrit (le sens usuel de « savoir lire »), mise en œuvre de compétences linguistiques et textuelles (syntaxe, lexique, ponctuation, connecteurs etc.), de compétences référentielles (ici le texte porte – en grande partie – *sur* des objets mathématiques), enfin, de compétences stratégiques (régulation, contrôle et évaluation, par l'élève, de son activité de lecture). Cèbe et Goigoux soulignent :

> *S'il veut comprendre un texte, le lecteur doit mobiliser simultanément toutes ces compétences pour opérer deux grands types de traitement : des traitements locaux – qui lui permettent d'accéder à la signification des groupes de mots et des phrases – et des traitements plus globaux qui l'amènent à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble. (...) Ce dernier processus, appelé intégration sémantique, est cyclique : chaque ensemble d'informations nouvelles amène le lecteur à réorganiser la représentation qu'il construit pas à pas (...) Cela suppose qu'il soit suffisamment flexible pour accepter que ses premières représentations soient provisoires donc révisables*. (Cèbe & Goigoux 2009, 7)

La combinaison des difficultés relevant des mathématiques et de la compréhension de texte peut effrayer. Il nous appartient de prouver que nous avons été ambitieux mais pas téméraires. La séquence a été conçue par des enseignants expérimentés : Dominique Héguiaphal (CM2), Alexis Gautreau (6^e^), Renaud Chorlay (formateur ESPE). Elle a été mise en œuvre en CM2 et en 6^e^ dans des classes « ordinaires » du 13^e^ arrondissement de Paris, au printemps 2017. Elle prend trois séances. Nous donnerons dans la suite quelques éléments sur le déroulement effectif dans les deux classes, en nous appuyant sur les traces écrites de recherche des élèves et les transcriptions des enregistrements audio des séances.

Mise en œuvre de la séquence

Il nous a semblé que le texte (Platon 1976, 344-352) pouvait assez naturellement être partagé en trois parties, chacune donnant lieu à une séance de travail d'environ une heure.

1re séance : présentation du contexte. Découverte du texte. Travail sur les unités de longueur et d'aire.

2e séance : découverte du problème de duplication. Comparaison des réponses des élèves et de celle de l'esclave. Invalidation de la réponse par doublement du côté.

3e séance : découverte de la réponse de Socrate. Validation ou invalidation par les élèves de cette réponse. Bilan sur la construction générale du texte et son sens philosophique.

Il ne saurait être ici question de présenter le déroulé des trois séances. Nous préférons illustrer deux moments particuliers, faisant ainsi deux « gros plans ».

Gros plan n° 1.

Dans le texte de Platon, Socrate parle d'un carré de « deux pieds de côté », et fait observer à l'esclave que l'« espace » du carré est de « quatre pieds ». Nous demandons aux élèves (en binômes) :

La phrase « L'espace est donc deux fois deux pieds » (20) est très importante. Prenez quelques minutes pour réfléchir, et préparer par écrit vos réponses aux deux questions:

- Pouvez-vous expliquer de quoi parle Socrate ?
- Êtes-vous d'accord avec lui ?

Vous pouvez faire des phrases, ou bien des figures à main levée ; vous pouvez colorier ; tout est autorisé.

Le déroulement dans les classes montre que les élèves identifient bien le fait que l'on parle de l'aire du carré. Nous reproduisons des extraits de trois copies de CM2 (Figure 8). La copie n° 1 est représentative de la réponse majoritaire ; beaucoup d'élèves, plus laconiques, valident par « oui, car 2×2 = 4 ». La copie n° 2 montre même un cas de représentation permettant d'accommoder l'ambiguïté du texte : les pieds dessinés désignent à la fois les longueurs (par leur côté le plus long) et – vraisemblablement – les pieds d'aire (par la partie de la surface sur laquelle ils sont dessinés). La copie n°3 montre un cas, rare, où l'élève rappelle le rôle du carré pour désigner l'unité d'aire. On voit que le bilan collectif est nécessaire pour montrer le caractère problématique de l'usage par Socrate d'un même terme pour désigner l'unité de longueur et l'unité d'aire associée. L'introduction du terme « pied carré » pour l'unité d'aire ne choque pas les élèves ; elle peut être proposée par certains. On peut aussi choisir de distinguer les « pieds de long » et les « pieds d'aire ».

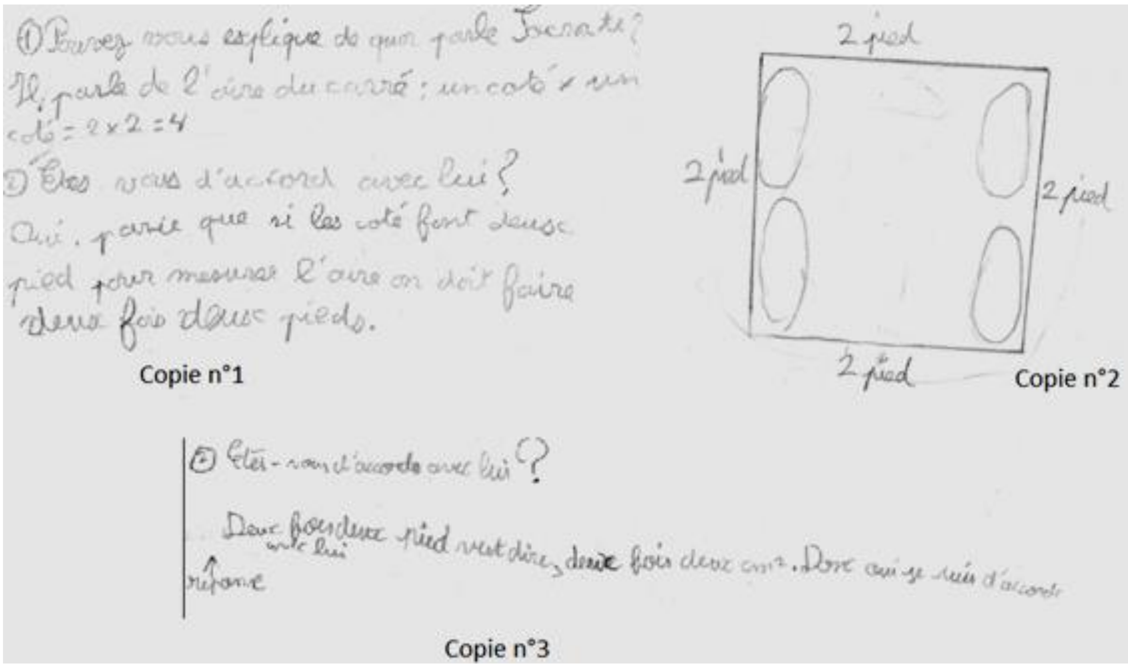


Figure 8 : Une aire de « quatre pieds » : qu'en pensent les élèves ?

Gros plan n° 2.

En début de séance n° 3, nous demandons aux élèves de rappeler quel est le problème posé à l'esclave. Après avoir présenté la solution de Socrate (mais pas sa justification), on convient avec la classe qu'il y a deux points à contrôler :

- Le quadrilatère « penché » qui apparaît au centre de la figure 1. (D) est-il bien un carré ?
- Si oui, ce carré est-il d'aire double de celle du carré initial ?

La première question n'a globalement pas posé problème aux élèves. La deuxième question était plus ouverte, et l'analyse *a priori* avait permis de déterminer une grande variété de procédures correctes pouvant être proposées et mises en œuvre par des élèves de CM2 et 6e. Nous avons mis en place un système de commande de « boîtes à outils » pour favoriser la variété des procédures.

Nous avons été surpris par deux points. Premièrement le peu de recours au cadre numérique : on pouvait imaginer que les élèves mesurent à la règle le côté du nouveau carré et appliquent – en calcul posé ou à la calculatrice – la formule de l'aire du carré. Deuxièmement, par la variété et la qualité des procédures ne passant pas par les longueurs. Nous donnons en figure 3 un échantillon des copies. Dans les deux copies du haut les élèves pouvaient découper, s'engageant ainsi dans des démarches non-numériques. Dans les deux du bas, aucun instrument n'était disponible ; on notera les choix différents d'unité d'aire entre les deux copies.

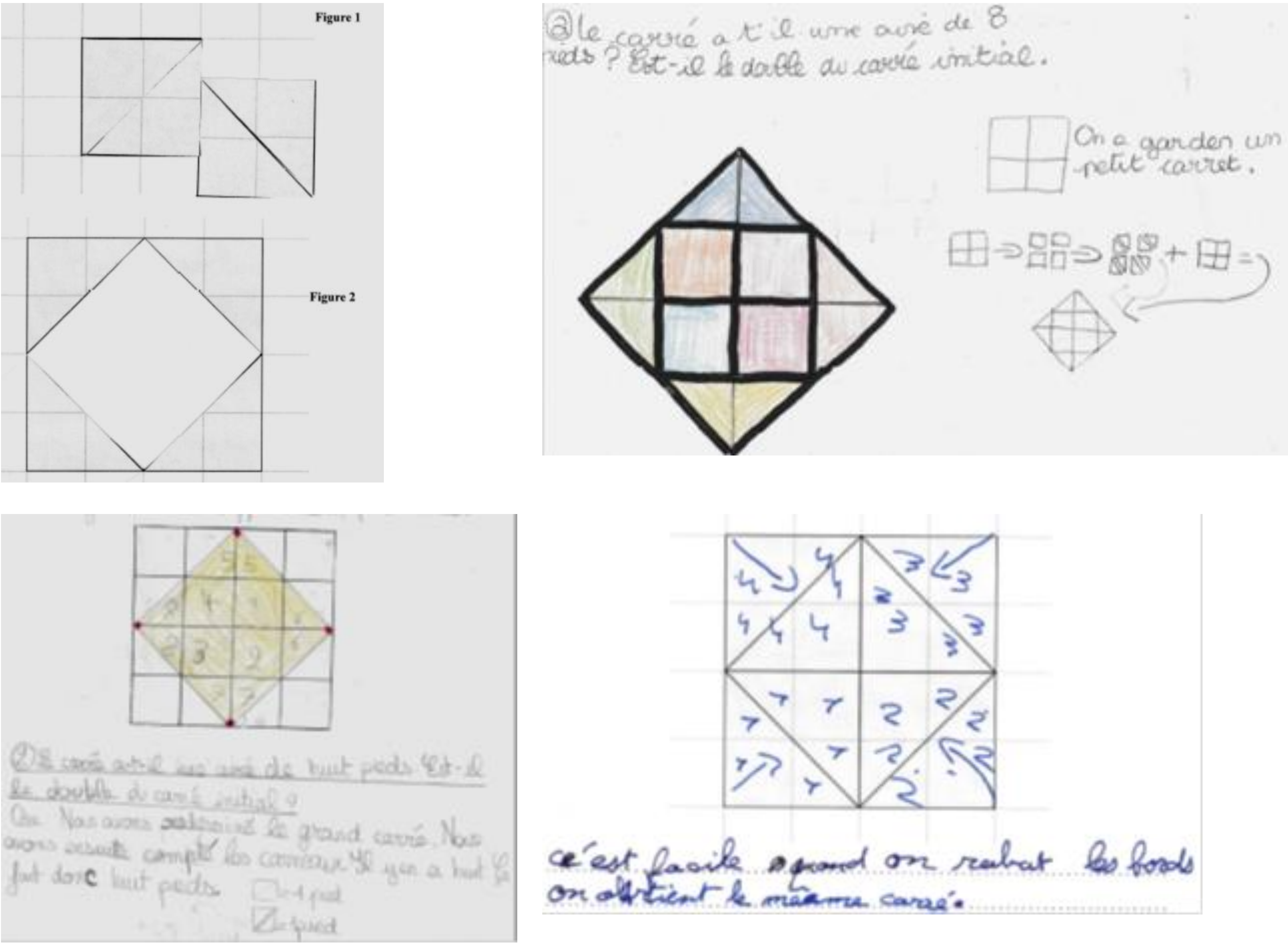


Figure 9 : Plusieurs justifications de la solution de Socrate.

Le compte rendu complet de cette expérimentation indiquera des prolongements possibles dans deux directions. D'une part, la version « maximaliste » testée en 2017, qui repose de manière essentielle sur la lecture de la source historique, contribue à la réflexion sur la compréhension de textes complexes – y compris scientifiques – et sur la pertinence d'outils venant de la didactique du Français. L'aspect exploratoire de cette première expérimentation permet, d'autre part, d'indiquer les contours d'une séquence plus resserrée, plus simple à mettre en œuvre sans toutefois sacrifier les objectifs fondamentaux relatifs aux notions mathématiques en jeu et à l'argumentation.

Différents aspects de la mécanisation du calcul

Cette partie rend compte des travaux du groupe de recherche de l'IREM de Brest « Instruments dans l'histoire et dans la classe ». Ont participé aux travaux de ce groupe entre février et juin 2017, Véronique Fustec, Yohan Lefèbvre, Yann Le Thénaff du collège Saint-Pol-Roux à Brest, Murielle Geslin de l'école du Champ-de-foire à Plougastel Daoulas, Marc Le Pors de la circonscription de Brest Ville et Frédérique Plantevin.

Le travail présenté porte sur la numération et le calcul des opérations, de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division des entiers naturels, par le biais d'instruments mécaniques qui les ont partiellement automatisées. Nous commençons par présenter les machines utilisées en les situant dans leur contexte historique. Les objectifs mathématiques que l'on peut poursuivre au cycle 3 autour de ces machines sont ensuite exposés. Du fait de la nature interdisciplinaire des objets étudiés et de la démarche suivie pour les utiliser, les activités peuvent permettre d'atteindre également des objectifs en technologie et en histoire ; ce point est explicité. La présentation de l'expérimentation et quelques éléments d'analyse de deux étapes de la séquence concluent notre exposé.

Instruments de calcul utilisés, contexte et fonctionnement

La mécanisation des quatre opérations arithmétiques commence au tout début du XVII^{e} siècle avec les inventions indépendantes de W. Schickard et B. Pascal. Leurs machines réalisent toutes deux les additions de nombres entiers avec un report automatique de la retenue. Elles reposent sur une représentation nouvelle des nombres entiers, par des roues graduées convenablement engrenées. À chaque ordre correspond une roue à dix dents[10], qui fait tourner celle de l'ordre suivant - placée à sa gauche – après un tour complet. La machine de Pascal, que l'on a appelée plus tard la Pascaline, a été le point de départ de très nombreuses tentatives pour améliorer le calcul automatique de l'addition et de la soustraction d'une part et d'autre part, pour permettre celui de la multiplication (Cargou et al 2012) et de la division[11]. Les deux machines avec lesquelles nous avons travaillé représentent un aboutissement dans ces deux directions, presque trois siècles plus tard. Il s'agit d'une additionneuse à roues appelée *Lightning calculator* (figure 10) construite dans le Michigan (USA) autour de 1930 selon un brevet[12] de 1926 et de plusieurs *multiplicatrices de type Odhner* fabriquées entre 1900 et 1960 selon un brevet original déposé en Suède en 1878, et en France[13] en 1892.

Figure 10 : Additionneuse *Lightning calculator*. (Crédit photo F. Plantevin)

[10] Pour la machine de Pascal, il serait plus juste de parler de tiges.

[11] L'invention de Schickard devance celle de Pascal d'une vingtaine d'année mais n'a certainement pas pu jouer le même rôle que cette dernière dans les progrès techniques car le seul exemplaire qui en a été construit a disparu dans un incendie et son existence a été oubliée jusqu'au XX^{e} siècle.

[12] Brevet US 1,574,249 déposé par R.W. Hook ; on peut l'obtenir par une recherche simple sur la toile à partir du numéro de brevet (patent) ; un exemple de site dédié à cette machine est indiqué dans la sitographie ; le brevet était fourni pendant l'atelier et est accessible sur l'espace dédié du site du colloque.

[13] Brevet pour la France de quinze années n° 225.162 déposé par W.T.Odhner.

L'additionneuse à roues *Lightning calculator* est une machine de bureau, compacte et assez ergonomique, peu chère, qui a été fabriquée jusqu'en 1960. D'apparence simple, sa sophistication tient à la compacité de ses mécanismes (que l'on peut observer dans le brevet), enfermés dans un boîtier d'un demi-centimètre d'épaisseur et à leur fiabilité. Les modèles ultérieurs permettront également de réaliser les soustractions, ce qui n'est pas le cas de celle-ci. Pour réaliser une addition, l'opérateur entre les chiffres de chaque opérande au moyen du stylet. Pour entrer 40, le stylet est inséré dans la deuxième roue en partant de la droite, en face de la graduation 4 et amené contre la butée - en face du 0 du cadran, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre tout en maintenant le contact avec la roue. Le chiffre 4 apparaît dans la fenêtre correspondant à cette roue. Tous les chiffres des deux opérandes sont entrés successivement, le résultat est lu dans les fenêtres.

Figure 11 : Multiplicatrice Original Odhner. (Crédit photo F. Plantevin)

Les *multiplicatrices de type Odhner* (c'est-à-dire les machines originales et tous leurs clones construits selon le même principe à l'extinction du brevet) réalisent la multiplication par additions répétées. La machine d'Odhner n'est ni la première machine à le faire, ni même la première à être fabriquée industriellement, mais c'est celle qui a été la plus produite et la plus répandue et ce, jusque dans les années 1970. Les multiplicatrices sont en fait des additionneuses mais rendues efficaces par l'ajout de deux pièces : l'entraîneur et le chariot. L'entraîneur permet d'actionner toutes les roues en même temps et donc de mener l'addition de tous les chiffres des deux opérandes en même temps ; le chariot permet de multiplier par dix par un simple décalage de la partie d'inscription de la machine par rapport à celle qui porte les résultats (appelée totalisateur). Ces deux améliorations essentielles sont dues à G.W. Leibniz dès la fin du XVII^{e} siècle (Leibniz 1710). L'entraîneur de Leibniz utilise un cylindre portant des cannelures inégales en longueur (figure 12). Ce cylindre coulisse sur son axe en fonction du choix de l'inscripteur. La rotation d'une roue dentée, en liaison avec le totalisateur, engrenée sur ce cylindre dépend donc directement de sa position sur celui-ci et donc du chiffre entré sur l'inscripteur. Deux autres types d'entraîneur seront inventés ensuite, dont celui de Odhner, dit à nombre variable de dents. Dans ses machines, l'inscripteur entraîne une came qui fait ressortir un nombre variable de dents sur une roue. La rotation de cette roue actionnée par l'opérateur n'entraînera le mécanisme que pour le nombre de dents sélectionnées par la position de l'inscripteur. On peut voir les dents des dix entraîneurs Odhner – un par ordre – de l'écorchée de la figure 12.

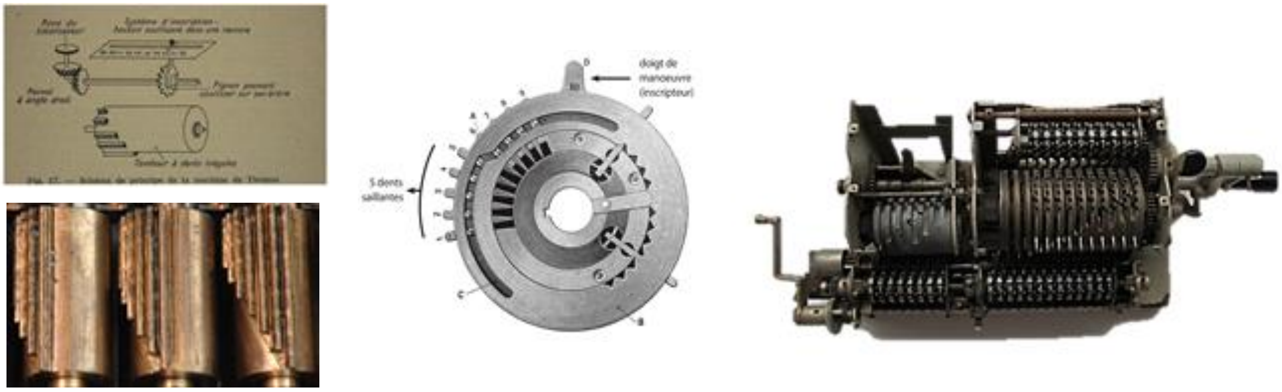


Figure 12 : Schéma de fonctionnement de l'entraîneur de Leibniz et photo de trois cylindres à dents cannelées – Schéma explicatif d'un entraîneur Odhner – Multiplicatrice Odhner écorchée. (Images extraites des panneaux de l'exposition « Multipliez »).

Ainsi, pour réaliser une multiplication avec ces machines, il faut inscrire les chiffres du premier nombre et tourner la manivelle un nombre de fois égal au chiffre des unités du multiplicateur, puis décaler le chariot d'un cran vers la droite et tourner la manivelle un nombre de fois égal au chiffre des dizaines du multiplicateur, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des chiffres. Le résultat se lit directement dans les fenêtres du totalisateur.

Cette famille d'instruments permet d'aborder une grande variété de questions dans de nombreux champs. Lors des ateliers de l'exposition « Multipliez »[14], nous avons pu constater l'intérêt d'un tel travail avec les élèves des classes d'école, de collège et de lycée (Le Brusq & Plantevin 2012). Cela nous a permis de dégager les premières idées d'exploitation en classe de mathématiques.

Objectifs mathématiques que l'on peut poursuivre au cycle 3 autour de ces machines

Les objectifs en mathématiques sont multiples. D'une part, retravailler sur la numération grâce à la représentation des nombres que proposent les additionneuses. Pour ce faire, nous pensons utile d'analyser le fonctionnement d'une de ces machines puis d'en construire un prototype afin de permettre aux élèves de s'approprier réellement l'instrument. On peut ainsi faire le lien entre cette représentation et les opérations d'addition puis de soustraction, qui sont donc effectuées par la rotation des roues dans un sens ou dans l'autre, pour peu que l'engrenage permette le transfert automatique de la retenue entre deux ordres. Cette revisite du programme du cycle 2 permet d'une part, de comprendre le principe de la mécanisation de l'addition (problématique technologique) qui repose, comme on vient de le dire, sur des concepts mathématiques, et d'autre part, de travailler sur la représentation et l'addition des grands nombres (en « ajoutant » le nombre de roues nécessaires) et des nombres décimaux (en « ajoutant » un repère physique représentant la virgule à la droite de la roue que l'on désire être celle des unités). On peut également travailler sur l'écriture en ligne des calculs réalisés et par là, sur l'associativité et la commutativité de l'addition.

D'autre part, en s'appuyant sur la première activité, on peut ensuite travailler sur l'automatisation de la multiplication et celle de la division euclidienne. La mise en œuvre de la multiplication par additions répétées par ces machines s'appuie sur l'associativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition tout autant que sur l'écriture en base 10 des nombres puisque pour calculer

$$65 \times 47 = 65 \times (4 \times 10 + 7),$$

[14] L'exposition retrace l'histoire du calcul de la multiplication et en particulier celle de sa mécanisation.

la machine réalise en fait

$$65 \times 47 = 65 \times 10 \times 4 + 65 \times 7 = 650 \times 4 + 65 \times 7 = \underbrace{650 + \cdots 650}_{\text{4 fois}} + \underbrace{65 + \cdots + 65}_{\text{7 fois}}$$

Comprendre l'instrument, c'est être capable d'écrire cela, ce qui en fait un outil intéressant pour le chapitre « Nombres et calculs » du cycle 3.

La multiplication par 10 est réalisée par un décalage physique d'une partie de la machine et les additions répétées successives sont réalisées par autant de tours de manivelles que la somme des chiffres du multiplicateur. Une additionneuse « simple », comme la Pascaline, ferait

$$65 \times 47 = \underbrace{65 + \cdots + 65}_{\text{47 fois}}$$

c'est-à-dire quarante-sept manipulations identiques dont chacune consiste à entrer deux chiffres soit quatre-vingt-quatorze gestes, pendant qu'avec la multiplicatrice, il suffit de onze tours de manivelles, plus deux manipulations pour entrer les deux chiffres de 65, soit treize manipulations. Ce petit calcul de complexité illustre clairement l'évolution des machines à calcul entre additionneuse et multiplicatrice, et permet de rencontrer, dans un cas simple mais pertinent, la notion de complexité, si importante pour caractériser les algorithmes de calculs sur ordinateur.

En ce qui concerne la division, suivons le même raisonnement que pour la multiplication et écrivons en ligne le calcul réalisé par la machine lorsque l'on exécute des soustractions répétées de 15 à 47 par exemple. On obtient,

$$47 - 15 - 15 - 15 = 2, \text{ c'est-à-dire } 47 - 3 \times 15 = 2 \text{ ou encore } 47 = 3 \times 15 + 2.$$

2 est le résultat de l'opération, 3 est le nombre affiché par le compte-tours, la machine sonne lorsque le manipulateur cherche à soustraire 15 à un nombre plus petit : elle permet donc de matérialiser quotient et reste de la division euclidienne et automatise l'arrêt de la division c'est-à-dire contrôle la positivité du reste. Le travail s'enrichit lorsque le dividende est nettement plus grand que le diviseur par l'utilisation du décalage du chariot et débouche très naturellement sur la division décimale par un entier avec un nombre de décimales prescrit au départ.

Objectifs interdisciplinaires en technologie, en histoire

Comprendre comment l'automatisation du calcul se réalise puis la mettre en œuvre, peut être abordé aussi bien en mathématiques qu'en technologie et peut être profitable aux deux matières. Pour cela, il faut que les mathématiques utilisées soient explicitées avec le vocabulaire adéquat et la précision requise, et que dans chaque classe, ce qui, dans l'activité menée en commun ou dans la classe de l'autre mais qui relève de sa discipline soit revu et réinvesti. Regardons de plus près les objectifs possibles pour la technologie puis pour l'histoire.

L'analyse et la description d'objets techniques et la conception de « tout ou partie d'un objet technique pour traduire une solution technologique répondant à un besoin », sont au cœur du thème « Matériaux et objets techniques » de l'enseignement de Sciences et techniques du cycle 3. Elles sont toutes deux traitées par l'activité proposée. L'étude comparée de différents clones de multiplicatrices Odhner, peut permettre d'introduire la notion d'évolution technologique. Elle peut aussi donner l'occasion de présenter aux élèves les brevets des machines utilisées.

L'industrialisation des modes de production est une composante importante de l'histoire de ces machines. C'est X. Thomas de Colmar qui a, le premier, amélioré la machine de Leibniz en matière de fonctionnalité et de fiabilité mais aussi pour qu'elle puisse être fabriquée selon des procédés industriels. Ce travail de mise au point lui a pris trente et une années, entre son premier brevet (1820) et le début de la production industrielle de son arithmomètre (1851). Etudier son parcours et son travail sur ses machines est une illustration pertinente de la Révolution industrielle, qui est au programme d'histoire du CM2. On peut aussi s'intéresser à l'évolution des méthodes de production de certaines des usines de fabrication des clones de machines Odhner au cours du XX^{e} siècle (par exemple Brunsviga, pour laquelle, il est relativement facile de se procurer des ressources variées). Le programme d'histoire en 6e ne peut pas être relié directement à l'activité proposée mais la mise en place de repères historiques chez les élèves est un des objectifs du cycle 3. La séquence peut y contribuer.

Le choix de cette activité, qui mêle mathématiques et technologie, en plus de celui de travailler sur des ressources historiques susceptibles d'impliquer également l'histoire n'est pas seulement le reflet d'une curiosité des membres de ce projet. Nous pensons qu'il est fructueux de développer les aspects concrets des mathématiques pour aider les élèves à mieux les comprendre. Nous avons constaté que certains élèves montrent une sorte d'intuition ou d'intelligence pratique en manipulant et en créant eux-mêmes des objets techniques. Il nous semble que ce talent est un ressort possible pour l'apprentissage des mathématiques reliées et qu'il devrait être encouragé par des activités bien choisies.

L'activité que nous proposons est clairement au croisement de trois disciplines : elle requiert les apports de chaque discipline et construit des connaissances chez les élèves dans chaque discipline, de façon cohérente avec les programmes du cycle. Au collège, et aussi à l'école, si le professeur a choisi de segmenter son enseignement par discipline, la séquence telle qu'elle est conçue devrait se dérouler sur les créneaux de mathématiques et de technologie ; le cas de l'histoire peut être traité différemment pour les raisons déjà mentionnées.

Introduction à l'expérimentation et exemples de mise en œuvre de la séquence

L'expérimentation a été menée dans trois classes de 6^{e} avec de petites variations Ci-dessous, nous présentons les grandes lignes de la séquence et quelques éléments sur deux points plus précis en nous appuyant sur les productions des élèves collectées au cours des expérimentations (films ou enregistrements des discussions des phases de recherche, photographie et film des prototypes réalisés). Ce qui est présenté ici correspond également à ce qui a pu être fait pendant l'atelier, qui ne représente qu'une toute petite partie de ce qui a été fait en classe. Les annexes, qui sont les documents distribués lors de l'atelier, correspondent à une partie des énoncés des séances faites en classe. Elles sont accessibles sur l'espace dédié sur le site du colloque.

La séquence se déroule en deux grandes étapes ; l'une porte sur l'additionneuse et l'autre sur les multiplicatrices. Le déroulé de ces deux étapes est le suivant :

- comprendre comment l'addition des nombres est « automatisée » en étudiant l'additionneuse présentée plus haut (*cf*. Annexe 1, énoncé de cette séance), en conjecturant son fonctionnement interne puis en construisant une additionneuse à roues qui puisse additionner des nombres à trois chiffres (et dont le résultat ne dépasse pas trois chiffres) avec un report automatique de la retenue entre chaque ordre. L'idée de ce prototype s'inspire de la machine à calculer proposée dans l'ancienne revue *Bibliothèque de Travail* (Pellissier 1965). Cette partie se déroule en mathématiques et en technologie avec si possible des moments de co-animation. En mathématiques, la découverte de l'additionneuse et le début de la construction du prototype représentent trois heures de travail. La fin de la construction en technologie peut être menée en deux heures selon la finition et la fonctionnalité que l'on souhaite obtenir.

- découvrir les multiplicatrices, leurs fonctionnalités en réalisant des additions, puis des additions répétées, identifier où l'on peut lire les opérandes ; préciser en quoi elles diffèrent des additionneuses à roues d'un point de vue mathématique/algorithmique (opérations réalisées) et technologique (manière de les réaliser) : mettre en évidence le principe de l'entraîneur et le rôle du chariot (le relier au décalage de la multiplication par un nombre à plus d'un chiffre dans le calcul posé) ; les utiliser pour réaliser des calculs de multiplication de nombres assez grands ; procéder de la même façon pour les soustractions et la division euclidienne. Cette partie s'appuie sur l'énoncé proposé en Annexe 2 (« Travail avec une multiplicatrice »). Il était complété par des questions en direct et un travail sur les brevets (extraits en Annexe 3 et Annexe 4) et des catalogues d'exposition comme celui de l'exposition déjà citée (Cargou et *al*. 2012).

Pour illustrer la mise en œuvre en classe et ce qu'elle peut produire, deux points de la première étape de la séquence sont détaillés ci -dessous.

Découverte de l'additionneuse *Lightning calculator*

Le but de cette séance est d'identifier et de nommer les différentes parties de l'instrument, de débattre et conjecturer un fonctionnement possible après que quelques calculs auront été menés avec cet instrument devant la classe. Un document (Annexe 1) a été mis au point pour guider l'analyse de l'instrument et recueillir les hypothèses quant à son fonctionnement. Il a été utilisé de deux manières différentes dans les classes, dans l'une distribué dès le début de cette séance, dans l'autre après un moment assez long de débat en classe entière. Dans les deux cas, il n'a pas totalement rempli le rôle attendu ; probablement est-il simplement trop long.

Ci-dessous, nous vous présentons quelques extraits des échanges entre professeurs et élèves pendant cette séance de découverte, menée en débat libre pour commencer, avant d'utiliser le document comme synthèse. De nombreux calculs ont été faits par le professeur, puis par les élèves (*cf*. figure 13) ; pour poursuivre le débat, le professeur pose la question : « On a fait des additions, même des soustractions, alors, qu'est-ce qu'il y a là-dessous à votre avis ? »

Figure 13 : Calculs.

Tous affirment sans hésiter qu'il y a des engrenages[15], mais aller plus loin n'est pas évident ; de plus, comme le travail d'identification des différentes parties de l'instrument n'a pas été fait à ce moment-là, les élèves manquent de vocabulaire, ce qui les empêche, pensons-nous, d'imaginer comment ce qu'ils voient pourrait fonctionner. Mais pas tous, voici un échange :

Élève 1 : *Moi, je pense que ça* [il montre la roue des unités]*, c'est un engrenage mais c'est juste qu'il y a des trous pour pouvoir les tourner et les dents de l'engrenage font tourner les autres engrenages.*

Nombreuses discussions sur les engrenages, les roues, puis le professeur dit : « Et les chiffres dans l'histoire ? »

Élève 2 : *Les chiffres sont sur une sorte d'engrenage qui doit tourner en fonction de l'engrenage qu'on tourne là* [il montre la roue d'inscription du chiffre des dizaines correspondant à la fenêtre du chiffre des dizaines du résultat] *pour que ça donne le chiffre qu'on veut.*

Le professeur dit : « Tu peux expliquer ? Je n'ai pas bien compris. »

Élève 2 : *En fait, je pense que les chiffres sont écrits sur une petite roue qui est raccordée à celle qu'on est censé tourner pour qu'on ait le chiffre qu'on veut après.*

Élève 3 : *Ah oui, par exemple quand on fait tourner celle-là de 1* [il montre une fenêtre du résultat], *ça fait tourner pile d'un cran.* [il montre la roue d'inscription de même ordre]

À l'issue de cette discussion, et bien que l'élève 3 ait interverti l'ordre logique des choses, presque toutes les parties essentielles de la machine ont été identifiées : la roue qui tourne sous chaque cadran possède des dents (il n'a pas été dit qu'il y en avait 10), elle entraîne une petite roue qui affiche le résultat correspondant au nombre de crans dont on a tourné la roue, la roue qui tourne sous le cadran est aussi connectée à la roue sous le cadran de gauche de façon à l'entraîner au bout de dix « crans » (il n'a pas été dit explicitement à ce moment-là qu'ainsi la retenue était reportée automatiquement). Il reste à installer un vocabulaire précis qui permette d'expliciter complètement ce que l'on a compris. Cette phase de synthèse n'est pas décrite ici.

Construction d'un prototype d'additionneuse

Lors de la séance suivante, il est proposé aux élèves de fabriquer leur propre additionneuse à roues avec du matériel mis à leur disposition, par groupe de trois ou quatre. Le matériel fourni est constitué d'un ensemble de trois roues à dix dents, trois roues à une dent de même diamètre extérieur, trois disques de diamètre égal au diamètre intérieur des roues à dents, toutes les neuf réalisées dans un carton type plume, de même épaisseur (pas trop tendre pour résister, pas trop dur pour pouvoir être coupé), trois clous, une planche, des punaises, des gommettes, un cache rectangulaire, des graduations préparées mais non remplies. Dans un premier temps, il est demandé de réaliser une additionneuse à deux roues fonctionnelle puis à trois et enfin de s'occuper de la finition avec la graduation et le cache. Voici quelques productions des élèves commentées :

Les photographies des figures 14 à 16 illustrent la variété des solutions élaborées par les élèves, qui répondent toutes au moins au début de la consigne pour l'addition des nombres à deux puis à trois chiffres. On remarque la place des chiffres sur les roues ou sur le cadre fixe – ce qui induit deux fonctionnements différents –, l'empilement des roues sur deux ou trois niveaux pour coordonner

[15] Le cours de technologie sur les engrenages a été fait la semaine précédente.

trois roues. On note le sens opposé des graduations de deux roues successives, la présence des punaises qui tiennent ensemble les roues empilées. Regardons d'un peu plus près.

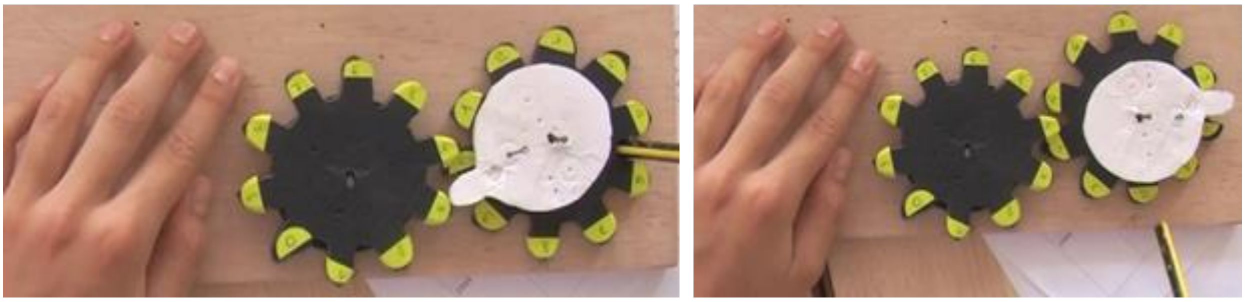


Figure 14 : prototype 1 dans le calcul de 7+5 et la lecture du résultat.

Les photographies de la figure 14 montrent la réalisation du calcul 7+5=12 par un élève concepteur. On voit le repère 0 de chaque roue sur la planche (indiqué par une petite flèche), la place de la roue à une dent chargée d'assurer la transmission de la retenue entre 9 et 0 et on devine que le sens de rotation de la première roue est le sens trigonométrique. La graduation est sur les roues, l'élève compte les angles élémentaires de rotation en même temps qu'il tourne avec son crayon.

La figure 15 montre le prototype dans la phase suivante de réalisation sur trois ordres. On observe que l'élève a choisi de graduer sa roue des unités en utilisant une roue à dix dents (ce n'est pas un cadran cependant, car la roue de graduation est solidaire de la roue à une dent), il a donc besoin de trois niveaux de roues pour que son prototype fonctionne. On remarque enfin que le sens de rotation de chaque roue est indiqué sur le support, ce qui permet d'entrer correctement les opérandes. On constate que la roue à une dent des unités a glissé de sa position correcte (comparer avec la figure 14).

Figure 15 : prototype 1 avec trois roues.

Les prototypes de la figure 16 proposent des graduations sur le support (c'est-à-dire le cadre). Le prototype 2 présente une sorte de graduation mixte, en particulier pour la roue des centaines (0 et 1) : le 0 devrait également être indiqué sur le support.

Figure 16 : prototypes 2 et 3.

Dans la logique de conception de ces deux prototypes ainsi que les suivants (figure 17), l'origine de la graduation est donnée par le sens de rotation choisi pour la première roue et la « position 0 » de cette roue (à une dent des unités), qui doit s'engrener avec la roue des dizaines à chaque tour complet. Ici, la roue des unités tourne donc dans le sens trigonométrique pour ces deux prototypes et la « position 0 » de la dent des unités est donc juste après (avec l'orientation indiquée) l'endroit où elle s'engrène avec les dents de la roue suivante. Rien n'oblige cependant à choisir comme graduation 0 d'une roue, la « position 0 » de la dent unique (comme il est fait sur le prototype 4) mais il est essentiel de repérer sur la roue cette fameuse position pour graduer correctement. Pour mener le calcul 7+5=12 avec une telle graduation, le manipulateur plante un pointeur (ici un clou ou une pointe de compas) en face de la graduation 0 et fait tourner la roue en gardant le pointeur dans la roue jusqu'à ce qu'il soit en face de 7 puis plante le pointeur en face de la graduation 0 et fait tourner la roue en maintenant le pointeur dans la roue jusqu'à ce qu'il soit en face de la graduation 5. On lit le résultat sur la graduation qui fait face au repère (sur la roue) de la position 0.

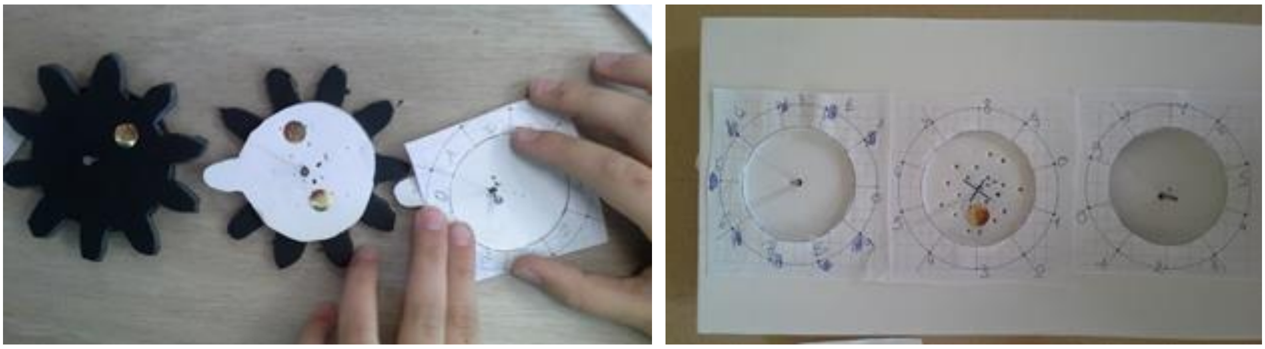


Figure 17 : prototypes 4 et 5 dans la dernière étape de fabrication – Pose du cadre gradué.

La dernière partie de l'activité consiste à réaliser un cache gradué pour utiliser le prototype comme une véritable additionneuse. La figure 15 montre deux étapes de cette construction ; on observe les ratures sur la graduation de la troisième roue du prototype 5 qui avait été graduée dans le même sens que la roue précédente alors qu'elle tourne (et donc compte) dans le sens opposé.

Comme on le devine grâce à l'étude de ces prototypes, cette activité présente plusieurs points assez subtils qui obligent à un va et vient entre expérimentation, connaissance de l'opération et compréhension profonde de la numération décimale de position ; elle permet à chaque élève de chercher une solution à la fois personnelle (voir la diversité des prototypes) et universelle (car elle doit répondre à un cahier des charges précis) ; enfin, elle amène les élèves à débattre et à examiner les idées de chacun au sein de leur groupe puis à expliquer aux professeurs la solution retenue.

Pour les séances en classe, comme pour l'atelier du colloque d'ailleurs, nous avons bénéficié du prêt d'instruments que l'on pouvait manipuler[16]. Il est évidemment préférable d'avoir la possibilité d'utiliser ces machines, de faire des calculs avec, pour pouvoir s'en approprier le fonctionnement. Mais en avoir à sa disposition peut être difficile (bien qu'elles soient assez répandues encore de nos jours), aussi avons-nous réfléchi à l'utilisation de vidéos dédiées pour accompagner la séquence entière. Elles sont en cours de test.

[16] Que les collectionneurs propriétaires de ces instruments en soient encore remerciés !

Conclusion

Nous avons saisi l'opportunité du colloque « Mathématiques en Cycle 3 » pour présenter (voire expérimenter avec les collègues enseignants, formateurs, conseillers pédagogiques et inspecteurs) différentes activités créées dans le cadre du projet « Passerelles : les mathématiques par leur histoire au cycle 3 ». Ainsi, nous avons proposé de nouveaux supports d'enseignement des mathématiques pour le cycle de consolidation en intégrant une perspective historique et/ou philosophique. Centrées sur la discipline mathématique, ces diverses activités sont aussi envisagées avec de nombreux croisements interdisciplinaires (avec le français, l'histoire et la géographie ou la technologie) en s'intéressant aux principaux obstacles et difficultés des élèves à partir de certaines de leurs productions et des travaux didactiques.

Références

Barbin, É. (2010). *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*. Paris : Vuibert.

Barbin, É. (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire: des arpenteurs aux ingénieurs*. Paris : Vuibert ADAPT-SNES.

Cargou C., Cargou M.-P., Plantevin F. (2012). *Multipliez ! Instruments de calcul de la multiplication. 200 ans de génie, 200 ans d'industrialisation*, (Préface de D. Tournès). Brest : Éd. IREM de Brest.

Cèbe, S., Goigoux, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre les textes narratifs. CM1-CM2-6e-Segpa*. Paris : Retz.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques: avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A., Johan, P. (1997). *Les maths ont une histoire: activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette éducation.

Djebbar, A., de Hosson, C., Jasmin, D. (2009). *Les découvertes en pays d'Islam*. Paris : Édition Le Pommier.

Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. In Castela C., Houdement C. (Éds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, pp. 5-89, Paris : ARDM, IREM Paris 7.

Jasmin, D., Brenni, P. (2004). *L'Europe des découvertes*. Paris : Édition Le Pommier.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J., Delplace J. R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur des figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Kosyvas, G., Baralis, G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré. *Repères IREM*, 78, 13-36.

Le Brusq C., Plantevin F. (2012). Exploitation pédagogique d'une exposition d'instruments de calcul. In *Actes du XXXIXe colloque COPIRELEM Quimper*. Brest : Éd. IREM de Brest

Leibniz, G.W. (1710). Brevis descriptio Machinæ. In *Miscellanea Berolinensia*, 1710, pp. 317-319. Traduction en français par C.C. Adam. Disponible sur www.bibnum.fr

Moyon, M. (2009). Quand les zelliges entrent dans la classe... Étude de la symétrie. In Djebbar, A., de Hosson, C., Jasmin, D. *Les découvertes en pays d'Islam*, pp. 111-126. Paris : Édition Le Pommier. Disponible sur http://www.fondation-lamap.org/fr/decouvertes-islam

Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, 72, 6-39.

Pellissier, M. (1965). Construis une machine à calculer (addition et soustraction), *Supplément au n°612 de Bibliothèque de Travail*, 189.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. et Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Platon (1967). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion. Disponible en ligne sur http://gallica.bnf.fr

Vitrac, B. (2004). Les géomètres de la Grèce antique. *Pour la Science : Les génies de la science* 21.

The lightning adding machine, https://www.jaapsch.net/mechcalc/lightning.htm#patents, consulté en novembre 2017 – site en langue anglaise.

At 14 : Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas

Marie-Jeanne Perrin-Glorian[1]

[1]Laboratoire de Didactique André Revuz ; marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

Résumé : L'objectif de l'atelier est d'aborder la question de la progressivité des apprentissages géométriques du CM1 (et même avant) à la Sixième (et plus). Il s'agit de se pencher sur les continuités possibles entre une géométrie où les propriétés des figures se construisent et se vérifient avec des instruments, pratiquée en primaire, et la géométrie du collège où la validation des propriétés se fait par la démonstration et pour cela de réfléchir aux conditions qui permettent aux constructions instrumentées de contribuer à la conceptualisation des notions géométriques abstraites. En partant des objectifs d'apprentissage au cycle 3, nous discutons, à partir de quelques exemples, de moyens qui permettraient de les atteindre, notamment en agissant sur les variables didactiques dans des situations de restauration de figure. La réflexion essentielle porte sur l'usage des instruments pour lesquels nous dégageons un « usage géométrique ».

Mots clefs : géométrie ; usage des instruments de géométrie ; restauration de figures ; progressivité des apprentissages ; lien primaire-collège.

Quelques présupposés et repères théoriques

Nous commencerons par exprimer rapidement quelques présupposés et repères théoriques qui sont à la base de l'approche de la géométrie présentée ici, initiée par un groupe de recherche[1] de l'IUFM Nord - Pas-de-Calais qui a fonctionné de 2000 à 2010 et continue sous d'autres formes.

Pourquoi enseigner la géométrie des figures dans la scolarité obligatoire ?

Nous retenons au moins trois raisons d'enseigner à tous l'étude des figures géométriques. On peut les retrouver, éventuellement exprimées autrement, dans le rapport Kahane (2002) :

- le développement du raisonnement mathématique sur des problèmes qui ne sont pas facilement algorithmisables,

- la capacité à utiliser un cadre théorique cohérent pour modéliser et résoudre des problèmes concrets qui se posent dans l'espace sensible. C'est important dans la vie quotidienne et aussi pour certaines professions, et donc certaines branches des lycées professionnels.

- un moyen de représentation pour d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur des mathématiques. La pensée géométrique constitue en effet un puissant outil heuristique par le fait que l'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace, ce qu'on appelle parfois l'intuition géométrique. Ainsi l'appui sur les grandeurs géométriques (longueur, aire) et pas seulement sur leur mesure, est essentiel pour conceptualiser les nombres. Même pour traiter la géométrie par le calcul, l'appui sur les connaissances géométriques liées aux figures permet de rendre les calculs plus efficaces.

---

[1] Ont participé à ce groupe : Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin, Odile Verbaere.

Une même axiomatique pour fonder la géométrie sur toute la scolarité obligatoire

Un de nos postulats de départ est que la cohérence de l'enseignement de la géométrie élémentaire (de l'école au collège) ne peut être assurée sans une axiomatique sous-jacente dont devraient disposer au moins les enseignants du collège et du lycée. C'est nécessaire pour qu'ils se sentent légitimes et assurés de la validité de ce qu'ils enseignent. Le modèle théorique de la géométrie, quel qu'il soit, permet de rendre compte des problèmes qui se posent dans l'espace sensible parce que, quelle que soit la théorie, les axiomes n'ont pas été choisis n'importe comment. Cependant, l'axiomatique sous-jacente n'est pas indifférente si l'on veut penser la cohérence et la continuité de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire.

Evolution des significations

Les mêmes mots désignent des choses différentes à mesure qu'avance la scolarité. Au CP (et même avant) on introduit un premier vocabulaire géométrique en appui sur la perception pour décrire des formes géométriques et l'alignement d'objets. On introduit progressivement des instruments aux cycles 2 et 3 pour outiller la perception relative à des caractéristiques précises des figures. Au cycle 4, on a des objets théoriques définis dans le langage mais les mots demeurent alors que les objets désignés par ces mots changent : nom des figures usuelles, point, droite, segment, angle... Ce qui était l'objet même du travail et de la réflexion devient la représentation d'un objet abstrait sur lequel doit porter la réflexion.

Connaissances géométriques et connaissances spatiales

En référence aux travaux de Berthelot et Salin des années 90 (Berthelot et Salin, 1992, 2003 ; Salin, 2008, 2014), nous faisons l'hypothèse que le développement de connaissances spatiales appuyées sur la perception (déplacements dans l'espace, orientation, reconnaissance et description des objets de l'espace) est indispensable pour le développement des élèves et aussi pour l'enseignement de la géométrie mais aussi que les connaissances géométriques doivent être distinguées des connaissances spatiales et se construire à la fois en appui et contre les connaissances spatiales.

Deux finalités pour la géométrie

Brousseau (2000) reprend une distinction faite dès 1982, entre deux finalités de la géométrie représentées par deux situations :

- celle du charpentier qui découpe au sol des grandes pièces de bois qu'il devra assembler à dix mètres du sol.

- la situation des médiatrices : si on trace un triangle et ses trois médiatrices à l'équerre sans trop de soin, on obtient un petit triangle qu'on dit associé au premier. La situation consiste à chercher un triangle pour lequel le petit triangle associé soit le plus grand possible et à montrer que c'est impossible parce qu'avec les définitions et propriétés des médiatrices, le triangle est nécessairement réduit à un seul point.

La première situation correspond à la géométrie comme modèle de l'espace, ce que nous appellerons ici la finalité pratique de la géométrie. La seconde représente la géométrie comme théorie de l'espace, ce que nous appellerons la finalité théorique de la géométrie.

Une réinterprétation des cadres théoriques utilisés dans des travaux de recherche en France

Houdement et Kuzniak (2000), Houdement (2007) ont distingué trois paradigmes pour la géométrie. Dans ce texte, nous ne considérerons que les deux premiers que nous réinterprétons en termes de finalité :

G1 correspond à la finalité pratique : c'est résoudre des problèmes posés dans l'espace sensible. On peut considérer que G1 comprend une théorie qui consiste en un corpus de savoirs acquis par l'expérience, sur lesquels s'appuie le raisonnement mais dont les fondements ne sont pas questionnés et dont la validation se fait dans l'espace sensible à l'aide d'instruments.

G2 correspond à la finalité théorique : c'est une théorie de l'espace, un modèle de G1, défini à partir d'objets premiers, les points, les droites et les plans et de relations entre ces objets dont certaines sont posées comme axiomes et les autres démontrées (géométrie d'Euclide). Remarquons qu'il y a différents choix possibles pour les axiomes de G2, équivalents du point de vue mathématique mais non de la cohérence de l'enseignement.

Pour notre part, nous nous intéressons à une partie de G1 restreinte à l'espace graphique (ensemble des tracés à main levée ou avec des instruments sur un support plan, papier ou écran), que nous appellerons *Géométrie des tracés* et noterons G1*. C'est une restriction de G1 avec pour seuls instruments les instruments de tracé et de reports de grandeurs (longueurs et angles) à l'exclusion des instruments de mesure. Dans la suite, nous restreignons l'espace sensible à l'espace des tracés avec des instruments sur une feuille de papier même si G1* pourrait aussi comprendre des tracés sur un écran avec un logiciel.

De leur côté, Berthelot et Salin (1992, 2000) identifient trois problématiques en géométrie. Nous les rappelons en indiquant comment, selon nous, chacune se situe par rapport aux modèles ou paradigmes précédents :

Problématique pratique : Les rapports à l'espace sont contrôlés de manière empirique et contingente par les sens. Dans ce cas, nous considérons qu'il n'y a *pas de théorie géométrique.* La fin justifie les moyens.

Problématique de modélisation ou spatio-géométrique : problème posé dans l'espace sensible, traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit dans l'espace sensible ; la validation dans l'espace sensible. *Le modèle géométrique peut être G1, G1* ou G2.*

Problématique géométrique : problème, traitement et validation se situent dans le cadre de la géométrie théorique, selon des règles établies. Les rapports à la figure sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente. *On est dans G2.*

Nos questions et nos choix théoriques

Au cours de la scolarité obligatoire, il y a deux tournants majeurs à gérer dans le mode de définition des figures : au cours du cycle 2 et au début du cycle 3, il faut passer de la seule perception au contrôle des propriétés par des instruments. Au cycle 3 on passe progressivement du contrôle des propriétés par les instruments au contrôle par les énoncés. Au cycle 4, seul le contrôle par les énoncés sera valide. Les travaux sur la transition école-collège en géométrie ont mis en évidence une rupture qui tient au mode de validation des énoncés : par les instruments dans un cas, par la démonstration dans l'autre. Mais, pour la comprendre et chercher à la gérer, les recherches prennent rarement en compte toute la scolarité obligatoire. Nous pensons au contraire que, pour penser une continuité entre l'école et le collège, on ne peut pas se limiter à la seule transition école collège ni même au nouveau cycle 3, et qu'il faut le faire en considérant tout l'enseignement obligatoire et s'intéresser à la manière dont on utilise les instruments pour construire des figures en primaire et au début du collège. La question plus précise à laquelle nous voudrions réfléchir dans l'atelier est la suivante : La validation par les instruments de géométrie (règle, équerre, compas), valorisée en primaire, peut-elle jouer un rôle positif dans l'accès à la validation par la démonstration ?

Pour ce faire, il nous faut examiner d'un peu plus près l'usage des instruments de tracé dans les constructions et la vérification des propriétés et voir si l'on peut dégager dans G1* des règles d'usage des instruments qui aideraient les élèves à entrer dans une problématique géométrique.

Pour éclairer notre propos, prenons l'exemple de la construction d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse en position et un côté de l'angle droit en grandeur (b). On peut se poser le problème dans le cadre théorique de la géométrie : conditions d'existence et unicité de la solution. On peut aussi le poser dans le cadre graphique du moyen effectif de construction avec les instruments dont on dispose. Dans ce deuxième cas, le problème dépend des instruments disponibles et de leur usage autorisé.

Supposons qu'on dispose d'une règle (non graduée), d'une équerre (non graduée mais sur laquelle on peut porter des repères) et d'un compas. On peut parfois observer une procédure pratique chez les élèves (Figure 1) : repérer la longueur b sur un côté de l'angle droit de l'équerre, placer l'équerre de façon à maintenir le repère sur une extrémité de l'hypoténuse donnée et ajuster la position du sommet et de l'autre côté de l'angle droit en faisant tourner l'équerre jusqu'à ce que le deuxième côté de l'angle droit passe par l'autre extrémité de l'hypoténuse.

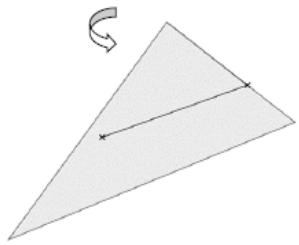


Figure 1

Cette procédure n'utilise que des connaissances spatiales. Ce n'est pas une procédure de G1*. Dans G1*, il n'y a pas d'ajustement des instruments. L'équerre ne trace que des angles droits à un endroit donné. Il faut avoir une droite sur laquelle poser un côté de l'angle droit. Avec cette condition, la seule manière d'utiliser l'équerre serait de construire ailleurs le triangle rectangle à partir du côté de l'angle droit dont on connait la longueur puis de construire sur l'hypoténuse un triangle connaissant les longueurs des trois côtés.

A partir d'un côté de l'angle droit, on peut tracer avec l'équerre le support du deuxième côté de l'angle droit mais on ne connaît pas sa longueur. Pour trouver le sommet manquant, il faut utiliser la longueur de l'hypoténuse. Une procédure pratique souvent observée consiste à prendre un repère sur la règle puis à la faire tourner de manière à amener ce repère sur la droite support du côté cherché.

Là encore, il s'agit d'une procédure qui utilise des connaissances spatiales et que nous ne retenons pas dans G1*.

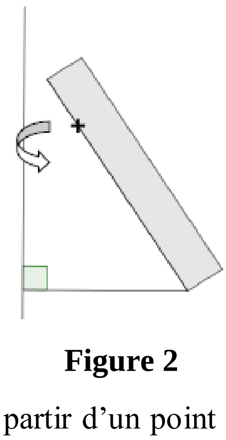


Figure 2

Dans G1*, on ne peut reporter une longueur que sur une droite déjà tracée à partir d'un point déjà marqué sur cette droite. Pour faire tourner une longueur, il faut un compas. Pour construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est donné en position et l'hypoténuse donnée en grandeur, il faut donc prendre l'intersection d'une droite (la perpendiculaire au segment en l'une de ses extrémités, construite à l'équerre) et d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon. Dans le cas où c'est l'hypoténuse qui est donnée en position, il faut prendre l'intersection de deux cercles. Pour cela, il faut savoir que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse et avoir un moyen de prendre le milieu d'un segment. On peut déduire que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle si on sait que le triangle rectangle est un demi-rectangle et qu'un rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le point d'intersection des diagonales du rectangle (figure souvent reproduite au cycle 3 et qui pourrait servir de référence).

Ainsi, la phase d'analyse et recherche de conditions nécessaires (sur quelles lignes se trouve le sommet manquant) dépend des connaissances disponibles mais elle est de même nature, que le problème soit théorique ou graphique (dans G1*). Les différences principales résident dans la discussion à mener et dans la vérification que les conditions sont suffisantes. Dans le problème théorique, il faut exhiber et justifier les conditions auxquelles les deux lignes se coupent et non dans le problème graphique où l'expérience graphique suffit à décider ou non de l'existence des points d'intersection. La validation du fait que les conditions sont suffisantes se fait par la démonstration dans un cas, par la vérification avec les instruments dans l'autre. Par exemple, si l'on a obtenu le sommet de l'angle droit du triangle sans utiliser l'équerre, par intersection de deux cercles, on vérifiera avec l'équerre que l'angle obtenu est bien droit alors qu'un théorème sera utilisé si le problème relève de la géométrie théorique. La question de la précision des instruments se pose dans G1*. Ainsi, on ne peut pas décider de l'existence d'un triangle dont les longueurs des côtés données par des segments sont telles que la plus grande est très proche de la mise bout à bout des deux autres. En revanche, si on a obtenu la troisième longueur en mettant bout à bout les deux premières, on sait qu'on ne peut pas faire un triangle avec ces trois longueurs.

Evolution des modes de reconnaissance et de production de figures simples ou composées au cycle 2 et au cycle 3

Un exemple : reproduction d'un polygone. Différentes visions des figures

Les moyens de reconnaissance et de production d'une figure simple (contour d'un gabarit) évoluent radicalement du CP à la 6$^{\text{ème}}$. Nous allons l'illustrer par l'exemple de la reproduction d'un polygone dont on a un modèle sur un calque qui servira à la vérification.

En début de CP, on peut reproduire le polygone avec un gabarit dont on fait le tour (Figure 3).

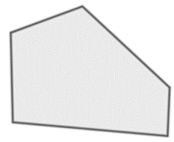


Figure 3

Si le gabarit a un coin coupé (Figure 4), il faut restaurer le sommet qui manque en prolongeant avec une règle les côtés restants. Les enfants de CP ou CE1 résistent à ce prolongement, ils essaient de ne pas dépasser.

Figure 4

Il faut reporter une longueur si on ne veut pas dépasser (Figure 5).

S'il manque tout un côté, on est obligé de reporter deux longueurs (Figure 6) ou bien une longueur et un angle.

S'il manque deux côtés (Figure 7), il est nécessaire de reporter au moins un angle ou de reconstruire un triangle sur une diagonale du polygone.

Un triangle peut se construire avec une équerre en reportant trois longueurs (Figures 8 et 9).

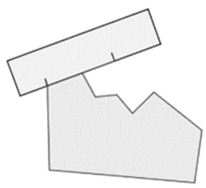


Figure 5

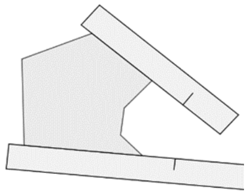


Figure 6

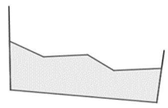


Figure 7

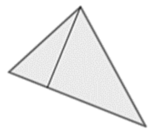


Figure 8

Figure 9

Les premiers moyens de reproduction (Figures 3 à 5) reposent sur une vision du polygone comme une surface avec un bord. La reproduction de la figure 6 relève aussi de cette vision mais elle demande de voir que le dernier côté qui ferme le contour et qui n'est pas du tout amorcé par le gabarit, peut être obtenu en joignant les extrémités des côtés qu'on peut construire par un prolongement et un report de longueur.

La reproduction des triangles est importante puisque, quand on sait reproduire un triangle, on sait reproduire n'importe quel polygone en le décomposant en triangles, ce qui demande de voir le polygone autrement que comme un simple contour de gabarit et de concevoir des lignes qui n'étaient pas tracées et qui peuvent se définir (en tant que tracés) à partir d'éléments déjà tracés. Cela relève de ce que nous appelons une vision lignes de la figure.

De même, la reproduction du triangle à la règle et à l'équerre nécessite de considérer une ligne (la hauteur) qui ne fait pas partie du bord de la figure. Cela relève d'une vision lignes de la figure.

En revanche, pour comprendre et justifier la reproduction d'un triangle au compas à partir des longueurs des côtés, il faut voir un point comme intersection de lignes (deux cercles) qui ne déduisent pas des tracés existants et ne font pas partie du bord de la figure et voir le cercle comme l'ensemble des points à une distance donnée du centre. Cela relève de ce que nous appelons une vision points de la figure.

Des instruments variés et leurs liens avec les concepts géométriques

Nous faisons l'hypothèse que les instruments de tracé, règle, équerre, compas, peuvent jouer un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés à condition d'identifier leur fonction dans la représentation de propriétés géométriques. Or les instruments matériels usuels remplissent plusieurs fonctions, d'où l'utilité de s'intéresser à des instruments théoriques définis par une seule fonction liée à la conceptualisation d'une notion géométrique précise et non limités : par exemple la règle est aussi longue qu'on veut.

Nous distinguons donc la *règle* qui ne sert qu'à tracer des traits droits, le *reporteur de longueur* (par exemple une bande de papier fort avec un bord droit sur lequel on peut écrire), le *médiateur de segment* (par exemple une bande de papier avec un bord droit qu'on peut plier), l'*équerre* qui ne permet que de reporter des angles droits, le *reporteur d'angle*, le *compas* comme traceur de cercles. Les instruments considérés sont liés à la représentation graphique des objets géométriques ou grandeurs géométriques droite, longueur, milieu d'un segment, angle, angle droit, cercle.

La règle, le reporteur de longueur, le médiateur de segment ne permettent de reporter en une fois que de l'information de dimension 1 (D1) sur les figures ; l'équerre et le reporteur d'angles permettent de reporter des surfaces, c'est-à-dire de l'information de dimension 2 (D2). Le cas du compas est plus complexe : il permet de reporter de l'information D2 à condition d'avoir des connaissances qui dépassent la vision naturelle des figures : reproduire avec un compas un cercle donné dont le centre n'est pas marqué nécessite beaucoup de connaissances géométriques. D'autres instruments permettent de reporter de l'information D2 tout en ne disposant que de la vision surfaces des figures : les gabarits et pochoirs permettent de reporter toute l'information sur une figure simple ; le papier calque le permet sur une figure simple ou composée ; un gabarit ou un pochoir déchiré permet de reporter une partie de l'information D2 sur une figure simple.

Restauration de figures

Pour travailler avec les élèves le changement de regard sur les figures ainsi que le lien entre l'usage des instruments et les concepts géométriques, nous avons mis au point un type de situation que nous avons appelé la restauration de figure. Une restauration de figure est une reproduction de figure matérielle mais avec des contraintes particulières :

- Une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non).
- Une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations D2 de la figure initiale mais sans donner toute l'information.
- On dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème.
- Quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du maître.

En termes de théorie des situations, le milieu est constitué notamment de la figure modèle, de l'amorce de la figure, des instruments avec leur coût. Les variables (didactiques) portent sur les choix de ces différents éléments du milieu. Les connaissances en jeu sont à examiner dans chaque cas. Il faut choisir le milieu et la règle du jeu en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Analyse de quelques exemples

Lors de l'atelier, nous avons proposé six exemples différents aux participants. Faute de place, nous n'en reprenons ici que deux, les situations 2 et 4. Les situations 1 et 3 font partie d'une ressource pour les enseignants du cycle 3 en cours de production dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain ; la situation 1 est présentée dans plusieurs publications, notamment Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2013, 2017). La situation 5 est décrite dans Perrin-Glorian et Godin (à paraître). La situation 6 est succinctement présentée dans une version différente dans Perrin-Glorian (2012).

Situation 2

Le travail proposé aux participants était le suivant :
- Reproduire une des figures suivantes (Figures 10, 11, 12) à partir de l'amorce donnée (Figure 13).
- Discuter le choix des instruments disponibles et du barème.
- Prévoir une séance au CM ou en 6ème.

Dans tous les cas, il faut reconnaître la position de l'amorce sur la figure modèle (ici légèrement grisée). Celle-ci est à une

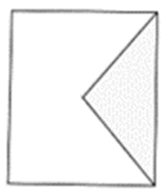


Figure 10

Figure 11

échelle différente, ce qui interdit les reports du modèle sur la figure à produire. Les figures 12 et 10 sont des sous-figures de la figure 11. Celle-ci contient toutes les lignes nécessaires à sa reproduction, ce qui n'est pas le cas de la figure 10. La figure 12 contient aussi toutes les lignes nécessaires à sa reproduction avec un report de longueur mais la présence du cercle dans la figure 11 aide à voir qu'un seul usage du compas pour tracer le cercle et des prolongements à la règle suffisent pour obtenir les sommets manquants du rectangle.

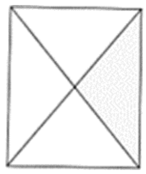


Figure 12

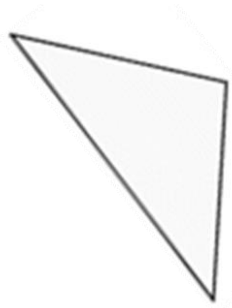


Figure 13

On pourra favoriser cette procédure dans le cas des figures 10 et 11 en choisissant un barème où le compas est bon marché et le report de longueur cher. Si on laisse l'équerre à disposition, les élèves peuvent vouloir commencer par reproduire le rectangle ; ils sont néanmoins obligés de reconnaître les côtés égaux du triangle isocèle amorce comme des demi-diagonales et de les prolonger pour trouver les sommets manquants du rectangle puisqu'ils ne disposent pas de sa largeur. Ce prolongement est plus difficile à mobiliser dans le cas de la figure 10 puisque les diagonales ne figurent pas en entier sur le modèle. Si l'on veut seulement mobiliser le fait que les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, on peut choisir la figure 12 et laisser à disposition le reporteur de longueur. La procédure de report de longueur serait valable aussi dans le cas d'un parallélogramme avec pour amorce un triangle quelconque (on obtiendra un rectangle dans le cas du triangle isocèle). Si l'on veut que les élèves mobilisent le compas pour tracer le cercle circonscrit avant de prolonger, il est souhaitable qu'ils aient rencontré la figure 11 avant qu'on leur propose la figure 10. On peut proposer la figure 11 en CM2 ; en 6$^{\text{ème}}$, on peut proposer la figure 11 si les élèves ne l'ont jamais rencontrée et, quelque temps plus tard la figure 10, en donnant par exemple comme barème : règle gratuite ; compas 5 points pour chaque trait (un cercle ou un arc) ; équerre 5 points ; reporteur de longueur (autre que le compas) 10 points.

Situation 4

Nous avons proposé aux participants de comparer les problèmes suivants :

<u>Problème 1</u> : Soit un rectangle ABCD. Construire un losange ECFA tel que E soit sur le segment [CD] et F sur le segment [AB].

<u>Problème 2</u> :

Reproduire la figure suivante. On a déjà tracé le rectangle.
Coût des instruments :
Règle : gratuit
Equerre : 2 points
Report de longueur : 10 points
Report d'angle : 10 points
Médiateur de segment : 20 points

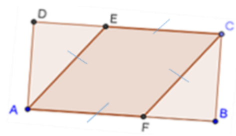


Figure 14

Figure 15

La figure à restaurer dans le problème 2 est la figure d'analyse du problème de construction (problème 1). On peut lire sur la figure 14 que les sommets A et C sont communs au losange et au rectangle. Ceux-ci ont donc la diagonale [AC] en commun. Dans le problème 1, il faut le déduire du texte et en particulier du nom donné aux deux quadrilatères. Le barème choisi dans le problème 2 favorise la construction par les diagonales (E et F sur la médiatrice de [AC] ou (EF) perpendiculaire à [AC] en son milieu suivant les connaissances des élèves). Pour trouver le milieu de [AC], il faut se servir du fait que les diagonales du rectangle se coupent en leur milieu. D'autres constructions sont possibles à partir du report d'angles ; le report de longueur ne peut servir qu'à reporter des angles (par exemple reporter sur l'amorce le triangle CBF à la taille du modèle puis prolonger la direction de [CF]) puisque amorce et modèle ont des tailles différentes. Nous proposons l'équerre plutôt que le compas parce que c'est la perpendicularité des diagonales que nous voulons faire utiliser par les élèves.

Le problème 1 est extrait d'un mémoire de PLC2 réalisé à Lille à la fin des années 90. Il avait été proposé à des élèves de 6ème et 5ème ; la plupart d'entre eux ont eu du mal à se départir d'une figure où le losange s'inscrit dans le rectangle avec comme axes de symétrie les médianes du rectangle. La restauration de figure du problème 2 évite cet écueil.

Conclusion

En conclusion, nous voudrions revenir sur le rôle que peut jouer la validation par les instruments de géométrie dans l'accès à la validation par la démonstration. Nous pensons que ce rôle peut être positif si la validation par les instruments est liée au contrôle de propriétés géométriques (relations entre éléments constitutifs de la figure) et non seulement de caractéristiques graphiques. Cela nous semble favorisé par l'explicitation de ce que nous appelons un *usage géométrique des instruments* que nous précisons maintenant :

Pour placer la règle, il faut deux points ou un segment déjà tracé.
Le report d'une longueur se fait à partir d'un point sur une droite qu'on connaît déjà.
Pour obtenir le milieu d'un segment, on reporte un segment de même longueur sur une bande de papier avec un bord droit qu'on plie en faisant coïncider les deux extrémités ; on reporte la longueur moitié obtenue sur le segment, vers l'intérieur, à partir d'une des extrémités.
Pour poser l'équerre, il faut une droite sur laquelle on pose un côté de l'angle droit, on peut la faire glisser sur cette droite si l'on veut que l'autre côté de l'angle droit passe par un point donné.
Le compas a deux branches différentes : la pointe se pose sur le centre du cercle, la mine décrit un arc de cercle quand on tourne. *Pour reporter un cercle*, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord.
On reporte un angle à partir d'une demi-droite qu'on a déjà : on reporte le sommet sur le point origine de la demi-droite et un côté sur la demi-droite qu'on a déjà et on reporte l'autre côté de part ou d'autre de cette demi-droite.

Nous faisons l'hypothèse que le fait de s'intéresser à la manière de poser les instruments et en particulier aux éléments qui doivent être déjà présents sur la figure pour le faire amène à s'intéresser aux relations entre ces traces graphiques et prépare la considération des relations entre les objets géométriques qu'elles représentent.

Références

Berthelot, R., Salin, M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

Berthelot, R., Salin M.-H. (2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R., Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

Houdement, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69-84

Houdement, C., Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-115.

Kahane, J.P. (dir.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob : Paris.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M.J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. *Grand N*, 94, 47-79.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M.J. (2017) Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2016*.

Perrin-Glorian, M.J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin de l'APMEP,* 499, 325-332. Disponible en ligne dans une version plus complète sur le site de l'APMEP : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf

Perrin-Glorian, M.J., Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* 222, 26-36.

Perrin-Glorian, M.J., Godin, M. (à paraître) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In *Concertum* CORFEM.

Salin, M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478, 647-670.

Salin, M.H. (2014). Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM, Nantes 2013,* 33-43.

At 15 : Construire des nouveaux nombres en cycle 3 : fractions et décimaux

Bernard Anselmo[1], Bruno Rozanès[2], Hélène Zucchetta[3],

[1]ESPE de Lyon bernard.anselmo@univ-lyon1.fr,
[2]Collège P Sénard Caluire (69) bruno.rozanes@ac-lyon.fr,
[3]ESPE de Lyon, helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé : Suite à la création du nouveau cycle 3, le groupe Collège de l'IREM de Lyon a revu et complété la brochure « La sixième entre fractions et nombres décimaux » (Irem-1999) pour proposer une progression de situations sur l'ensemble du cycle 3. Ce travail a donné lieu à un ouvrage qui devrait prochainement paraître chez CANOPÉ.

Après un bref questionnement sur les difficultés des élèves et sur les besoins de formation des enseignants pour enseigner les notions de fraction et de nombre décimal, nous avons proposé aux participants de l'atelier d'étudier quelques-unes de ces situations autour du thème « fractions et décimaux » à l'articulation école-collège. Ces situations reposent sur l'activité de l'élève, et prennent appui sur la manipulation pour donner du sens aux nouveaux nombres ainsi qu'aux opérations et aider à leur représentation. Elles cherchent à baliser la progression sur le cycle 3 en permettant aux élèves de s'approprier, par la résolution de problèmes, les différentes significations attachées à la fraction ou au nombre décimal. Leur étude devrait permettre aux enseignants de réinterroger leurs pratiques d'apprentissage des fractions et décimaux en s'intéressant aux différents aspects du concept à aborder.

Mots clefs : fractions et décimaux ; articulation école-collège ; résolution de problèmes ; manipulations et activités

I Introduction

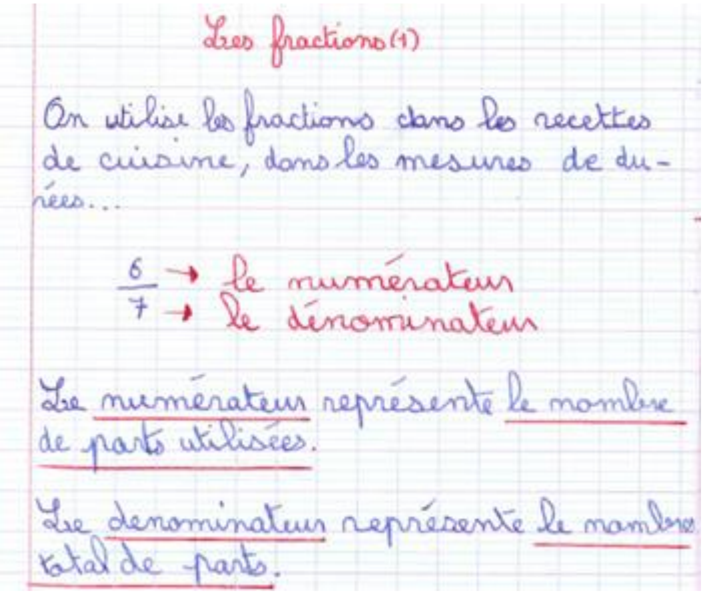
A l'IREM de Lyon, il y a une vingtaine d'années, une équipe d'enseignants de collège et de formateurs a mené une réflexion sur l'enseignement des fractions et des nombres décimaux. Elle a conduit à une première publication en 1999 : « La sixième entre fractions et décimaux » qui apportait quelques éléments théoriques et proposait une progression de situations pour la classe de sixième.

A l'annonce de la création du nouveau cycle 3, une nouvelle équipe a repris la réflexion et l'a étendue à tout le cycle 3, du CM1 jusqu'à la sixième. Les situations de l'ancienne brochure IREM ont été revisitées et déclinées à différents niveaux de classe, de nouvelles ont été créées, expérimentées, filmées. Ce travail a abouti à une nouvelle publication à l'intention des équipes d'enseignants inter-degrés qui devrait prochainement paraître chez CANOPé. Cette nouvelle ressource se veut être un support d'échanges pour ces équipes et les aider à envisager et conduire des progressions communes à l'articulation école-collège.

Le travail engagé par ce groupe IREM se prolonge dans des actions de Formation Continue sur l'académie de Lyon : stages ou animation à destination des enseignants, création d'un parcours M@gistère (par Bernard Anselmo).

II Contexte du travail

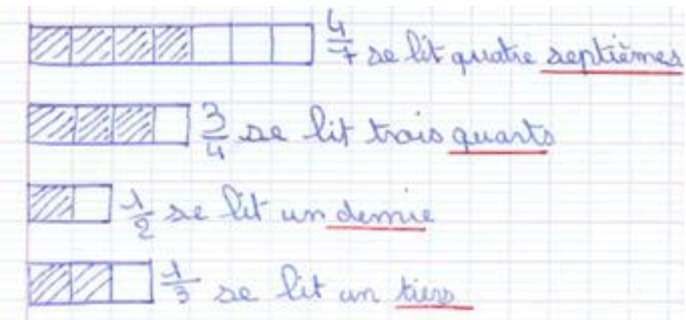
Les difficultés rencontrées par nos élèves montrent que les questions posées par l'enseignement des fractions et décimaux sont nombreuses et complexes. Les pratiques des professeurs de collège et d'école montrent aussi un déficit de formation dans ce domaine en particulier autour de la compréhension des différents aspects et significations des fractions et des nombres décimaux. Les réponses spontanées d'enseignants à la définition d'un nombre décimal font, par exemple, encore très souvent intervenir l'écriture à virgule et non pas la fraction décimale. L'étude des traces à retenir sur certains cahiers d'élèves montre aussi que le lien entre fraction décimale et nombre décimal n'est pas toujours fait. Il n'est pas rare d'observer dans les classes de CM des conversions de mesures utilisant des nombres décimaux (avec l'enseignement de règles du type « décaler la virgule »), proposées bien en amont de l'abord de la notion de fraction. Dans les cahiers des élèves, la première leçon sur les fractions définit souvent du vocabulaire comme numérateur et dénominateur sans qu'une référence à une unité clairement explicitée pour le partage soit clairement faite comme le montre, par exemple, l'illustration suivante issue d'un cahier d'élève :



Remarque :

On peut se demander comment sera interprétée la représentation suivante :

Est-ce $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ qui est représenté ? et de quelle unité ?



Que dire de l'illustration qui suit la définition précédente ?

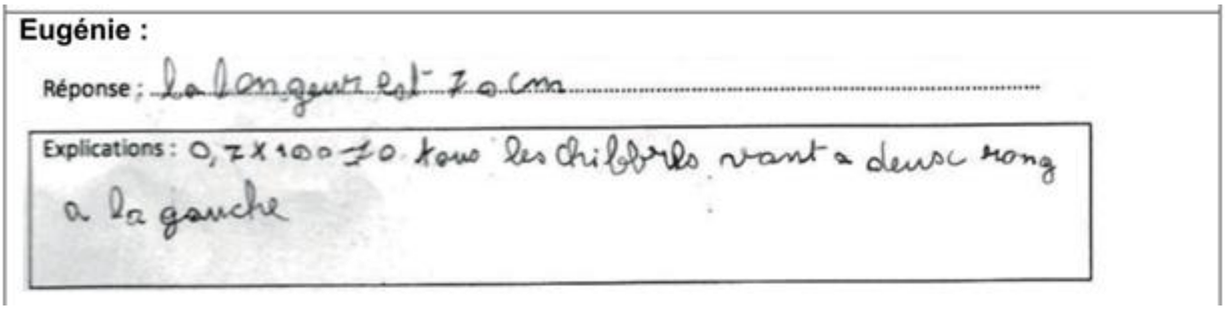
$\frac{1}{n}$ est toujours représenté par un carreau, quelque soit n ?

Figure 1 : extrait d'un cahier outil d'une classe de CM2

Malheureusement, le temps de formation initiale des enseignants est souvent trop restreint pour leur permettre de remettre en cause leurs conceptions des fractions et des nombres décimaux (parfois fausses) et d'appréhender l'enseignement de ces savoirs dans une approche globale liée à la mise en place du cycle 3.

Ainsi, un enseignement succinct et sans signification de règles apprises, comme celles de la multiplication par 10, 100, …, empêche une compréhension plus profonde du fonctionnement global du système de numération décimale. Cette compréhension est nécessaire pour permettre de montrer que ce n'est pas un décalage de la virgule qui est en jeu dans ces opérations, mais un changement de valeur des chiffres dans l'écriture du nombre multiplié.

Dans un des sujets de concours du CRPE de la session 2017, une question portait sur ce sujet et très peu de candidats ont réussi à y répondre : *Formuler précisément la procédure utilisée par Eugénie et en donner une justification mathématique.*

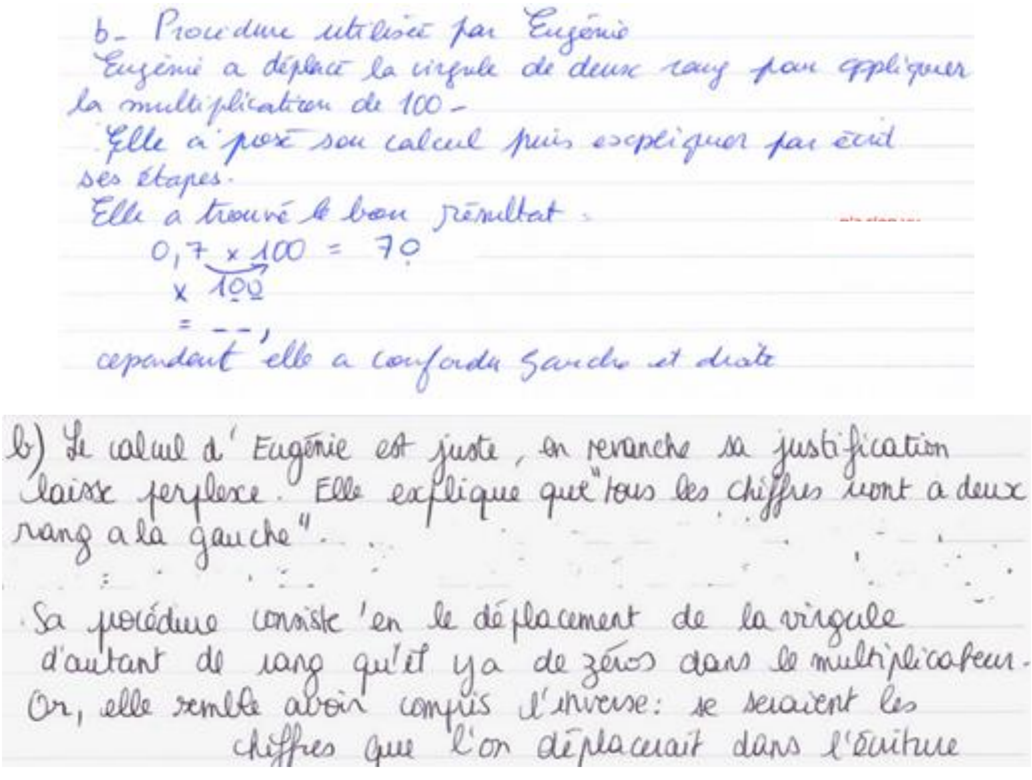


Eugénie :

Réponse : la longueur est 70 cm

Explications : 0,7 x 100 = 70. tous les chiffres vont a deux rang a la gauche

En voici deux réponses montrant deux candidats qui s'appuient maladroitement sur une règle à appliquer et expliquent la réponse de l'élève par une confusion de gauche et de droite. Ils sont incapables de donner une justification mathématique de la procédure formulée par l'élève (pourtant le deuxième candidat a obtenu une note de 35,5/40 sur l'épreuve de mathématiques) :



b- Procédure utilisée par Eugénie
Eugénie a déplacé la virgule de deux rang pour appliquer la multiplication de 100 -
Elle a posé son calcul puis expliquer par écrit ses étapes.
Elle a trouvé le bon résultat.
0,7 x 100 = 70
x 100
= - - ,
cependant elle a confondu gauche et droite

b) Le calcul d'Eugénie est juste, en revanche sa justification laisse perplexe. Elle explique que "tous les chiffres vont a deux rang a la gauche".
Sa procédure consiste en le déplacement de la virgule d'autant de rang qu'il y a de zéros dans le multiplicateur.
Or, elle semble avoir compris l'inverse : ce seraient les chiffres que l'on déplacerait dans l'écriture

Figure 2 : deux réponses de candidats pour expliquer le calcul d'Eugénie

Les aides apportées par les manuels scolaires ne suffisent pas toujours à combler ses lacunes. Dans ceux de sixième par exemple, même encore récemment, l'étude des nombres décimaux précèdent la plupart du temps celle des fractions : souvent les écritures décimales sont présentées au premier chapitre (comme conventions d'écriture de fraction décimales), la fraction apparait ensuite, en milieu d'années, en tant que quotient de deux entiers sans que le lien avec une signification partage soit toujours établi.

III Différents aspects et significations de la fraction et du nombre décimal

La définition théorique d'une fraction en tant que quotient de deux entiers a et b (avec b non nul) ne recouvre pas tous les aspects sous lesquels on peut envisager la fraction. Cette définition en tant que fraction-quotient n'apparaît dans les repères de progressivité du cycle 3 que dans la classe de $6^{\text{ème}}$.

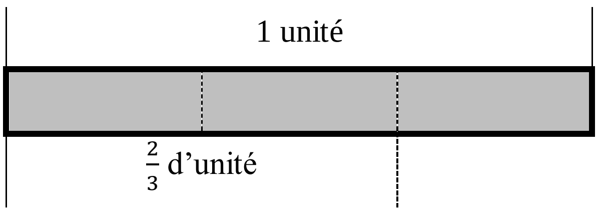
Différents aspects de la fraction

La notion de fraction peut être considérée sous bien des points de vue qu'il est utile de prendre en compte pour concevoir et programmer son enseignement.

A. Le point de vue des grandeurs

1. Mesurage et partage de l'unité

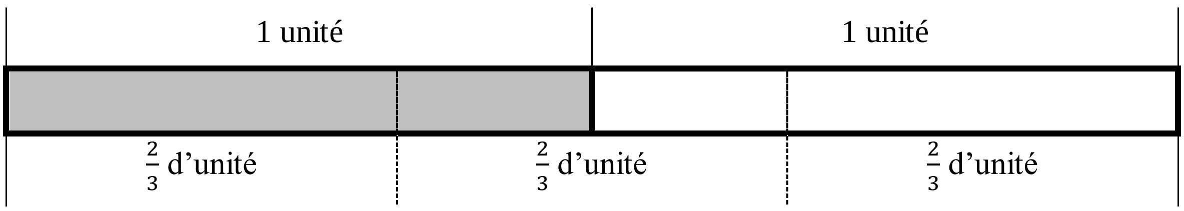
Il conduit à considérer la fraction $\frac{2}{3}$ d'unité comme étant 2 fois $\frac{1}{3}$ d'unité. L'unité est partagée en trois parts égales, et deux de ces parts sont ensuite prises en compte.



C'est le partage de l'unité qui est premier dans cette procédure de représentation concrète de la fraction

2. Un partage de plusieurs unités

La fraction $\frac{2}{3}$ d'unité apparait comme étant le $\frac{1}{3}$ de deux unités. Deux unités sont à partager en trois parts égales. Pour ce faire, les deux unités sont réunies en une seule quantité qui est ensuite partagée en trois parts égales.



Dans cette représentation, c'est la constitution d'une quantité de plusieurs unités qui précède le partage.

3. Un repérage d'une position

Sur une demi-droite graduée, la fraction $\frac{2}{3}$ permet de repérer la position d'un point. Elle devient l'abscisse d'un point dans un repère donné. Elle apparait comme étant la position de l'extrémité d'un segment de mesure $\frac{2}{3}$ d'unité dont l'autre extrémité est l'origine de la demi-droite. Sa signification reste fortement liée à la notion de partage évoquée plus haut, dans un contexte de mesure de longueur, mais on la note sans l'accompagner d'une unité de mesure et ceci contribue à lui conférer un premier statut de nombre.

B. Le point de vue des nombres

4. La fraction quotient

Dans un contexte purement numérique, la fraction apparait comme la solution d'une équation de type $ax = b$ avec $a \neq 0$ et où a et b sont entiers. La fraction $\frac{2}{3}$ est alors le nombre qui multiplié par 3 donne 2, c'est à dire le résultat exact de la division 2 par 3.

Ce résultat peut être validé par la multiplication[1] de $\frac{2}{3}$ par 3 en référence à l'addition réitérée

$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

5. Coefficient scalaire, un coefficient de proportionnalité

Des problèmes de proportionnalité peuvent amener à rechercher un coefficient multiplicatif qui permet de passer d'un nombre à un autre. Il peut s'agir de trouver un nombre qui lie deux mesures d'une même grandeur ou d'un nombre qui permet de passer d'une grandeur à une autre. Dans les deux cas l'aspect quotient de la fraction est sollicité.

Ces premiers points de vue sont travaillés tout au long du cycle 3 avec le point de vue des nombres plutôt réservé à la classe de 6ème. Un dernier point de vue est travaillé au cycle 4 :

C. Le point de vue des proportions

De ce point de vue, 2 est à 3 ce que 20 est à 30 et la fraction $\frac{2}{3}$ permet d'exprimer, par exemple, la proportion d'élèves filles dans une classe de trente élèves où il y a 20 filles.

Elle devient alors un objet qu'on peut modifier par équivalences en utilisant la proportionnalité :

les égalités $\frac{2}{3} = \frac{20}{30} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ se lisent dans le tableau de proportionnalité

2	20	4	6
3	30	6	9

Sa signification n'est plus basée sur une notion de partage équitable, mais sur une répartition d'éléments que l'on a dénombrés. En termes de proportion, $\frac{2}{3}$ ne se lit pas deux tiers mais deux sur trois.

[1] $\frac{2}{3} \times 3$ se lit indifféremment « $\frac{2}{3}$ fois 3 » ou « $\frac{2}{3}$ multiplié par 3 » mais selon la lecture la signification donnée à la multiplication n'est plus la même « $\frac{2}{3}$ multiplié par 3 » renvoie à $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ tandis que « $\frac{2}{3}$ fois 3 » renvoie plutôt à $\frac{2}{3}$ de 3 ;

Différents aspects d'un nombre décimal

1. Fractions décimales

Un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale : $\frac{a}{10^n}$ *a* et *n* étant des nombres entiers naturels. A ce titre $\frac{13}{5}$ et $\frac{15}{4}$, qui peuvent s'écrire respectivement $\frac{26}{10}$ et $\frac{375}{100}$, sont des nombres décimaux. Cet aspect est celui présent dans les programmes de 2015 du cycle 3 : le nombre décimal est introduit comme codage d'une fraction décimale.

D'après cette définition un décimal est un rationnel particulier dont, lorsqu'il est non entier, l'écriture fractionnaire irréductible comporte un dénominateur qui peut s'écrire sous la forme d'un produit de puissances de 2 ou de 5. Cet aspect n'est pas abordé au cycle 3 mais les élèves vont rencontrer des exemples simples de telles fractions décimales, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \ldots$

2. Nombres « à virgule »

Tout nombre décimal admet une écriture « à virgule » finie. Ainsi $\frac{13}{5}$ peut s'écrire 2,6 et $\frac{15}{4}$ peut s'écrire 3,75.

Dans cette écriture décimale, la valeur d'un chiffre est fonction de sa position (à un rang donné, sa valeur est dix fois plus grande que celle du chiffre écrit au rang immédiatement à sa droite) et peut être lue en se référant à la décomposition canonique du nombre suivant les puissances de 10. Ainsi dans $3{,}75 = 3 + 7 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$, le 3 a pour valeur trois unités, le 7 : sept dixièmes d'unité et le 5 : cinq centièmes d'unité. Il est important de travailler cet aspect et la lecture se fera en donnant les rangs « 3 unités 7 dixièmes et 5 centièmes » par exemple et non « 3 virgule 75 ».

3. Des nombres qui prolongent les entiers et permettent d'approcher d'autres nombres.

Tous les entiers naturels sont aussi des nombres décimaux : ainsi 3 est un décimal. Tout décimal non entier peut être encadré par deux entiers successifs et s'écrire sous la forme d'une somme d'un entier et d'un décimal inférieur à 1 : $3 < 3{,}75 < 4$ et $3{,}75 = 3 + \frac{75}{100}$ avec $\frac{75}{100} < 1$.

Entre deux nombres entiers, entre deux nombres décimaux, il existe une infinité de nombres décimaux.

Pour ce qui concerne les nombres non décimaux, la propriété mathématique de densité de l'ensemble des décimaux dans l'ensemble des réels montre que ces derniers peuvent être approchés avec autant de précision que voulue par un nombre décimal : ainsi 0,67 est une valeur approchée au centième près par excès de $\frac{2}{3}$ ou 3,14 une approximation de π.

4. Recodage, avec une seule unité, d'une mesure exprimée avec deux unités

Le nombre décimal peut être considéré comme un nombre à virgule constitué de deux parties : deux entiers accolés séparés par une virgule.

C'est le cas quand on le perçoit comme une mesure de grandeur exprimée avec deux unités, une première unité et une autre sous-multiple de celle-ci. Un lien est alors possible avec les unités de numération.

Cet aspect est source d'erreurs sur les nombres décimaux chez de nombreux élèves et par conséquent n'est pas à introduire trop tôt. Il est important que les relations entre unités de mesure et celles entre unités de numération soient aussi mises en lien.

5. Recodage dans une autre unité

Le nombre décimal peut être aussi perçu comme le recodage d'une mesure entière d'une grandeur exprimée dans une unité donnée, dans une autre unité multiple de la première.

Ainsi 1,624 (m ou kg) est l'expression de 1 624 (mm ou g) dans une unité mille fois plus grande et est donc mille fois plus petite en m ou kg qu'en mm ou g.

III Déroulement de l'atelier

Après une présentation du contexte du travail, autour des besoins de formation ressentis, et des propositions de formation, l'activité du groupe Collège de l'IREM de Lyon est décrite rapidement.

Ensuite une première activité est proposée aux participants afin de les mettre en en questionnement sur la signification et la représentation d'un nombre décimal. Il leur est demandé de construire un segment de 1,3 u à partir d'une bande-unité distribuée préalablement.

Dans un second temps, les documents en annexe sont distribués avec la consigne suivante :

Voici des propositions d'activités pour la classe
Étudiez-en deux plus particulièrement pour pouvoir ensuite présenter vos réflexions aux autres.

- *Que peuvent faire les élèves ?*
- *Comment pourrait-on exploiter leurs réponses ?*
- *A quel(s) moment(s) du cycle serait-il intéressant de les proposer ?*
- *Dans quel(s) objectif(s) ?*

Lors de cet atelier, nous avons fait le choix de présenter quelques situations « phares » centrées sur l'étude des différents aspects de la fraction vus au cycle 3 et sur le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'une fraction décimale. La résolution des problèmes proposés donne lieu à des situations de classe dans lesquelles l'élève agit. Elles servent de références.
La manipulation effective du matériel est préférée à l'utilisation de représentations schématisées (qu'en tout cas elle précède). Elle aide à la construction des nombres et des opérations travaillées et permettent de leur donner un sens.

À une désignation du nombre, l'élève pourra ensuite associer une image mentale :

- l'image d'une quantité en groupements d'unités
- l'image d'une mesure d'une grandeur, une unité étant donnée
- l'image d'une position sur une droite graduée.

Pendant l'atelier, le temps imparti pour une mise en commun des analyses a manqué mais les discussions au sein des groupes de travail ont montré l'intérêt et l'originalité des nouvelles activités. Elles ont aussi permis de revisiter ou de faire connaitre d'autres situations « classiques » (inspiré d'ERMEL) comme les activités d'échanges de messages « le facteur » qui permettent d'introduire la notion de fraction-partage à partir d'une bande unité.

La situation « Règles graduées » a suscité beaucoup d'intérêt surtout par la réflexion de ce que peuvent produire des élèves comme illustré ci-dessous :

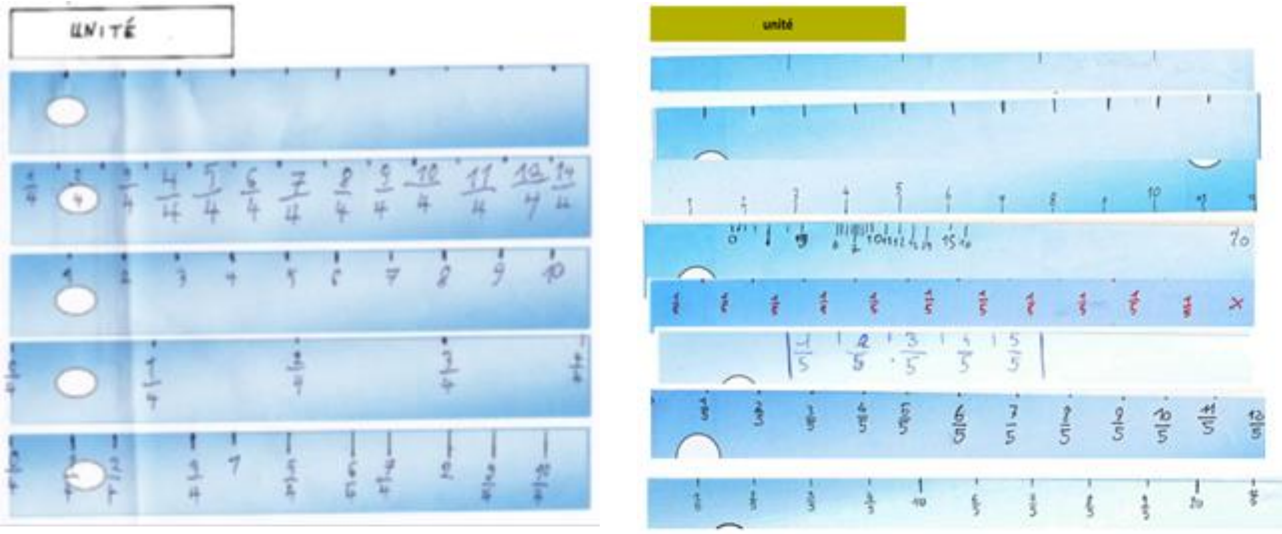


Figure 3 : exemples de règles graduées produites par des élèves dans le cas de graduations en quart et en cinquièmes d'unité

La situation « L'Apprenti comptable » (où il s'agit de calculer comme en 1500 – avant l'introduction de l'écriture décimale) a été illustrée sur des productions d'élèves. Elle est aussi utilisée, un peu transformée, en tant qu'activité de formation pour les étudiants de Master MEFF Professeur des écoles à l'ESPE de Lyon.

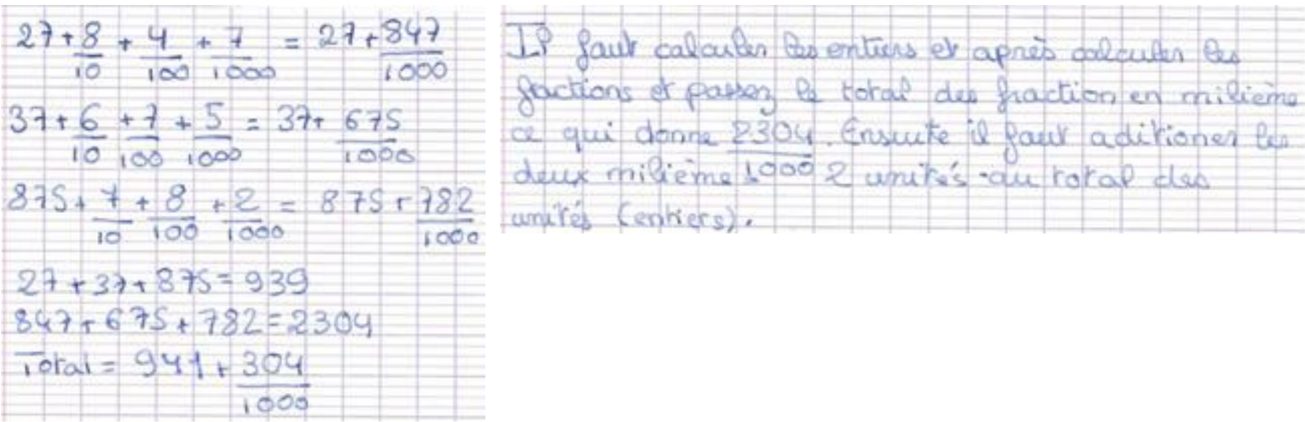


Figure 4 : réponse d'un élève de 6ème

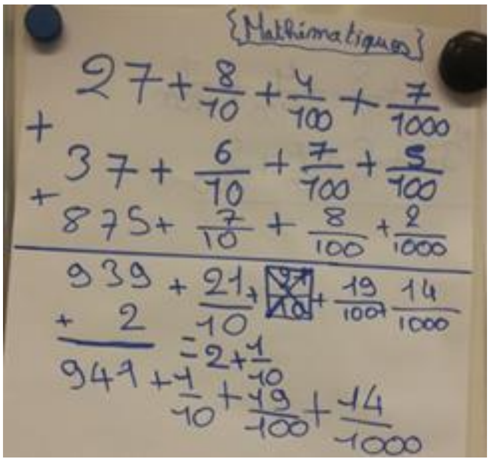


Figure 5 : réponses de deux groupes d'élèves de CM2

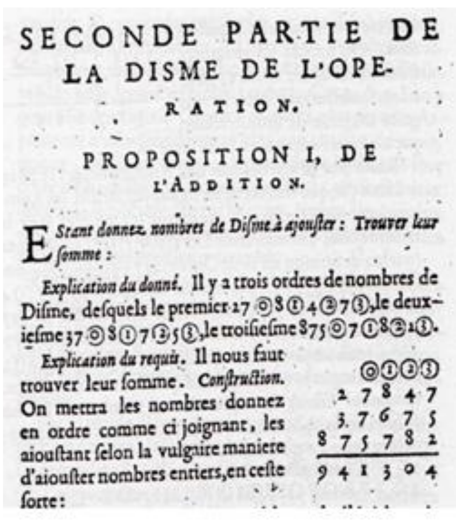
Les questions posées aux étudiants doivent leur permettre de s'apercevoir que l'écriture décimale est récente (et qu'elle a évolué au cours du temps jusqu'à l'écriture à virgule en France ou avec un point chez les anglo-saxons). L'énoncé est le même que celui donné aux élèves de CM2 ou de 6ème accompagné par les questions suivantes :

a) Pour quelle raison l'énoncé précise-t-il que nous sommes en 1500 Ap. JC ?
b) Quelles sont les connaissances nécessaires que les apprentis doivent avoir pour pouvoir effectuer correctement cette opération ?
c) Donner une explication que l'élève peut donner à l'apprenti moins expérimenté.

Analyser la réponse ci-contre (la réponse de l'élève 2 ci-dessus)

Cette analyse est ensuite prolongée par l'étude de la page correspondante de la Disme de Simon Stevin avec une question perturbant en général les étudiants :

Quel est le nombre qui précède 12 ⓪ 3 ① 7 ② 4 ③ ?



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte :

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Figure 6 : Activité pour les étudiants PE M1 MEEF

Des extraits de films, montés pour le parcours M@gistère, ont pu être en partie montrés en fin d'atelier pour illustrer la mise en place des situations. Dans ce parcours, ces courtes vidéos peuvent être visionnées. Elles permettent aux participants de se faire une idée des diverses situations proposées pour qu'ils en choisissent une à expérimenter avec leurs élèves et en faire ensuite un retour en présentiel.

TÂCHES À EFFECTUER

Dans cette étape, vous avez les ressources suivantes à consulter en cliquant sur les liens :

situations	CM1	CM2	6e
Des nouveaux nombres pour mesurer	x	x	x
Graduer avec des fractions	x	x	x
Vers l'écriture décimale	x	x	x
Ranger des surfaces	x	x	x
Multiplier par 10 , 100, 1000		x	x
Vers la fraction quotient			x
Multiplier par un décimal			x

Il s'agit :

- d'en prendre connaissance ;
- et de visualiser en ligne des extraits filmés des séances;
- d'en choisir une que vous mettrez en oeuvre dans votre classe après le second regroupement;
- de communiquer votre choix sur le forum " Expérimentations" en essayant de l'argumenter.

DE NOUVEAUX NOMBRES POUR MESURER

Une vidéo

Figure 6 : une page du parcours M@gistère permettant d'avoir accès aux vidéos et donnant la consigne de travail à distance

IV Conclusion

Lors de l'atelier, nous espérons avoir montré que l'apprentissage des fractions et les nombres décimaux nécessitent du temps et que l'articulation entre fractions et décimaux doit être travaillée tout au long du cycle 3 et continuée au cycle 4.

Si l'on veut que l'enseignement de ces nouveaux nombres ne se cantonne pas à des règles dénuées de sens, et permette d'installer durablement des connaissances solides, il est nécessaire que les enseignants de cycle 3 soient formés à cette réflexion et œuvrent de concert tout au long du cycle, par exemple, par la mise en place de progressions communes.

Le travail mené par l'équipe de l'IREM de Lyon va dans ce sens. L'ouvrage en voie de publication se veut être une aide aux équipes inter-degrés et aux formateurs qui voudraient s'engager dans cette réflexion.

Le parcours M@gistère qu'elle a élaboré, s'inscrit dans cette même logique de formation et d'accompagnement. Il peut constituer un outil pour les équipes de formateurs en général et en particulier pour les conseillers pédagogiques non spécialistes de la discipline.

Références

Référence institutionnelle

Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel spécial n°* 11 du 26 novembre 2015, consultable sur eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html*

Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques, *coll. « Ressources pour faire la classe »,* 2012, Chasseneuil-du-Poitou, Scérén/CNDP-CRDP.

Fractions et nombres décimaux au cycle 3 : eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html*

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres décimaux : eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle-4.html*

Livres et articles

Anselmo B., Bonnet M., Colonna A., Combier G., Latour J. Planchette P. (1999) *La sixième entre fractions et décimaux* IREM de Lyon

Anselmo B., Zucchetta H. (sous la direction de) *Construire des nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux* Publication à paraître à CANOPé de Lyon

ERMEL, (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours moyen première année,* Hatier, 1997.

ERMEL, (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours moyen deuxième année,* Hatier, 1999.

Grisvard C. et Léonard F., (1981) *Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs,* in Bulletin vert n°327, APMEP, 1981, p. 47-60.

Perrin-Glorian Marie-Jeanne, (1985) *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège,* IREM Paris VII, 1985.

Roditi Eric, (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique,* Paris, L'Harmattan, 2005.

Stevin Simon, (1585) *La Disme*, Reproduction de textes anciens, IREM Université Paris Diderot Paris 7, consultable à l'adresse : www.irem.univ-paris-diderot.fr ; chemin : moteur de recherche (écrire la disme) – Mise en ligne des publications du groupe M:ATH – Reproduction de textes anciens - Ancienne série - n°1.

ANNEXE 1

Quelle progression est proposée dans l'ouvrage que le groupe Collège de l'IREM de Lyon a écrit et expérimenté ?

En s'appuyant sur les différents aspects de la fraction et sur l'introduction d'un nombre décimal comme fraction décimale, le groupe Collège de l'IREM de Lyon a rédigé un ouvrage où une progression en quatre temps est proposée à travers différentes situations pour tout le cycle 3.

Les situations proposées à l'analyse lors de l'atelier se trouvent en annexe et sont repérées par leur nom dans le bref descriptif ci-dessous[2].

Les quatre temps de la progression proposée.

A. <u>Débuter avec les fractions</u>

Ces quatre premières situations se déroulent dans le contexte des longueurs. Elles sont accessibles dès le CM1 mais des aménagements sont proposés pour qu'elles puissent être mises en œuvre ou reprises plus tard dans le cycle.

1. Des fractions pour mesurer : « Le facteur »

Cette première situation permet de montrer l'insuffisance des nombres entiers dans la mesure d'une longueur. Elle présente la fraction à partir du partage par pliage de l'unité et permet d'introduire l'écriture fractionnaire. Elle propose un travail autour de fractions simples, inférieures ou supérieures à l'unité, et fait déjà apparaître que des écritures différentes peuvent désigner une même mesure. C'est une situation « émetteur-récepteur » avec des échanges de messages qui seront repris par l'enseignant.

2. Un nouvel outil pour partager : le « guide-âne »

Le pliage impose des dénominateurs qui sont des multiples simples de 2 voire de 3, le guide-âne permet de partager l'unité sans la plier et ainsi de travailler avec des dénominateurs quelconques. La situation amène à découvrir cet outil et à l'utiliser pour construire des segments dont la longueur est une fraction de l'unité inférieure ou supérieure à 1.

3. Fractions et graduations : « Règles graduées »

Dans cette situation, il s'agit tout d'abord de construire des outils plus pratiques et plus précis pour mesurer des longueurs et tracer des segments : ce sont des règles graduées. Elles sont ensuite utilisées pour installer la notion de droite graduée sur laquelle on peut placer des points. La fraction prend un nouveau statut, celui de nombre permettant de repérer un point sur une droite et de le situer par rapport à des entiers.

[2] Une version plus complète est mise en annexe.

4. Écritures équivalentes

Des écritures équivalentes ont déjà été rencontrées et utilisées dans les situations précédentes. Il s'agit maintenant de dégager des règles, pour produire et reconnaître de telles écritures.

B. Construire le nombre décimal

Cette partie vise à introduire l'écriture décimale et à interroger sa signification dans la construction de techniques opératoires sur les nombres décimaux. Les deux premières peuvent être proposées en CM1 ou plus tard dans le cycle avec des aménagements prévus. Les deux suivantes sont plus adaptées à des élèves de CM2 ou de 6ème.

5. Fractions décimales

Les élèves ont déjà rencontré les dixièmes dans les situations précédentes. Il s'agit maintenant de découvrir d'autres fractions décimales et de comprendre les liens qui lient entre elles. C'est aussi l'occasion de les décomposer sous la forme de sommes d'entiers et de fractions inférieures à 1 et de commencer à les comparer.

6. Écriture décimale : « Des bandes accolées » et « L'apprenti comptable »

En partant du cas particulier des fractions décimales et en s'appuyant sur les écritures équivalentes cette sixième situation est déclinée en deux versions :

- une version qui a pour but d'introduire l'écriture décimale en début de cycle 3,
- une autre version pour des élèves qui ont déjà rencontré l'écriture décimale, permet de revenir sur cette signification en s'appuyant sur « la Disme » de Simon Stevin.

A cette occasion, on découvrira ou on réinterrogera les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction avec des nombres en écriture décimale.

7. Fractions de surface : « Ranger des surfaces »

La notion de fraction partage de l'unité est réinvestie dans un autre contexte que celui des longueurs, celui des aires, pour réinterroger les liens entre fraction et nombre décimal. Ce nouveau support est utilisé pour réinvestir les techniques opératoires rencontrées dans la situation précédente et illustrer les règles de comparaison et de rangement de nombres en écriture décimale.

8. Multiplication d'un décimal par un entier : « Des rectangles à foison »

Les techniques opératoires sur les nombres en écriture décimale sont en grande partie similaires à celles mises en œuvre sur les entiers. Cette situation propose de fonder ou de redécouvrir les techniques dans le cas de la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1000, en référence à la signification des écritures, à partir de manipulations sur des axes graduées ou sur des surfaces.

C. Découvrir la fraction quotient

Ces trois situations portent sur les relations entre multiplication, division et fractions. Elles ont été conçues pour être proposées en fin de cycle 3.

9. Division et multiplication

Cette situation vise à instaurer une meilleure maîtrise du sens de la division en prenant appui sur la connaissance qu'ont les élèves de la multiplication. Elle cherche à mettre en défaut la conception erronée comme quoi on ne peut diviser qu'un nombre par un autre plus petit et à établir le lien entre multiplication et division.

10. Vers la fraction quotient : « Les Bonbons rubans »

La situation a pour but d'enrichir la notion de fraction avant de l'envisager en tant que quotient de deux entiers. Elle amène à la découvrir, dans un contexte de longueur, en tant que valeur d'une part dans un partage de plusieurs unités, puis de nombre, coefficient scalaire, par lequel on peut multiplier une longueur pour en obtenir une autre.

11. Fraction quotient

Il s'agit d'introduire une notion nouvelle : la fraction comme <u>nombre</u> solution de l'équation $ax = b$ ou comme quotient de deux entiers $a : b$. Pour cela la situation pose la question de la valeur du quotient de deux entiers dans un contexte purement numérique. C'est l'occasion de différencier quotient exact et quotient approché et de l'illustrer dans des problèmes de division.

D. <u>Enrichir la multiplication</u>

Ces situations visent à donner un nouveau sens à la multiplication autre que celui de l'addition réitérée. Elles sont proposées dans des contextes de grandeurs différentes et sont conçues pour la fin du cycle.

12. Multiplication et longueur

Cette situation amène les élèves à calculer des fractions de longueurs pour construire des segments. Elle vise à mettre en lien la notion de fraction opérateur, coefficient scalaire permettant de passer d'une fraction à une autre, avec l'opération multiplication et le symbole « × », puis à l'étendre au cas des fractions décimales.

13. Multiplication et proportionnalité

Après avoir défini ou revu, dans un contexte de proportionnalité, la multiplication d'un décimal par une fraction, on présente le cas particulier du produit d'un décimal par une fraction décimale, autrement dit de deux décimaux. On se demande ensuite comment poser la multiplication pour effectuer de tels produits en écriture décimale.

14. Multiplication et aire

Il s'agit d'étendre la formule de calcul de l'aire d'un rectangle au cas des dimensions décimales et de donner ainsi un autre sens à la multiplication de deux décimaux.

ANNEXE 2 Une sélection d'activités proposées à l'analyse lors de l'atelier

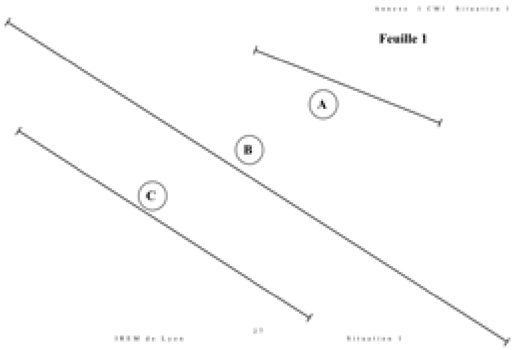
LE FACTEUR [3]

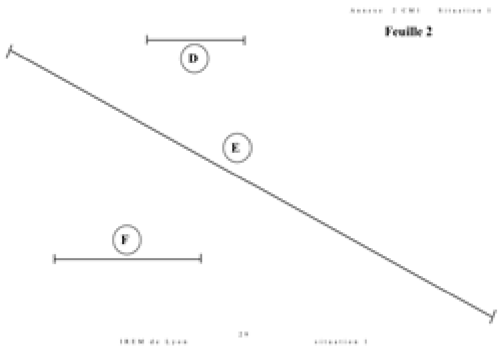
DESCRIPTION RAPIDE

- Les élèves disposent d'une feuille où sont tracés des segments. Ils doivent écrire des messages qui permettront à ceux qui les recevront de construire des segments de même longueur que ceux donnés. Ils travaillent en groupe. Les échanges de message se font par l'intermédiaire de l'enseignant qui joue le rôle de facteur.
- La règle graduée est interdite mais les élèves ont à leur disposition des bandes « unités ». les ciseaux sont interdits également.

MATÉRIEL : Pour chaque élève :

- des bandes-unités de 10,5 cm de longueur ;





- une feuille numérotée 1 ou 2 où sont tracés les segments que les élèves doivent arriver à faire reproduire
- une fiche-navette sur laquelle se font les échanges : tracés, confirmation ou invalidation, demandes d'informations supplémentaires

CONSIGNES

1. A l'aide de la bande unité, vous allez devoir mesurer un segment donné puis construire un segment de longueur donnée. Les groupes 1 et 2 n'ont pas les mêmes segments tracés sur leur feuille. La règle graduée et les ciseaux sont interdits.
2. Choisissez un des trois segments déjà tracés sur votre feuille. Mettez-vous d'accord sur un message que vous écrirez sur la fiche-navette. Ce message doit permettre au groupe auquel vous êtes associés de tracer un segment de la même longueur que celui que vous avez choisi. Je transmettrai le message à l'autre groupe. Le message ne doit pas comporter de dessin.
3. Lorsque vous recevez le message de l'autre groupe, vous coloriez sur la ligne droite déjà tracée un segment de la longueur indiquée. Vous pouvez aussi utiliser la fiche-navette pour demander des informations supplémentaires.
4. Vous envoyez à l'autre groupe le segment que vous avez colorié afin qu'il vérifie sa longueur. Si elle est juste, le groupe vous donne un autre segment à colorier. Si elle est fausse, il vous en informe et complète les explications.

[3] D'après « Construire les nouveaux nombres » (Canopé Editions)

REGLES GRADUEES[4]

DESCRIPTION RAPIDE

Les élèves disposent d'une bande unité et d'une règle à graduer. Ils sont invités à construire des « règles » graduées pour pouvoir ensuite tracer et mesurer des segments dont la longueur est exprimée par une fraction d'unité.

MATÉRIEL : Pour chaque élève :

- des bandes-unités de 10,5 cm de longueur ;

- un rectangle de papier de couleur à transformer en règle graduée (on peut massicoter des rectangles dans la longueur d'une feuille A4)

CONSIGNES

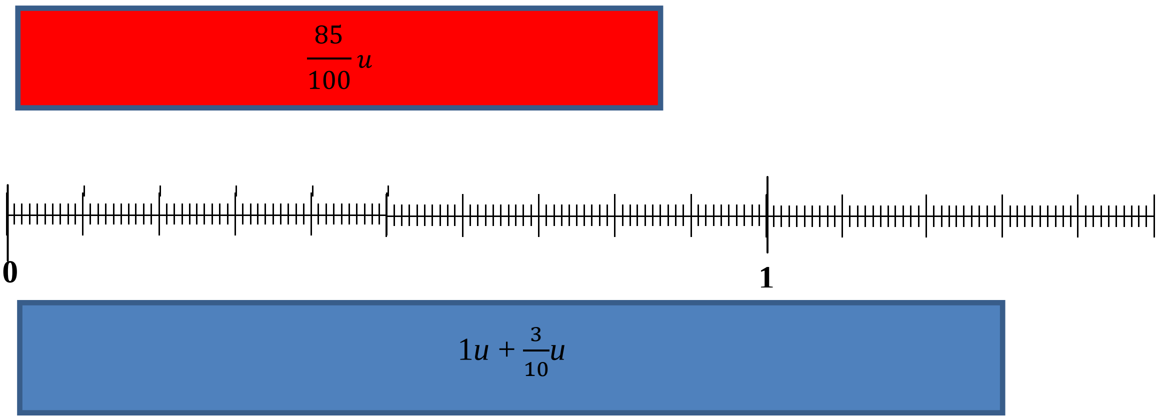
1. Cette règle n'est pas encore graduée. On veut pouvoir l'utiliser pour tracer des segments dont la longueur est exprimée en quarts de bande-unité. A toi de la graduer convenablement …
2. Compare ta règle avec celles de tes camarades. Lesquelles te paraissent être les mieux graduées ? Pour quelles raisons ?
3. Comment utiliser ces règles pour tracer un segment de longueur $\frac{9}{4}$ u ?
   Un segment de longueur $\frac{17}{4}$ u ?

[4] D'après « Construire les nouveaux nombres » (Canopé Editions)

BANDES ACCOLEES[5]

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures….

MATERIEL :



- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur 1u + $\frac{3}{10}$u et $\frac{85}{100}$ u à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.
2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de 1u + 3/10 u et de 85/100 u. (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettrez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

[5] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3» - Canopé (à paraitre)

L'APPRENTI COMPTABLE [6]

DESCRIPTION RAPIDE :

- Dans cette activité, les élèves se retrouvent dans un 1er temps plongés en l'an 1500. Ils disposent uniquement des écritures sous forme d'entiers, de fractions décimales ou de sommes de ceux-ci.

  Ils doivent trouver comment faire pour additionner des nombres écrits à l'aide de fractions décimales, puis écrire un court texte pour expliquer leur démarche.

- Dans un 2ème temps, après qu'ils se sont rendus compte que la majorité des méthodes proposées sont fastidieuses, la découverte de Stevin, « les nombres de Disme », leur est alors exposée : elle permet de calculer avec ces nombres « selon la vulgaire manière […] des nombres entiers ».

MATERIEL : l'énoncé !

> Nous sommes en l'an 1500 ap. J.C.
>
> A cette époque, les seuls nombres connus sont : les entiers, les fractions, les fractions décimales, et les sommes d'un entier et de fractions décimales.
>
> Tu apprends le métier de comptable.
>
> Pour ta formation, le comptable qui t'emploie t'a chargé, aujourd'hui, d'effectuer une addition. Ensuite, lorsque tu sauras faire, tu devras transmettre ton savoir-faire à un apprenti encore moins expérimenté que toi.
>
> Tu dois effectuer la somme des trois quantités écrites dans les cadres ci-dessous :
>
> $\boxed{27u + \frac{8}{10}u + \frac{4}{100}u + \frac{7}{1000}u}$ $\boxed{37u + \frac{6}{10}u + \frac{7}{100}u + \frac{5}{1000}u}$ $\boxed{875u + \frac{7}{10}u + \frac{8}{100}u + \frac{2}{1000}u}$

Pour chaque élève :
- L'énoncé

Pour les groupes :
- Une affiche ou tout support pouvant être projeté.

Pour le professeur :
- Le diaporama « la Disme »

CONSIGNES

1. Travaille seul. Lorsque tu auras terminé, écris une explication pour ton apprenti, sans attendre que tes camarades aient fini.
2. Mettez-vous d'accord, par groupe, sur une façon de procéder et rédiger un mode d'emploi.
3. Quelle impression te font toutes ces méthodes utilisées dans la classe ?

[6] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» - Canopé (à paraitre)

RANGER DES SURFACES[7]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves en binôme, ont à comparer des surfaces dont la mesure de l'aire leur est donnée en écriture décimale. Pour avoir un appui sur lequel fonder leur raisonnement, ils construisent d'abord une de ces surfaces, à l'aide de pièces dont les aires sont des fractions décimales de celle d'un rectangle unité donné.

PREREQUIS : Pour aborder cette activité, les élèves doivent avoir été familiarisés :

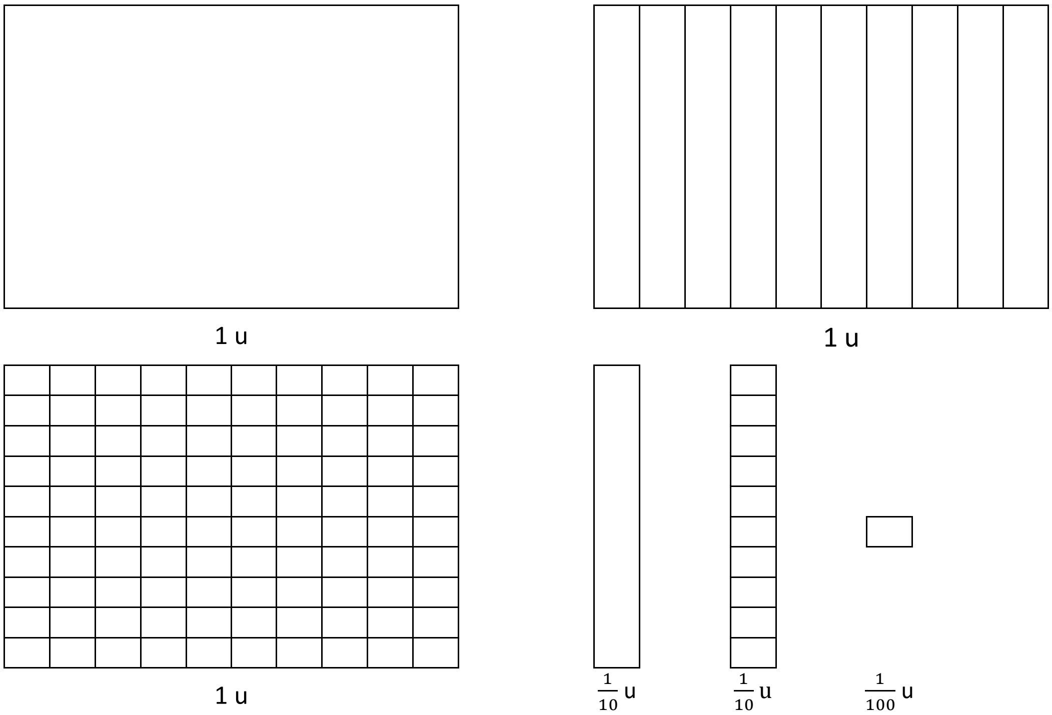
- Avec la notion d'aire
- Avec la notion de fraction décimale (dixième, centième)
- Avec la notion d'écriture décimale (en lien avec l'écriture fractionnaire d'un décimal)

MATERIEL : par binôme

- Une fiche « énoncé » donnant les indications suivantes :

surface	a	b	c	d	e	f
aire	5,05 u	10,24 u	2,7 u	5,5 u	2,12 u	2,08 u

- Des surfaces à découper, telles que celles présentées ci-dessous, en quantité suffisante :



Pour les mises en commun :

Des « surfaces à découper » en grand modèle manipulables au tableau, ou représentées sur TBI pour pouvoir être dupliquées.

CONSIGNES

1. Avec le matériel que je vous ai distribué, vous ne devez construire qu'une seule surface : celle qui correspond à la lettre que je vous ai indiquée (vous pouvez utiliser des ciseaux pour effectuer des découpages et votre colle pour coller votre surface réponse sur la feuille).
2. Ensuite, quand vous aurez terminé, vous rangerez toutes les surfaces, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, mais sans en construire de nouvelles, juste en regardant les nombres et en utilisant ce qu'ils veulent dire, vous écrirez votre rangement au dos de la feuille.

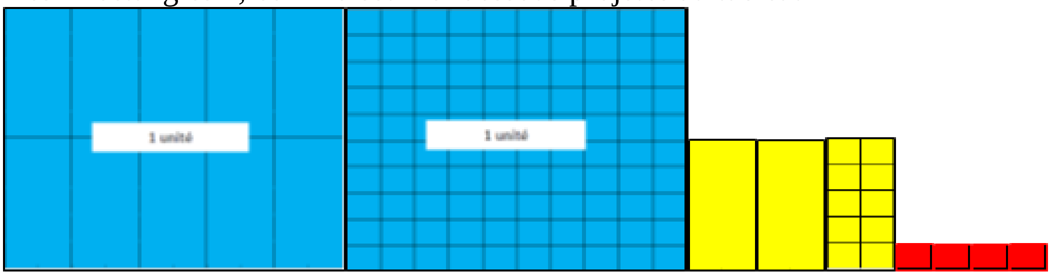
[7] Adapté de Capmaths- CM1 Hatier 2010

DES RECTANGLES A FOISON [8]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves manipulent des rectangles unités concrètement ou mentalement, pour déterminer l'aire d'une surface obtenue en les dupliquant un certain nombre de fois.

MATERIEL : Pour l'enseignant

- Des « rectangles », comme ceux-ci-dessous projetés au tableau



- Ces mêmes rectangles en grand modèle découpés (ou représentées sur TBI pour pouvoir être dupliqués) qui pourront être manipulés et échangés lors des mises en commun (au moins 23 bleus, 40 jaunes, et 10 rouges)
- Un tableau de numération « dynamique » dans lequel on peut faire coulisser (et grouper) des étiquettes chiffres, comme dans le tableau ci-dessous.

0	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0
						,				
millions	cent mille	dix mille	mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix millièmes

CONSIGNES

1. Déterminer la mesure en unités u de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 10 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge
2. Déterminer la mesure en unités u de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 100 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge

[8] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3»- Canopé (à paraitre)

LES BONBONS RUBANS [9]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de deux « bonbons » rubans : un ruban A qui mesure 3 unités, un ruban B qui en mesure 8. Ils doivent trouver combien de fois la longueur du ruban A est contenue dans celle du ruban B.

MATÉRIEL :

Bonbon ruban B

Unité

Bonbon ruban A

Pour le professeur :

- une bande unité ;
- quelques exemplaires du ruban A de longueur 3 unités et du ruban B de longueur 8 unités.

Pour chaque élève :

- des bandes longues comme le ruban A ;
- une feuille A4 sur laquelle construire le ruban B.

CONSIGNES

1. Le ruban A mesure 3 unités, le ruban B mesure 8 unités. A votre avis, le ruban B est long comme combien de fois le ruban A ?
2. Comment construire un segment de longueur 8 unités à partir du ruban A sans utiliser de règle graduée ?
3. Avez-vous changé d'avis ?

[9] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 » - Canopé (à paraitre)

At 21 : Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3
Quelles perspectives ?

Lalina Coulange[1], Grégory Train[2]

[12]Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux;

lalina.coulange@espe-aquitaine.fr gregory.train@espe-aquitaine.fr

Résumé : Dans cette contribution, nous abordons des questions didactiques relatives à différentes acceptions possibles des fractions (partage de l'unité, partage d'une grandeur, commensuration et quotient) potentiellement rencontrées au cycle 3. Nous faisons état d'une part, de résultats liés à une recherche collaborative avec des enseignants illustrant des potentialités et des limites de la « fraction partage » (en début de cycle 3) et d'autre part, de perspectives en lien avec une acception relativement oubliée au sein de l'institution, celle de la « fraction commensuration » (Brousseau et Brousseau, 1987) que nous considérons comme propices à aborder la « fraction quotient » et certaines de ses potentialités. Ces perspectives nous ont notamment conduits à élaborer et à « pré-expérimenter » une ressource destinée à des élèves de fin de cycle 3, qui a été présentée à l'occasion de ce colloque.

Mots clefs : fractions, partage, commensuration, quotient

Introduction

Notre étude concerne l'enseignement de l'objet « fraction » dans la transition primaire-secondaire inscrit depuis 2016 au sein d'une nouvelle organisation institutionnelle reposant sur un unique cycle 3. Les écueils que pose l'enseignement de cet objet de savoir dans cette transition sont largement documentés (voir la conférence de C. Chambris dans les actes du colloque[1]). Au-delà de ces constats, et compte tenu de la volonté institutionnelle, récemment renouvelée, de maintenir cet objet d'enseignement au cœur du nouveau cycle 3, nous adoptons une perspective différente à plusieurs égards. Il s'agit d'examiner les potentialités que recouvre l'étude de l'objet fraction dans cette transition, d'examiner les possibilités qu'offre l'étude, dans l'une et l'autre des institutions, des différentes acceptions de la notion de fraction. Cette posture nous amène à reconsidérer une acception quelque peu oubliée des fractions - l'aspect *commensuration* – et à en examiner son étude comme élément possiblement fédérateur.

Les réflexions développées dans ce texte prennent appui largement et s'inscrivent dans un projet plus large d'observations et d'analyses des pratiques enseignantes au sein d'un Lieu d'Education Associé aquitain (le LéA Ecole élémentaire d'application Carle Vernet accueillant des élèves situé dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux[2]).

[1] Conférence : Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle , p 12
[2] Pour plus d'informations, voir sur le site des LéA de l'IFE (Institut Français d'Education) : http://ife.ens-lyon.fr/lea

Les différentes acceptions de la notion de *fraction*

Deux acceptions institutionnelles : la fraction "partage" et la fraction "quotient"

Dès 1996, les programmes de la classe de sixième présentent le point de vue nouveau à construire concernant la fraction $\frac{a}{b}$

A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :

- *le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,*
- *le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.*

Ceci permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre. Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités (programmes de la classe de 6e de 1996[3], p. 6)

Cette nouveauté est réaffirmée dans les nouveaux programmes de 2016 ainsi que dans les documents ressources associés. Dans le même temps, ces mêmes programmes proposent une réorganisation du cycle 3 (CM1-CM2-Sixième). Ils positionnent en conséquence l'étude de cette nouvelle acception de la fraction $\frac{a}{b}$ comme *quotient* (décrite ci-avant) en aval d'une acception plus anciennement installée, la fraction $\frac{a}{b}$ vue dans son aspect *partage*[4], au cœur même de ce cycle.

Du CM1 à la 6e, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6e (programmes de 2016[5])

Il s'agit donc, dans ce passage d'une fraction *partage* à une fraction *quotient*, ancré traditionnellement dans le passage de l'école au collège, de poursuivre les objectifs communs de construction du statut de nombre à attribuer à $\frac{a}{b}$ (sur lesquels les élèves seront par la suite amenés à *opérer* – addition, soustraction, multiplication, division) tout en pensant l'aménagement d'une progressivité au sein de ce cycle.

Des constats sur la *fraction partage*

Un premier constat est que *les élèves arrivent à l'école avec des « connaissances familières » ou des « concepts quotidiens » du fractionnement de l'unité* et que ces connaissances jouent un rôle important dans les situations visant l'enseignement de la fraction « partage de l'unité ».

Une ressource unique, visant à introduire les fractions en lien avec la mesure de longueurs a été utilisée par trois enseignantes du LéA, dans les séances observées au sein de trois classes de double niveau (2 classes de CM1-CM2 et 1 classe de CE2-CM1), comportant des groupes d'élèves de CM1 (d'effectif : de six à environ dix élèves par classe). L'enjeu de ces situations[6] est d'introduire le fractionnement de l'unité pour mesurer des longueurs de segments avec une bande unité (qui sert d'étalon de longueurs). Les segments sont choisis de manière à ce que leurs mesures fassent intervenir des demis, des quarts et des huitièmes de l'unité. Le procédé attendu repose sur des

---

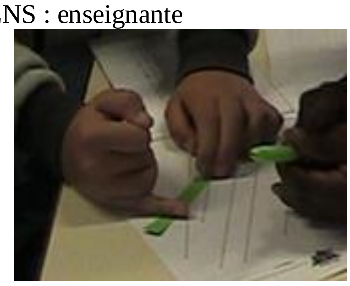
[3] Ce programme est disponible sur : *www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_N.php?num=61&rang=10 (voire la page 118, pour l'extrait cité dans le texte).*

[4] « Lorsque qu'on coupe une unité en un nombre entier de parts égale et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction. » (p. 1 du document ressource du programme de 2016, disponible sur : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf)

[5] Accessibles sur http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708)

[6] Ces situations sont tirées de l'ouvrage ERMEL *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* CM1 (2005) – elles sont inspirées d'une ingénierie didactique (Douady et Perrin 1986)

pliages en deux successifs de bande qui permettent de matérialiser des fractions de l'unité et de mesurer/communiquer la mesure des segments donnés initialement aux élèves, dans un dispositif d'émission et de réception de messages entre pairs. A l'occasion des séances observées, nous avons constaté que peu d'élèves ont mis en œuvre des pliages en deux de la bande unité de façon spontanée. Les élèves ont reconnu perceptivement des demis, voire des quarts de l'unité. Le milieu matériel de la situation ne contraint pas *a priori* de stratégies liées au pliage dans la production du « quart » ou de la « moitié », qui s'avèreront pourtant nécessaires pour la production du huitième de l'unité (non reconnaissable de manière perceptive). On peut d'ailleurs s'interroger sur le sens donné à ce « quart » ou à cette « moitié » par les élèves : par exemple envisagent-ils le quart comme un partage équitable en quatre de l'unité, ou en deux de deux de l'unité ? Quoiqu'il en soit, lors de nos observations, les enseignantes ont été contraintes de négocier l'introduction du procédé de pliage en deux : en le faisant apparaître comme un moyen de valider qu'il s'agit bien d'un demi ou d'un quart de l'unité – en lien avec le caractère superposable prouvant l'égalité des nouvelles longueurs produites. L'extrait de transcription ci-dessous atteste du type d'interactions entre élèves et enseignantes permettant d'officialiser l'introduction du procédé de pliage.

<table>
<tr>
<td>E1 : ça c'est un quart [cf. geste ci-contre]
ENS : Comment tu sais ? Comment tu peux être sûr ? [E hausse les épaules] ENS : Comment tu peux être sûr ? E1 : C'est environ vers là
ENS : Oui mais si on veut pas dire environ vers là ? Comment on fait ? ça veut dire quoi un quart de l'unité
E1 : C'est la moitié… c'est moins que la moitié
L : La moitié ça veut dire quoi pour toi la moitié ?
E1 : La moitié c'est là [en montrant le milieu de la bande unité]
ENS : Comment tu sais que c'est la moitié ?
E1 : Ben parce que – il y a le mi [lieu ?] // il y a le même espace des deux côtés / ENS : Pour être sûr comment tu fais ? Pour être sûr de ça ?
E1 : [prenant un stylo] je vais mesurer avec ça
ENS : On n'a pas le droit de mesurer avec ça [léger rire de ENS – E1 : pourquoi] parce que il faut juste / parce que/ tu te sers de la bande unité /// comment tu peux être sûr ? / que là c'est la moitié comme tu dis ?
E1 : On peut mesurer avec notre doigt / E2 : On plie
ENS : Comment ? Comment E2 ?
E2 : On le plie / ENS : On le plie comment ?
E2 : Comme [E2 prend la bande unité et la plie en deux]
E2 : Les CM2 ils ont fait comme ça la dernière fois
ENS [en prenant la bande unité pliée] : ça c'est quoi alors ? [en la dépliant et en pointant une partie correspondant à une moitié] si vous faites ça c'est quoi là ?
E1 et E2 : La moitié / ENS : La moitié – un demi d'accord d'une unité // [en remontrant le message] sauf que lui il veut/ eux / ils vous parlent de quart ? / E1 : Donc il faut encore le plier
ENS : Pourquoi ? [E replie en deux la bande unité déjà pliée en deux] Pourquoi tu le plies encore ? / E : Pour faire un quart
ENS : Pourquoi ? ça veut dire quoi un quart pour toi ?
E1 : Celui qui a fait ça // un quart / ENS : Pourquoi ? c'est quoi un quart pour toi ? ça [en reprenant la bande pliée en 4 - dépliée] ça veut dire que tu as fait quoi pour obtenir un quart ?
E2 : C'est plié / ENS : En combien / E2 : En quatre
ENS : Alors il est où le quart [E2 montre une part] D'accord</td>
<td>E1, E2 : binôme d'élèves
ENS : enseignante

L'élève a reconnu perceptivement un quart de l'unité (sans doute comme « moitié de la moitié »).
Il fait de même pour « la moitié » en réponse à la question de la maîtresse – le caractère d'égalité de longueurs est mis en avant.

L'enseignante pointe la nécessité d'un moyen de valider ce caractère d'égalité pour faire émerger le pliage en deux.
Déplacement de signification en lien avec le pliage : la moitié de l'unité est obtenue par un pliage en deux.

Prolongement du procédé du pliage et extension de signification au quart de l'unité
Le « plié en quatre » est énoncé pour réduire la distance entre l'action de pliage et le résultat de l'action – l'obtention de 4 parts</td>
</tr>
</table>

Figure 1 : Négociation liée au procédé de pliage d'une bande unité

Cet extrait illustre également d'un deuxième constat, fait sur la base de nos observations dans les classes : il s'agit *de tensions récurrentes entre les actions des élèves et les résultats de ces actions*. En effet dans les situations de classe observée, les institutionnalisations se centrent moins les actions (de pliage, de partage…) des élèves, que sur l'analyse des résultats de ces actions. Ainsi dans la situation évoquée ci-avant, le huitième de l'unité est obtenu par un pliage en deux du quart de l'unité – lui-même obtenue par un pliage en deux de la moitié de l'unité, etc. Notons que dans une des trois classes, les élèves (ne disposant pas d'une dénomination « familière ») le qualifient d'ailleurs de « moitié du quart » ou de « demi-quart ». Ce n'est que par le biais d'une intervention enseignante, que le lien sera fait entre ce « demi-quart » et un partage en huit qui conduit à (re)définir le huitième de l'unité.

E : un demi quart ENS : un demi quart – je le plie en deux ? ENS : Ah génial un demi quart [L écrit à la suite de « 2u + » -«$\frac{1}{2}$- » puis se reprend – efface] alors je vais l'écrire comme ça un demi quart [un demi $\frac{1}{4}$-]. Est-ce que quelqu'un a trouvé autre chose qu'un demi-quart ? Personne n'a trouvé autre chose que un demi quart ? C'est très intéressant ce que vous avez trouvé / alors on va voir avec une bande unité / ici j'ai ma bande unité d'accord ? (…) Comment je fais pour trouver un demi quart ? Je commence par faire quoi ? [E : plié en deux] Je le plie en deux / là j'ai des [E : demi] demi / d'accord / E : tu continues tu replies et tu replies encore une fois ENS : et je le replie encore ? / E : en deux ENS : parce que là j'ai des quarts et tu m'as dit un demi quart / je le replie en deux ? / E : en deux parts égales / ENS : Oui / merci en deux parts égales / Es (en chœur) : et ça fait un demi quart	E : élève ENS : enseignante *L'enseignante prend en compte la formulation des élèves, l'évalue et rend publique la désignation « demi-quart ». Elle la stabilise provisoirement en l'écrivant au tableau et en mélangeant après hésitation, des écritures alphabétique et numérique.*
ENS : Alors regardez je viens de faire un demi quart / un demi quart // [ENS déplie la bande unité] Regardez / qu'est-ce que vous voyez / [E : ça fait beaucoup] oui / regardez combien il y en a ? Regardez combien de parts il y a ? E : un deux trois quatre cinq six sept huit ENS : oui huit / un demi quart on pourrait l'appeler autrement alors ? E : un huitième / ENS : Pourquoi ? Pourquoi BE dit un huitième E : Parce qu'il y en a huit / parce qu'il y a huit parts égales ENS : on a partagé en / t'as vu CH // c'était très intéressant de dire un demi quart / Bon un demi quart on se rend compte que finalement c'est un deux trois quatre cinq six sept huit / donc on est en huitième	*L'enseignante négocie un changement de point de vue sur le résultat de l'action – en faisant « le demi du quart » de l'unité on a partagé l'unité en huit* *Désignation dans un genre de discours premier par un élève du « huitième » et mise en relation avec le nombre de parts égales de l'unité*

Figure 2 : Du demi-quart au huitième de l'unité

Notons que c'est bien le résultat de l'action (un partage en huit de l'unité) qui sera institutionnalisé que ce soit dans un affichage associée à la situation (faisant apparaître la bande unité pliée en huit dépliée, faisant ainsi apparaître des huitièmes de l'unité) ou dans les sommes d'écritures fractionnaires symboliques associées ($\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ ou $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$). L'écriture symbolique $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}(\frac{1}{4})$ n'a pas le « droit de cité » dans les classes observées (alors qu'elle est plus proche de l'action de production du huitième de l'unité[7]) pour des raisons que l'on comprend d'ailleurs assez bien : la multiplication de fractions n'est pas au programme à ce niveau scolaire alors que cette écriture y renvoie potentiellement du point de vue des enseignantes.

Pourtant nous faisons un autre constat en lien avec celui qui vient d'être évoqué. Dans les situations observées, liées à l'enseignement de la fraction dite partage de l'unité dans des classes de CM1, *des partages (en deux) des fractions de l'unité interviennent de manière récurrente.* Ainsi nous constatons qu'un quart est d'abord défini comme la moitié d'un demi, un huitième comme la moitié

[7] Une telle écriture était pourtant envisagée dans l'ingénierie originale (Douady et Perrin 1986), mais n'est pas reprise dans les ressources Ermel (2005).

d'un quart, mais également lors d'une des séances observées, un sixième de l'unité est construit comme la moitié d'un tiers de l'unité.

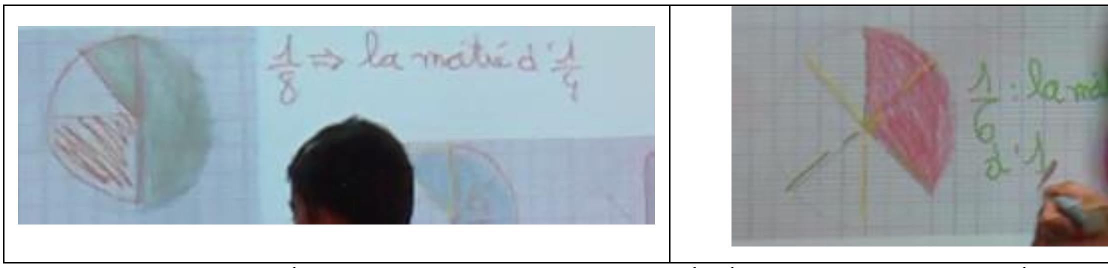


Figure 3 : $\frac{1}{4}$ définie comme la moitié de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ comme la moitié de $\frac{1}{3}$

C'est donc un opérateur partage « plus large » que le seul partage de l'unité qui est convoqué. Nous constatons par ailleurs que *cet opérateur partage d'une unité mais aussi de $\frac{1}{n}$-ièmes d'une unité supporte des raisonnements associés à la production d'équivalences d'écritures fractionnaires qui constituent une potentialité de la « fraction-partage »*. Lors d'une des séances observées, une enseignante a demandé à ses élèves de CM1 de produire des écritures équivalentes à 1/2 (le plus possible). Des élèves ont produit une première proposition erronée sur la base d'une mauvaise interprétation de leur schéma : $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}$. L'intervention d'un autre élève de la classe sollicitée par l'enseignante permet d'invalider cette proposition et de l'amender – en précisant que ce qui était considéré comme $\frac{1}{8}$ de l'unité était en fait $\frac{1}{6}$ puisque correspondant à la moitié de $\frac{1}{3}$ de l'unité, ce qui permet de produire l'équivalence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

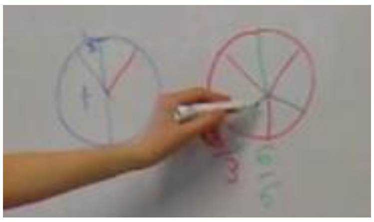
vous êtes d'accord ? *ENS montre chaque part* un deux trois quatre / cinq / six donc on a six sixièmes *l'élève écrit à côté de $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$ en vert/* donc ici vous avez quoi *toujours un tiers- ENS reprend l'exemple sur la deuxième figure retrace le contour et zèbre l'espace d'un tiers en vert et pointe $\frac{1}{3}$- sur les deux figures* plus // ENS écrit $\frac{1}{6}$ // tu es d'accord E ? tout le monde est d'accord donc un demi égale un tiers plus un sixième *ENS écrit au tableau à la suite de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$*	

Figure 4 : de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

Notons qu'un tel raisonnement se fait toujours *via* la relation entre des actions de partage de l'unité ou de fractions de l'unité (la moitié d'un tiers) et les résultats de ces actions en référence à l'unité (on en obtient six parts, soit des sixièmes de l'unité). Toujours au sein de la même classe, c'est aussi une généralisation de ce type de raisonnements qui va être formulée –en référence à l'opérateur partage. En effet les élèves ayant constaté à travers différents exemples qu'une écriture fractionnaire avec un dénominateur double du numérateur paraît toujours équivalente à $\frac{1}{2}$, l'enseignante généralise cette « trouvaille », en la recontextualisant dans l'univers du partage d'unités.

ENS : alors c'est quoi c'est quoi voilà égale un demi L'élève écrit $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ est-ce que vous en avez trouvé d'autres ?
E : sept quatorzièmes *E écrit* $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ENS : tu peux leur prouver que sept quatorzièmes c'est bien un demi ? oh oh je vous parle est-ce que vous pouvez leur prouver que sept quatorzièmes c'est bien un demi les deux élèves échangent entre eux *E trace un disque* non mais sans le dessin leur prouver alors (…) est-ce que sept c'est bien la moitié de quatorze ? (…) donc si je partage quatorze et que je prends sept parts tu es d'accord E ou pas ? est-ce que sept quatorzième ça fait bien un demi si je partage en quatorze et que je prends sept parts est-ce que j'ai bien la moitié (…) ah les dixièmes *E écrit* $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ // tout le monde est d'accord ou pas bon donc du coup pour trouver les équivalences à un demi quelqu'un a une technique ? /// comment on fait pour trouver des équivalences à un demi ? (…)
E : un centième un centième ! et la moitié c'est cinquante

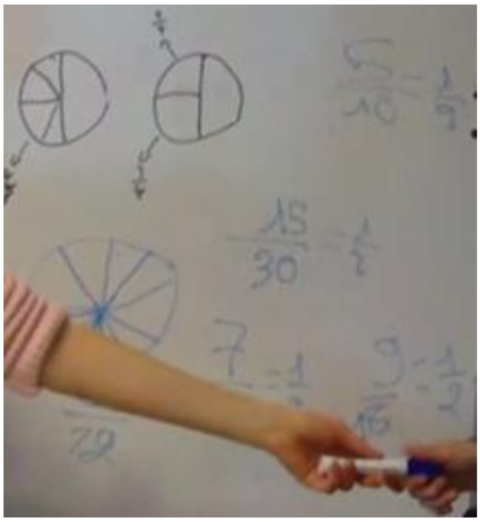


Figure 5 : la généralisation d'un raisonnement permettant la production d'écritures fractionnaires équivalentes à $\frac{1}{2}$

Des constats sur la fraction « quotient »

Penser cette nouvelle acception quotient de $\frac{1}{2}$passe par l'examen de ses potentialités, en termes de possibilités offertes dans la réorganisation de savoirs anciens et aussi, en termes de prises d'appui possibles dans la construction de savoirs nouveaux. Nous dressons un certain nombre de constats dans ce sens, ci-dessous.

Si l'écriture à virgule des nombres décimaux est classiquement présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale (ou d'une somme de fractions décimales), regardée sous son aspect *partage*, la relation entre écriture à virgule et *quotient* peut relever d'une nouveauté. De ce point de vue, *36,45 peut (doit) être alors (re)vu comme le nombre (unique) qui multiplié par 100 donne 3645*. C'est une *définition* nouvelle d'un nombre décimal qui peut alors s'installer : « *un nombre décimal est un nombre qui multiplié par 1, 10, 100… donne un nombre entier* ». Cette définition actée, une justification du produit de deux décimaux peut être donnée en lien direct avec l'algorithme de la multiplication posée de deux entiers :

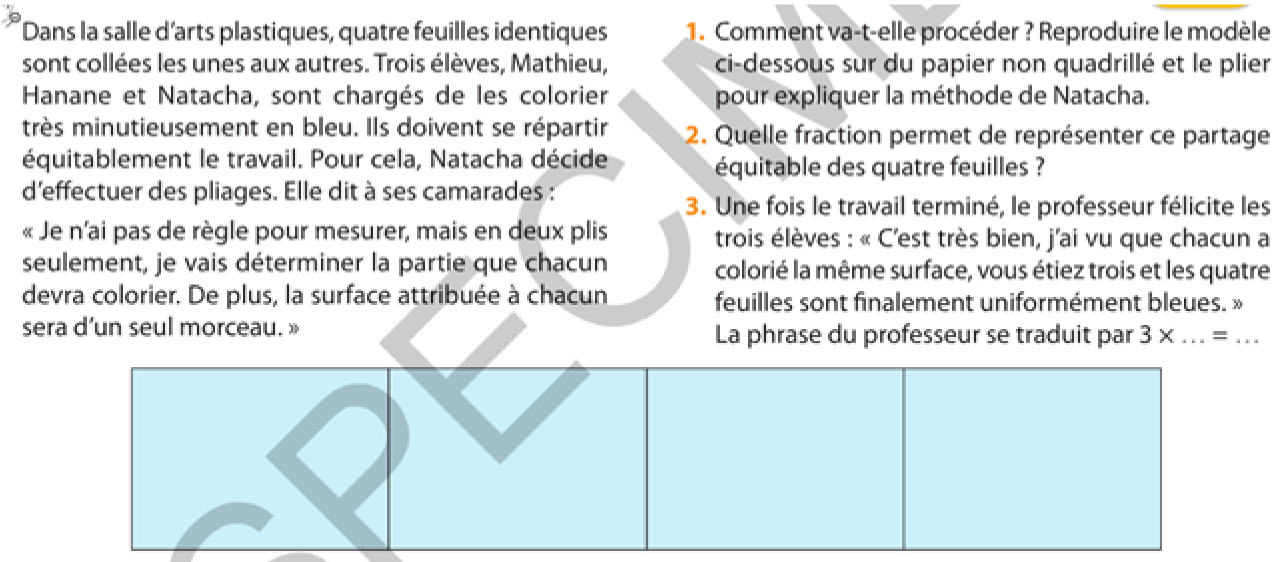
si l'on s'intéresse au produit P = $3{,}7 \times 5{,}3$ *on a* $3{,}7 \times 10 = 37$ *et* $5{,}3 \times 10 = 53$ *; puis* $37 \times 53 = (3{,}7 \times 10) \times (5{,}3 \times 10) = 3{,}7 \times 5{,}3 \times 100 = P \times 100$. *P est donc le nombre qui multiplié par 100 donne* 37×53*…*

Plus généralement, le produit de deux décimaux est le nombre qui multiplié par 1, 10, 100… donne le produit de deux entiers.

Si $\frac{7}{4}$ peut toujours s'appréhender dans son double aspect « *partage* » et « *quotient* », il en est autrement de $\frac{7}{-4}$ Comment envisager le partage de 7 en -4 ? En revanche, à partir du produit de deux décimaux relatifs préalablement installé à la partir de l'aspect quotient, *on peut rapprocher*$\frac{7}{-4}$ *du nombre unique qui multiplié par -4 donne 7 à* $(-4) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 7$ *pour conclure à l'égalité*$\frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$.
Plus généralement, il est possible d'établir ainsi que $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Ces quelques constats n'épuisent[8] pas la liste des potentialités qu'ouvre l'aspect *quotient* de $\frac{b}{a}$

Toutefois, la question de l'articulation entre les deux aspects *partage* et *quotient* des fractions est délicate et reste entière. Des tentatives d'articulation sont présentes dans différents manuels scolaires (de Sixième) mais elles témoignent souvent du caractère délicat de cette entreprise.



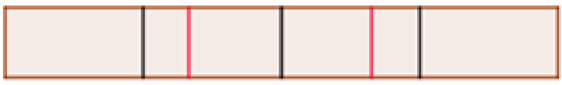
Dans la salle d'arts plastiques, quatre feuilles identiques sont collées les unes aux autres. Trois élèves, Mathieu, Hanane et Natacha, sont chargés de les colorier très minutieusement en bleu. Ils doivent se répartir équitablement le travail. Pour cela, Natacha décide d'effectuer des pliages. Elle dit à ses camarades :

« Je n'ai pas de règle pour mesurer, mais en deux plis seulement, je vais déterminer la partie que chacun devra colorier. De plus, la surface attribuée à chacun sera d'un seul morceau. »

1. Comment va-t-elle procéder ? Reproduire le modèle ci-dessous sur du papier non quadrillé et le plier pour expliquer la méthode de Natacha.
2. Quelle fraction permet de représenter ce partage équitable des quatre feuilles ?
3. Une fois le travail terminé, le professeur félicite les trois élèves : « C'est très bien, j'ai vu que chacun a colorié la même surface, vous étiez trois et les quatre feuilles sont finalement uniformément bleues. » La phrase du professeur se traduit par 3 × … = …

Figure 6 : Fraction quotient – extrait du manuel Mission Indigo 6e

Dans l'extrait ci-dessus, il s'agit de prendre appui sur le pliage en trois de quatre feuilles pour aménager ce passage de la fraction *partage* à la fraction *quotient*. Notons d'abord que le pliage en 3 envisagé semble aller de soi pour les élèves. Aussi, le fait d'accoler les quatre feuilles les unes aux autres apparaît comme seule garantie pour détourner le regard des élèves du partage « d'une unité feuille » au partage « de quatre unités feuilles ». Pourtant à ce stade de l'activité, les élèves disposent d'un modèle faisant co-exister le pliage en trois et la référence à l'unité « feuille ».

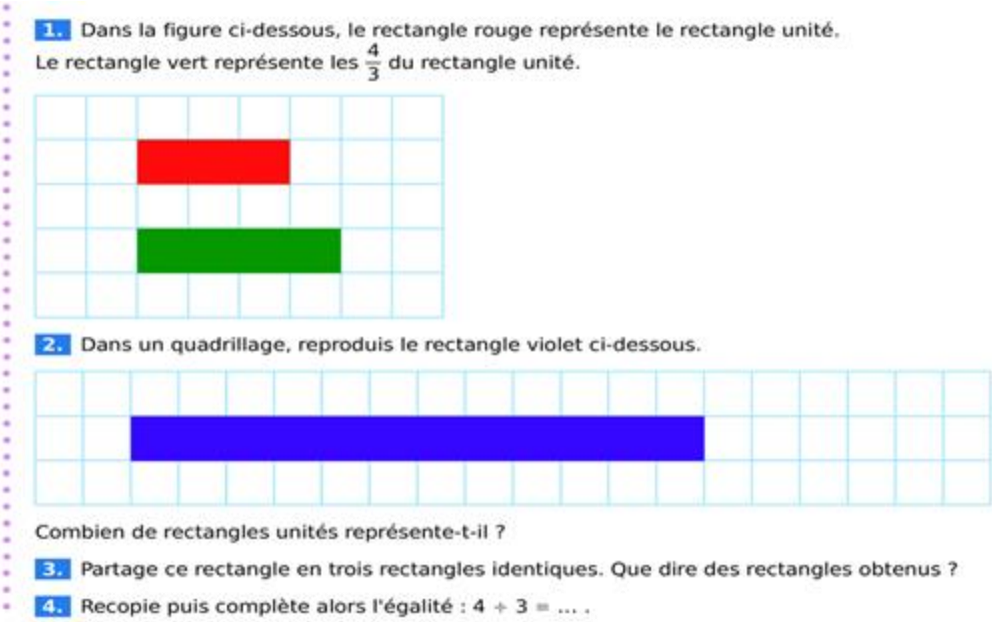


Le caractère problématique s'exprime peut-être plus fortement dans la dernière question de cette ressource. Interrogés sur les actions qu'ils viennent de conduire, au mieux, les élèves pourront-ils dire qu'ils ont obtenu « un tiers » de quatre feuilles, mais le projet est tout autre et on ne voit pas bien comment le passage envisagé à « $3 \times \frac{4}{3} = 4$ » ne pourrait se faire sans une action forte de l'enseignant.

L'extrait de manuel cité ci-dessous partage le même projet. Toutefois, le caractère problématique semble s'exprimer, de manière peut-être plus appuyée encore, dans les différentes grandeurs « unités » en jeu dans le scénario et les rôles qui leurs sont assignés dans les différents raisonnements à conduire. La présence d'un quadrillage est au cœur de cette difficulté. Ainsi, dans la première question, si le rectangle rouge est d'emblée déclaré comme rectangle unité, c'est à ce stade, le carreau *unité* du quadrillage qui est seul point d'appui pour apprécier la fraction représentée par le rectangle vert. Les questions suivantes entretiennent la même confusion. La reproduction du rectangle violet (question 2) mais également son partage en trois rectangles

[8] Le lecteur pourra par exemple penser à la justification de la somme, du produit, etc. de deux quotients.

identiques (question 3) convoquent fortement le carreau *unité*, alors que le projet, semble-t-il, est de s'en défaire. En tout état de cause, la dernière question apparaît assez éloignée de ce que les élèves auront effectivement réalisé. Au mieux, auront-ils remarqué que *« 4 rectangles rouges = 3 rectangles verts »*, entretenant une distance certaine avec l'égalité à compléter.



1. Dans la figure ci-dessous, le rectangle rouge représente le rectangle unité. Le rectangle vert représente les $\frac{4}{3}$ du rectangle unité.

2. Dans un quadrillage, reproduis le rectangle violet ci-dessous.

Combien de rectangles unités représente-t-il ?

3. Partage ce rectangle en trois rectangles identiques. Que dire des rectangles obtenus ?

4. Recopie puis complète alors l'égalité : 4 ÷ 3 = … .

Figure 7 : Fraction quotient – extrait du manuel Sésamaths 6e

Vers une autre acception de la fraction $\frac{a}{b}$ dans le contexte des grandeurs : extension d'un opérateur de partage ?

Le contexte particulier de la grandeur longueur est classiquement évoqué pour illustrer les différences entre l'aspect *partage* et l'aspect *quotient* de la fraction.

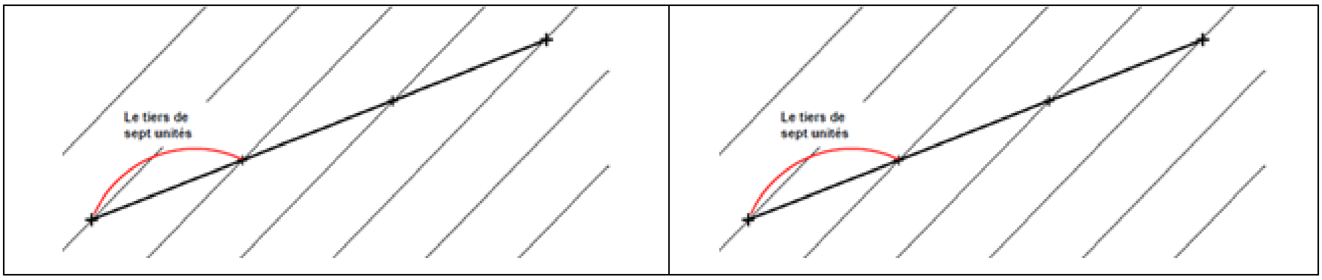


Figure 8 : Grandeur longueur et Fraction partage – Fraction quotient

Dans ce contexte, la construction d'un segment de longueur $\frac{7}{3}$ cm prenant appui sur l'aspect *partage* renvoie aux actions suivantes (outillées par un instrument particulier : le « guide-âne », un réseau de droites parallèles permettant le partage d'un segment de longueur donnée en segments de longueurs égales) : un segment de longueur 1 cm partagé en 3 segments de même longueur, puis le report de ce segment de longueur « un tiers de cm » qui permet d'obtenir un segment de longueur $\frac{7}{3}$ cm (7 fois $\frac{1}{3}$ cm). Du côté de l'aspect quotient, la même construction s'organise ainsi : un segment de longueur 7 cm que l'on partage en 3 segments de même longueur (le $\frac{1}{3}$ de 7 cm).

Si ce contexte des longueurs illustre bien les différences entre *partage* et *quotient*, l'idée de *partage* d'une grandeur apparaît également comme un dénominateur commun des deux constructions envisagées. De ce point de vue, la construction *quotient* vise étendre l'action de partage à une grandeur autre que la grandeur *unité* (pour les fractions unaires, les constructions *partage* et *quotient* se superposent.). Ce geste de partage d'une grandeur autre que la grandeur *unité* est par ailleurs un geste mathématique potentiellement rencontré en amont par les élèves, comme l'illustrent les exemples développés ci-avant sur le *partage* de subdivisions de l'unité. Ainsi le tiers de 7 unités, c'est bien partager en en trois « 7 unités », comme on a partagé « une unité » en trois, mais également « $\frac{1}{3}$ d'unité » en deux, etc.

Ceci étant dit, se pose la question d'une prise d'appui sur cet opérateur de *partage étendu* (c'est-à-dire non restreint au partage « d'une unité ») dans le contexte de la mesure pour investir l'étude de nouveaux savoirs concernant l'objet fraction.

Considérons en premier lieu, la double égalité $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = \frac{c}{b} \times a$. Son examen dévoile une certaine complexité, liée aux rôles assignés aux différents « nombres grandeurs » potentiellement impliqués dans cette égalité. En considérant $13 \times \frac{5}{7} = \frac{13 \times 5}{7} = \frac{13}{7} \times 5$ sans faire abstraction des grandeurs, on peut considérer que « 13 fois le septième de 5 unités » est égal au « septième de 13 fois 5 unités ». Mais comment établir dès lors la dernière égalité, à savoir le fait que ces deux « expressions » sont également équivalentes à « 5 fois le septième de 13 unités » ?

Certes, cette équivalence (des deux premiers membres de l'égalité $13 \times \frac{5}{7} = \frac{13 \times 5}{7}$; $\frac{13 \times 5}{7}$ et le suivant $\frac{13}{7} \times 5$) est vraie mais du point de vue des « nombres grandeurs », le rôle assigné à 13 auparavant change radicalement : d'opérateur (« 13 fois »), il devient une grandeur (« 13 unités »). Notons par ailleurs que même débarrassée des grandeurs, cette difficulté ressurgit sous une autre forme, non moins délicate, au niveau des structures en jeu dans le calcul : pour effectuer le produit d'un nombre et d'un quotient, il s'agit de calculer le produit d'un autre quotient par un autre nombre ($13 \times \frac{5}{7} = \frac{13}{7} \times 5$)

Une autre acception possible dans le contexte des grandeurs : la fraction *commensuration*

Ces premiers constats conduisent à s'interroger sur une autre acception possible (que liée à l'opérateur partage d'une unité ou de plusieurs unités) de la fraction quelque peu oubliée dans le curriculum : la fraction *commensuration*. Dans ce point de vue, $\frac{a}{b}$ est interprété comme le rapport de deux grandeurs tel que *b* fois la première donne *a* fois la seconde.

Une expérimentation déjà ancienne menée par Brousseau et Brousseau (1987) au sein de l'école Michelet (élèves de CM) propose une approche de la fraction *commensuration*. La situation proposée consiste à déterminer l'épaisseur d'une feuille de papier en évaluant la hauteur d'un tas de feuilles empilées. La mesure de l'épaisseur $\frac{a}{b}$ de cette feuille (que l'on peut considérer comme la grandeur « millimètre par feuille ») est alors définie par le fait que *b* feuilles *mesurent a* millimètres.

Cette définition, dans le cadre des grandeurs, partage une proximité forte avec la caractérisation de $\frac{a}{b}$ comme le nombre qui multiplié par *b* donne *a* : si $\frac{a}{b}$ est l'épaisseur d'une feuille, c'est bien que b feuilles d'épaisseur $\frac{a}{b}$ *mesurent a* millimètres.

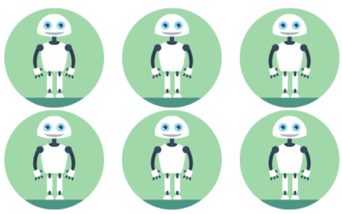
Dans le même temps, la fraction *commensuration* s'écarte volontairement de l'idée de *partage* (y compris étendu à plusieurs unités). Choisir un objet à mesurer (la feuille de papier) beaucoup plus petit que l'unité (le mm) engage à augmenter le nombre de feuilles b mais dans une direction éloignée de celle de partage : le rôle joué ici par b se distingue fortement de celui qu'il joue dans les autres acceptions de la fraction, étudiées préalablement. Si l'idée de partage existe, elle est celle du partage du millimètre, précisément *trop petit* pour être effectivement partagé : $\frac{a}{b}$ apparaît alors comme un résultat que l'on ne peut pas *effectuer* mais qui caractérise bien un résultat : la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier.

Les travaux sur l'aspect *commensuration* de la fraction semblent s'être taris par la suite. Une exception réside toutefois dans la situation dite des « automates » ou des « robots » (Ermel 1982, Cerquetti-Aberkane[9] 1992, Neyret 1995, Pressiat[10] 2009) qui a pu être exploitée de façon très isolée et dans des contextes parfois très différents (enseignement des fractions à l'école, formation des enseignants du primaire, remédiation au collège). Notons que le rôle de cette situation en lien avec l'aspect *commensuration* a été mis en avant par Neyret (1995).

Les robots, des situations liées à la *fraction commensuration*

En prise d'appui sur ces différents travaux, un scénario de classe a été construit visant à rapprocher la situation des « robots » de celle des « feuilles de papier » en vue de travailler l'aspect *commensuration* de la fraction. Nous ne rentrons pas ici dans le détail des aménagements ainsi apportés dans la conception de ce scénario. Il est toutefois un aménagement important : si la situation telle que conçue à l'origine, nécessitait l'utilisation d'un guide-âne, nous avons choisi de ne plus l'utiliser dans ce nouveau scénario car d'après nous, cet instrument pouvait induire un point de vue *partage* (étendu à plusieurs unités) à même de brouiller le point de vue *commensuration* de la fraction visé. Nous avons développé des ressources, en partie numériques (voire annexes téléchargeables sur le site du colloque[11]), dans le cadre d'un projet plus large d'étude des usages des tablettes tactiles en classe de mathématique (Projet e-FRAN, Perseverons – Université de Bordeaux[12]). Des expérimentations dans différentes classes sont actuellement en cours.

Le scénario général s'articule autour de l'étude du déplacement de robots sur une droite graduée. Il s'agit d'étudier et caractériser la longueur des sauts de robots pour pouvoir les distinguer. Le travail capitalisé autour de la caractérisation des longueurs des sauts des robots permet d'introduire une caractérisation fractionnaire de ces mêmes longueurs de sauts : *une longueur de saut de "5 unités en 3 sauts" sera noté* $\frac{5}{3}$. $\frac{5}{3}$ *désigne alors la longueur d'un saut (ou le nombre d'unités par saut).*



[9] La situation est reprise par cette auteure et M-C. Marilier sur le site TFM : http://tfl.roll-descartes.fr/
[10] http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html
[11] http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017
[12] http://www.espe-aquitaine.fr/les-projets

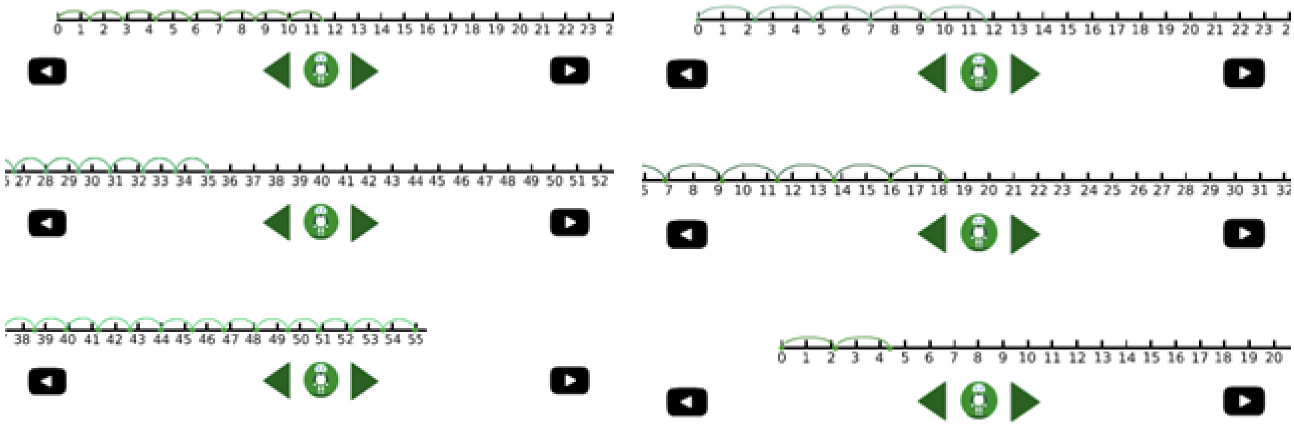


Figure 9 : Copies d'écrans - Extrait de la ressource « robots » (développée sous Scratch)

Le scénario détaillé des séances est également donné dans les annexes téléchargeables de ce texte. Dans cette section de notre texte, est fait état d'une pré-expérimentation du scénario conduite dans un contexte particulier : une élève de CM1 ayant par ailleurs débuté un apprentissage des fractions, conforme au curriculum actuel (l'aspect partage de l'unité) a expérimenté une partie de la ressource. Les transcriptions à l'étude ci-après sont extraites de cette pré-expérimentation. Nos analyses montrent globalement que cette élève n'identifie pas que la situation expérimentée relève du contexte déjà étudié de la fraction *partage* (elle ne fera mention des fractions à aucun moment) : ceci tend à prouver que ce sont deux aspects conceptuels distincts de la fraction qui sont en jeu et que leur mise en relation n'est pas évidente *a priori*. Dans le même temps, cette pré-expérimentation montre également que les tâches dans lesquelles des élèves de cycle 3 (à l'instar de cette élève de CM) peuvent être engagés et les réponses qu'ils formulent sont potentiellement une prise d'appui avérée pour la construction de connaissances attachées à l'objet *fraction commensuration, voire quotient*.

Un code commun de désignation d'un robot ayant été précédemment acté (« atteindre 3 unités en 4 sauts »), dans le scénario envisagé, les élèves sont engagés dans l'examen de la situation suivante : *si un robot atteint a unités en b sauts, il atteint c unités en d sauts,* (a ; b ; c ; d) étant des entiers, dont l'un d'entre eux est à déterminer. L'extrait de transcription suivant porte sur le nombre atteint en 25 sauts pour un robot atteignant *7 unités en 5 sauts*. L'analyse de cet extrait montre l'installation rapide d'une expertise dans le traitement reposant sur le caractère proportionnel de la situation : *pour un même robot, s'il fait cinq fois plus de sauts, il ira cinq fois plus loin.*

E : cinq fois cinq c'est égal à vingt-cinq […]
E : en faisant 5 sauts, j'arrive à 7 […]
E : cinq fois sept […]
E : je crois que le résultat, c'est trente-cinq.

Figure 10 : Le robot qui atteint 7 en 5 sauts, atteint … en 25 sauts

A partir de cette première expertise, la comparaison de robots est envisagée : *est-il possible qu'un même robot atteigne a unités en b sauts et c unités en d sauts ?* L'extrait suivant traite du cas de 15 unités en 4 sauts et 30 unités en 9 sauts.

E : le robot B quand… c'est ici
ENS : alors comment fonctionne ce robot B ?
E : il atteint 15 unités en 4 sauts. Donc il fait « un, deux, trois, quatre »
E : et l'autre il atteint 30 en 9 sauts
E : ce n'est pas possible, c'est pas possible que ce soit les mêmes.

E : parce que si c'était le robot qui atteint 15 en 4 sauts, il atteindrait 30 unités en 8 sauts. Et pas en 9.
E : comme là on double 15 et 30, alors on double aussi 4 et ça ne marche pas. Ça ne fait pas 9, ça fait 8

Figure 11 : Des robots identiques ?

Le raisonnement déployé dans l'extrait ci-dessus s'appuie conjointement : sur la production d'une désignation équivalente d'un robot donné (15 unités en 4 sauts équivalent à 30 unités en 8 sauts) dans le but d'une comparaison avec un autre robot (30 unité en 9 sauts) et sur le fait que pour deux robots différents, à une même distance parcourue correspondent des nombres de sauts différents. Dans un registre plus symbolique - qui n'a pour l'heure pas été institué – les techniques à l'œuvre renvoient à la mise au même *numérateur* de fractions pour les comparer, la plus grande étant celle disposant du plus petit *dénominateur*.

Dans l'extrait cité ci-dessous, une tâche proche est proposée. Il s'agit de comparer deux robots, l'un atteignant 19 unités en 3 sauts et l'autre 20 unités en 4 sauts. Dans un premier temps de l'échange, l'élève identifie des régularités numériques qui la conduisent à produire une réponse erronée.

E : là ils ont rajouté 1, une unité, celui-là en 3 sauts, celui-là en 4 sauts. Donc c'est le même.
ENS : Alors ré-explique moi, je n'ai pas bien compris
E : là on a rajouté 1 à 19 pour faire 20 et là ils ont rajouté 1 à 3 pour faire 4

Figure 12 : $\frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$?

Dans un second temps, la prise d'appui sur une représentation schématique des déplacements des deux robots permet de clôturer le problème. Autrement dit, dans le registre symbolique, les élèves sont confrontés à la comparaison de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b+1}$. La situation organise alors un espace qui permet d'éprouver des premières régularités numériques pour mieux les dépasser.

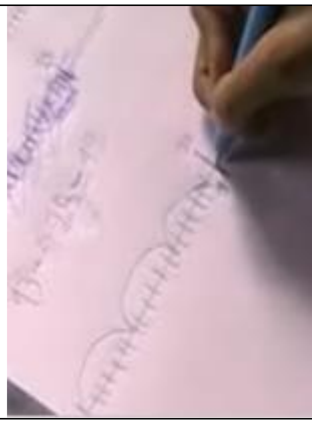
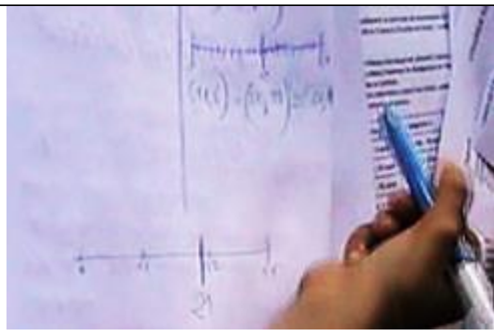
E : là, c'est zéro, là c'est 20 et là c'est 19, les autres on en a pas besoin. E : il atteint en 3 sauts : « un », « deux », « trois » *L'élève représente schématiquement le déplacement du premier robot* E : et l'autre il atteint…. Ben non, c'est pas bon. E : c'est pas le même robot, parce qu'il devrait faire les mêmes sauts si c'était les mêmes robots. E : Parce que si je fais « un, deux, trois, quatre », il arriverait à peu près là *L'élève représente schématiquement le déplacement du second robot*	

Figure 13 : $\frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$?

Un dernier extrait cité ci-après est centré sur l'étude de (11 ; 5) et (21 ; 15). A ce stade, une nouvelle représentation des robots a été préalablement installée : (a ; b) désignant le robot qui atteint *a* unités en *b* sauts. Un premier échange non transcrit ici a été l'occasion de revenir sur les différentes désignations du robot B (11 ; 5). L'élève semble apporter très rapidement une réponse au problème. L'extrait étudié se centre sur la justification apportée. Dans un premier temps, l'élève désigne (21 ; 15) comme se positionnant entre (11 ; 5) et (22 ; 10), laissant ainsi provisoirement un doute sur la conduite de son raisonnement. Ce dernier est levé par les demandes de précisions de l'enseignant. L'élève formule deux types de justification qui portent pour l'une sur le nombre de sauts, pour l'autre sur le nombre d'unités atteint. Dans un registre symbolique (non construit ici), les deux techniques observées renvoient dans une tache de comparaison de fraction. Il s'agit pour l'une, d'une technique correspondant à une mise au même dénominateur (en comparant les numérateurs ou nombres d'unité atteint pour un même nombre de sauts). L'autre se rapproche d'une mise au même numérateur (l'élève comparant des « dénominateurs différents » avec un écart de 5 sauts, pour des « numérateurs proches » avec un écart de 1 unité).

ENS : donc ça c'est le robot B et il faut le comparer au robot C.
E : et bien, celui-là il est entre les deux…
E : enfin, c'est celui-là *(en désignant le robot C (21 ; 15))* qui a le plus grand saut… non le plus petit saut.
ENS : alors pourquoi ?
E : parce que là, il est entre ces deux-là et il n'y a qu'un saut.
(l'élève désigne (21 ; 15) entre (11 ; 5) et (22 ;10))
E : donc du coup, il fait des sauts plus petits
ENS : je n'ai pas bien compris…
E : il tombe entre le 11 unités qui fait 5 sauts et le 22 unités qui fait 10 sauts.

ENS : en fait, ce que je ne comprends pas bien dans ce que tu me dis, c'est que « est-ce que ça et ça, c'est le même robot ? »
E : oui
ENS : donc est-ce que ça et ça, c'est la même longueur de saut ?
E : oui
E : donc si ce robot fait par exemple ces sauts là (en pointant (11 ; 5)) il marque un trait il fait 5 sauts et il marque un trait.
E : et après, il fait 10 sauts et il marque un autre trait
E : ce robot-là sera entre les deux traits…parce que ce nombre-là est plus petit que celui-là alors que ce nombre-là est plus petit que celui-là.
ENS : donc tu me dis : j'ai ce robot, il atteint 11 en 5 sauts, et il atteint 22 en 10 sauts.
E : oui, il marque un trait aux deux.
E : et celui-ci, il est là.
ENS : il atteint quoi ?
E : 21 en 15 sauts
E : et lui il fait 10 sauts
E : et 33 en 15 sauts.
E : donc il fait 15 sauts et celui-là fait 15 sauts, donc c'est celui-là qui est le plus petit qui fait des sauts plus petits.
E : en fait, il y a le nombre d'unités qu'il atteint en 15 sauts alors que lui, c'est en 10 sauts. Il y plus de sauts.
E : ou alors on prend 15 là c'est 10, il est entre ces deux là en sauts
E : donc il est toujours là mais en sauts, c'est 15 et là il y a plus.
E : celui-là, c'est 33 alors que là, c'est 22



Sur l'image ci-dessus, au-dessous de la droite graduée, on peut lire :
(11 ; 5) = (22 ; 10) = (33 ; 15)
L'élève positionne « géographiquement » (21 ;15) entre (11 ;5) et (22 ; 10) très tôt dans l'échange et statue que le robot (21 ;15) a la plus petite longueur de saut.

Ce n'est qu'à la fin de l'extrait (au cours duquel elle aura aussi placé (21 ; 15) entre (22 ; 10) et (33 ; 15)) qu'elle explicite son raisonnement.

Son raisonnement pour comparer la longueur du saut de deux robots est de deux ordres : d'une part, pour un même nombre de sauts (15), le robot qui aura la longueur de saut la plus petite sera celui qui atteindra le plus petit nombre (21 au lieu de 33), d'autre part, pour un même nombre atteint ou presque (21 et 22, deux nombres proches), le robot qui aura la longueur de saut la plus petite sera celui qui aura réalisé le plus de sauts (15 au lieu de 10).

Figure 11 : deux techniques pour comparer des fractions

En guise de conclusion …

Cette contribution visait à faire le point sur différentes acceptions des fractions, notion au cœur du cycle 3 et à mettre en lumière les potentialités et limites de chacune de ces acceptions. La *fraction commensuration* quelque peu oubliée actuellement paraît intéressante à reconsidérer dans ses relations potentiellement fortes avec la *fraction quotient* dans le cadre d'un travail sur les grandeurs. Dans ce contexte, la *fraction quotient* était considérée davantage en lien avec l'extension d'un opérateur *partage d'une grandeur* (déjà introduit et travaillé avec la *fraction partage*) et avait visiblement des potentialités parfois mal identifiées par la suite.

La ressource « les robots » présentée lors du colloque semble un point d'appui possible pour travailler la *fraction commensuration* et faire vivre ces relations avec la *fraction quotient* en fin de cycle 3. Nous espérons qu'elle sera utile à des enseignants et formateurs intéressés par ces questions : http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/fichiers/Atelier_21/

N'hésitez pas à nous faire part d'éventuels retours sur des expérimentations « faisant vivre » cette ressource dans les classes…

Références

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM : Bordeaux.

Téléchargeable sur : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf

Brousseau G. et Brousseau N. (2008). Atelier d'ingénierie et d'analyse des processus didactiques Rationnels et décimaux dans l'enseignement obligatoire. In Rouchier A. & Bloch I. (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (cédérom), La Pensée Sauvage, Grenoble.

Téléchargeable sur : http://guy-brousseau.com/2159/atelier-d%e2%80%99analyse-des-processus-didactiques-2008/

Cerquetti-Aberkane F. (1992), *Enseigner les mathématiques à l'école,* Hachette, Paris.

Cerquetti-Aberkane F., Marilier M-C. (2005). *Un exemple de progression pour des cours moyens ou des sixièmes : la situation des robots.*

Téléchargeable sur : http://tfl.roll-descartes.fr/ressource/6435/detail

Douady R., Perrin M-J. (1986). *Liaison école collège. Nombres décimaux,* IREM de Paris 7, Paris.

Téléchargeable sur : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_brochures_de_lirem_de_paris/

Ermel (1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CM)*, SERMAP-Hatier, Paris.

Ermel (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CM1),* Hatier, Paris.

Neyret R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM,* Université Joseph Fourier, Grenoble.

Pressiat A. (2002). *Quotients, proportionnalité, grandeurs.*

Téléchargeable sur : https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/confpressiat/Quotients.pdf

Pressiat A. (2009). Une reprise de l'étude des nombres rationnels et décimaux : la situation des automates. Téléchargeable sur **http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html**

At 22 : Comparer deux séances de géométrie en cycle 3

Francine Athias[1], Philippe Le Borgne[2],

[12]Laboratoire de Mathématiques de Besançon, IREM de Besançon ;

francine.athias@univ-fcomte.fr; philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

Résumé : L'atelier reposait sur la comparaison de deux séances de géométrie, l'une proposée en classe de CM2 l'autre en classe de sixième. Les deux séances ont été filmées, transcrites ,et réduites sous forme de synopsis. Les éléments d'analyse sont issus de la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). Nous avons cherché à mettre en évidence des éléments de continuité dans des pratiques effectives à l'intérieur du cycle 3. Nous avons étudié pour ce faire l'orientation, par le professeur, du regard des élèves sur la figure matérielle (Perrin-Glorian et Godin, 2017, soumis).

Mots clefs : géométrie dynamique, géométrie, contrat didactique, milieu didactique, figure.

La recherche dont sont extraites les données concerne deux professeurs et deux chercheurs, impliqués dans des travaux autour de la géométrie dynamique à l'école primaire. Nous nous intéressons aux enjeux de l'enseignement de la géométrie. Notre étude a la particularité de comparer deux classes de cycle 3, l'une en CM2, l'autre en 6ème. Nous nous intéressons à une séquence spécifique, au cours de laquelle la géométrie dynamique est utilisée.

Cette étude comparative s'inscrit dans une approche clinique du didactique ordinaire (Leutenneger, 2000). Elle prend appui sur la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD), en particulier sur les notions de contrat didactique et de milieu didactique telles qu'envisagées par Sensevy (2011). Nous entendons ainsi par contrat didactique ce sur quoi le professeur et les élèves peuvent s'appuyer, dans leurs transactions à propos du savoir. Ce contrat est en relation dialectique avec un milieu didactique désignant les éléments matériels ou symboliques sur lesquels portent les actions et qui posent problème. Ces termes théoriques guident notre étude de manière sous-jacente pour tenter d'apporter des éléments de réponse et de discussion à la question suivante : comment le professeur et les élèves agissent-ils pour expliciter des propriétés géométriques, que ce soit en CM2 ou en 6ème ?

Lors de l'atelier, les participants ont été conduit à comparer les deux séances d'enseignement en CM2 et 6ème en élaborant des analyses *a priori* des tâches introductives d'une part et en analysant l'articulation du travail en environnement papier-crayon et en environnement dynamique d'autre part. Le matériel papier fourni a conduit les participants à analyser par eux-mêmes les constructions proposées aux élèves dans les deux classes. Le synopsis des séances ainsi que de courts extraits de vidéos ont permis de mettre à l'examen du groupe l'articulation entre les moments papier-crayon et géométrie dynamique. La courte discussion a permis d'aborder la question curriculaire en mettant en perspective les deux séances analysées du point de vue de l'articulation CM2-Sixième ; le groupe s'est autorisé pour cela à opérer un élargissement de la discussion au-delà des classes observées.

Description rapide des deux séquences

Les deux séquences que nous présentons ci-dessous sous la forme réduite en synopsis, portent sur le losange, et incluent chacune un moment plus ou moins important utilisant la géométrie dynamique.

<table>
<tr><td>Temps en minutes</td><td>CM2</td><td>6ème</td></tr>
<tr><td>0-10</td><td rowspan="4">Jour 1
Phase 1 : plier et trouver les propriétés</td><td rowspan="3">Jour 1
Phase 1 : tracer avec les bandelettes</td></tr>
<tr><td>10-20</td></tr>
<tr><td>20-30</td></tr>
<tr><td>30-40</td><td rowspan="2">Phase 2 : vérifier avec Geogebra</td></tr>
<tr><td>40-50</td><td rowspan="3">Phase 2 : construire un losange (les élèves qui ont une feuille jaune le font dans l’environnement Tracenpoche et les élèves qui ont une feuille rose le font dans l’environnement papier-crayon). En même temps, écrire le programme de construction.</td></tr>
<tr><td>50-60</td><td rowspan="5">Jour 2
Phase 3 : construire des polygones avec Geogebra</td></tr>
<tr><td>60-70</td></tr>
<tr><td>70-80</td><td rowspan="3">Phase 3 : échanges des programmes de construction</td></tr>
<tr><td>80-90</td></tr>
<tr><td>90-100</td></tr>
<tr><td>100-110</td><td>Jour 2 :
Phase 4 : retrouver les propriétés du losange</td><td rowspan="9"></td></tr>
<tr><td>110-120</td><td rowspan="3">Phase 2 bis : construire un losange (les rôles sont inversés)</td></tr>
<tr><td>120-130</td></tr>
<tr><td>130-140</td></tr>
<tr><td>140-150</td><td rowspan="3">Phase 3 bis : échanges des programmes de construction</td></tr>
<tr><td>150-160</td></tr>
<tr><td>160-170</td></tr>
<tr><td>170-180</td><td rowspan="2">Phase 5 : construction collective dans l’environnement Tracenpoche.</td></tr>
<tr><td>180-190</td></tr>
</table>

En classe de CM2, la séquence de deux séances dure 190 minutes, en 6ème, 100 minutes, soit donc environ la moitié du temps. Cette différence temporelle repose en partie sur une organisation institutionnelle différente : en sixième, la sonnerie signale la fin de la séance de mathématiques, tandis qu'en CM2, la contrainte horaire est moins forte.

Une autre différence organisationnelle concerne les usages de la salle multimedia. En 6ème, soit la professeure et les élèves sont dans la salle de classe pendant toute la séance, soit ils sont dans la salle multimedia. Il n'est pas possible de changer de salle en cours de séance. Par contre en CM2, comme la salle multimedia est à côté de la salle de classe, la professeure peut passer d'une salle à l'autre à tout moment, partager les élèves dans les deux salles.

Il s'agit maintenant de comprendre comment les professeurs, dans chacun des cas, donnent à voir des propriétés géométriques, ici les propriétés du losange. Pour ce faire, nous allons approfondir la comparaison autour de moments-clés, dans lesquels la densité de savoir nous a semblé importante.

Le moment d'introduction (début de la phase 1)

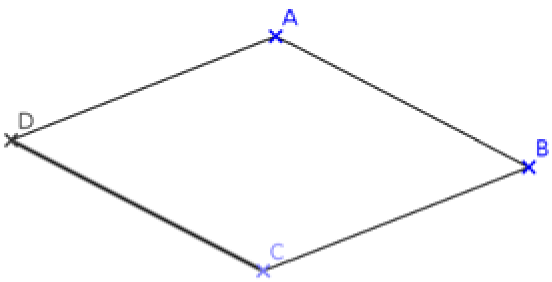
Dans les deux classes, les élèves doivent manipuler des objets matériels pour mettre en évidence les propriétés géométriques du losange.

Description du moment d'introduction en CM2

En CM2, la professeure annonce le travail attendu. Les élèves disposent chacun de deux losanges découpés, le « petit » est nommé ABCD, le « grand » EFGH. La tâche donnée aux élèves est de trouver les propriétés de cette figure géométrique. Les manières de faire attendues sont explicitées par le professeur. Une première manière consiste à « sans la manipuler, en la regardant, essayer de voir mentalement les propriétés de cette figure géométrique ». Une deuxième manière manipulatoire revient à « par pliage, essayer de confirmer ce que vous avez pensé ». Cette tâche étant réalisée, les élèves doivent écrire sur leur ardoise une seule propriété. Les élèves n'interrompent pas le professeur puis travaillent individuellement, avec leurs figures prédécoupées et leurs ardoises.

Analyse *a priori* des tâches demandées aux élèves en CM2

Pour faciliter la lecture ci-dessous, on propose de nommer les sommets du losange comme dans la figure ci-contre.



En CM2, la tâche proposée aux élèves est de trouver les propriétés géométriques d'une figure.

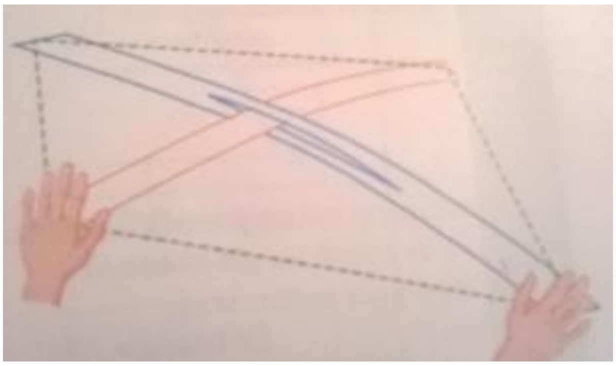
Quels sont les pliages envisageables et leur intérêt par rapport aux connaissances mathématiques ?

- le pliage peut se faire selon une diagonale par exemple [DB]. Dans ce cas, les côtés [AB] et [BC] se superposent. On peut donc en déduire l'égalité : AB=BC. De même, les côtés [AD] et [DC] se superposent. On peut donc en déduire l'égalité : AD=DC. On peut établir le même type d'égalité en pliant sur la diagonale [AC]. De ces deux pliages successifs, on peut en déduire les égalités de longueurs. Par ailleurs, ce même pliage montre que les triangles ABD et CBD se superposent. On peut en déduire que (BD) est un axe de symétrie du losange. On peut établir le même type d'égalité en pliant sur la diagonale [AC].De ces deux pliages, on peut en déduire que les diagonales (BD) et (AC) sont des axes de symétrie du losange.

- un pliage peut se faire selon une diagonale par exemple [DB], puis un second pliage selon la droite (AC). Dans ce cas, les deux droites définissent quatre angles droits. De ces deux pliages successifs, on peut en déduire que les diagonales sont perpendiculaires. Ces deux mêmes pliages successifs font se superposer les points D et B. Dans ce cas, les longueurs des segments superposés sont égales, DO et BO où O est le centre du losange. Deux pliages successifs, en commençant par (AC) donnent à voir deux segments superposés. Dans ce cas, les longueurs AO et BO sont égales. De ces deux pliages successifs, on peut en déduire que les diagonales se coupent en leur milieu.

- un pliage selon une droite parallèle aux côtés du losange permet de rendre les côtés opposés du losange dans une « superposition locale ». Un second pliage avec les autres côtés opposés du losange produit le même effet. De ces deux pliages successifs, on peut en déduire que les côtés opposés du losange sont parallèles.

Description du moment d'introduction en 6ème



En 6ème, la professeure annonce le travail attendu. Les élèves sont placés en îlots pour pouvoir travailler en groupe. Chaque groupe reçoit deux bandelettes. Les élèves doivent enfiler la petite bande de papier dans la grande, qui possède une large fente en son milieu (P : « Enfilez la petite bande de papier dans la grande »). La première tâche est de former un losange, sachant que les extrémités des bandes représentent les sommets du quadrilatère (P : « En travaillant avec les deux bandes de papier, je vous demande de former un losange (…) Voyez les bandes de papier, elles ont des petites pointes. Votre losange, les sommets de votre losange... »). La deuxième tâche est d'observer ce qui se passe pour les diagonales du losange (P : « Vous essayez d'observer ce qui se passe pour les diagonales »). Puis ce même travail doit être poursuivi pour obtenir un rectangle puis un carré, ce que nous n'étudions pas dans le cadre de cet exposé. Les élèves sont enthousiastes (Es : « C'est trop bien »). Une élève interpelle le professeur et propose ainsi une technique manipulatoire : à l'aide des extrémités des petites bandes, l'élève peut tracer le losange sur le cahier. Le professeur confirme (P : « Vous pouvez tracer sur votre cahier, ce n'est pas un souci »).

Analyse *a priori* des tâches demandées aux élèves en 6ème

En 6ème, la tâche demandée aux élèves est de former un losange avec les extrémités des bandes, ces dernières figurant les diagonales. Le lien est à établir par les élèves, même si le mot diagonale est cité par le professeur. Une première technique perceptive consiste à placer les deux bandelettes de papier de manière à obtenir un losange et de voir que les diagonales sont perpendiculaires ou se coupent en leurs milieux. Une deuxième technique manipulatoire consiste à placer les diagonales de manière à obtenir un losange, de tracer effectivement les sommets et les côtés du losange sur le cahier. Le quadrilatère étant alors tracé, deux manières de faire sont envisagées : l'une perceptive, l'élève voit que les diagonales sont perpendiculaires. Une deuxième manière consiste à voir les propriétés et puis à les vérifier en utilisant les instruments (équerre pour l'angle droit ou règle graduée pour l'égalité des longueurs).

Analyse comparée de ces deux moments

Nous allons nous intéresser aux connaissances mathématiques visées dans les deux classes. En CM2, le quadrilatère étant tracé, il s'agit d'étudier les propriétés du quadrilatère, ici le losange. En 6ème, il s'agit d'étudier une propriété caractéristique du losange : à partir d'une configuration des diagonales, il faut obtenir un losange. D'un point de vue mathématique, l'approche est donc très différente : d'un côté les phrases attendues des élèves de CM2 sont de la forme « un losange a... », d'un autre côté, celles attendues en 6ème sont de la forme « si les diagonales d'un quadrilatère sont …, alors c'est un losange ».

Nous allons maintenant étudier comment les professeures s'appuient sur les habitudes de travail, autrement dit qui font partie du contrat didactique. Les élèves de CM2 et de 6ème connaissent déjà le losange, au sens où ils en ont déjà rencontré la forme. En CM2, le professeur explique le travail à faire : les élèves observent le professeur mais ils n'interviennent à aucun moment. Le pliage fait partie des habitudes. En 6ème, le professeur est interrompu par les élèves, qui montrent leur enthousiasme ou posent des questions. Ces interventions conduisent le professeur à dévoiler partiellement une technique. Dans les deux classes, les élèves savent ce qu'ils ont à faire (plier en CM2, tracer un losange à partir des bandes en 6ème).

Nous allons maintenant nous intéresser au problème posé aux élèves, autrement dit qui font partie du milieu didactique. En CM2, le quadrilatère est déjà découpé : il est donc facile pour les élèves de le plier dans tous les sens pour vérifier des propriétés. En 6ème, les bandes de papier ne font pas partie des habitudes. Elles représentent les diagonales, mais les élèves doivent le "voir" : là encore il est facile pour les élèves de les déplacer, de les ajuster pour obtenir un losange. Comme une des bandes est découpée au centre sur quelques centimètres, les bandes se coupent nécessairement en leurs milieux. Dans les deux classes, la manipulation permet aux élèves « d'entrer dans les propriétés ». Les participants de l'atelier ont noté l'approche naturelle du pliage du losange pour introduire un grand nombre de propriétés du losange, à partir des propositions formulées par les élèves eux-mêmes. Dans la classe de 6ème, la professeure espère la mise en évidence d'une caractérisation du losange par les diagonales. Pour ce faire, le recours aux bandelettes de papier est apparu aux participants moins efficient puisque dans ce projet, les diagonales sont "déjà là". Si la manipulation permet de construire le losange attendu, l'interaction avec le milieu ne permet pas aux élèves d'identifier le rôle des diagonales.

Un moment collectif (en fin de la phase 1)

Description en CM2

En CM2, la professeure affiche le losange au tableau. elle interroge les élèves sur le résultat de leur enquête. Les élèves exposent d'abord la propriété qu'ils ont vue (A : « Ils sont de même longueur »). La professeure reformule le propos (P : « Tu as l'impression que c'est la même longueur »). Les élèves viennent alors au tableau plier leur figure (P : « Comment tu plies ? »). Ils montrent ainsi des propriétés, par exemple les côtés sont égaux parce qu'ils se superposent (E : « Quand on plie, il n'y en a pas qui déborde »). La professeure écarte les propositions concernant les mesures (P : « On n'a pas à mesurer »).

Description en 6ème

En 6ème, la professeure interroge les élèves sur le résultat de leur enquête. Comme un élève répond sur les longueurs des côtés du losange, elle trace un losange à main levée. Elle demande à l'élève d'expliquer ce que sont les diagonales (A : « C'est un trait qui passe au milieu »). Elle invite le même élève à venir tracer les diagonales. Puis les élèves exposent leurs résultats : les diagonales sont perpendiculaires (A : « Les diagonales, elles sont perpendiculaires »), les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre (E : « Médiatrice »). La professeure demande des précisions (P : « Elles sont médiatrices de quoi ? »). L'élève répond sans hésiter (E : « Parce que la diagonale est médiatrice de l'autre diagonale. Et l'inverse »).

Analyse comparée de ces deux moments collectifs

Dans les deux classes, les élèves ont manipulé des objets (les bandes de papier et le losange découpé). S'ils ont dans les deux cas écrit des résultats sur leur ardoise (CM2) ou sur leur cahier (6ème), les résultats de leur enquête ne sont pas exposés collectivement de la même manière. En CM2, les propriétés sont énoncées en prenant appui sur le pliage effectif du losange. L'élève vient au tableau présenter comment il a plié. En 6ème, les propriétés sont énoncées en évoquant le losange qui est dessiné sur le cahier. Rapidement, la professeure éprouve la nécessité de tracer un losange à main levée et demande à un élève d'en tracer les diagonales. Il n'est alors plus question des bandes de papier. Les élèves et la professeure explicitent les propriétés trouvées sur un objet modélisé dans l'espace spatio-graphique, à savoir le losange tracé à main levée par le professeur. Il ne s'agit plus du même type d'objet : les bandes de papier, qui « dessinent » un losange ont été investies dans la phase de recherche, le losange à main levée est maintenant le support de discussion.

En CM2, l'élève interrogé vient présenter aux autres le résultat de son enquête : il explicite la propriété et la montre en manipulant. L'élève se tourne et montre comment il fait son pliage. La professeure est à côté de lui. Elle partage ainsi sa position de professeur avec l'élève. En 6ème, ces explicitations se déroulent dans un jeu de questions réponses (P : « Qu'est-ce que vous avez trouvé ? », E : « perpendiculaires, P : « tout le monde est d'accord ? »). La professeure peut valider la réponse. Le renvoi au collectif ne semble pas crucial (P : « Tout le monde a trouvé ça, à peu près? »). La place de la professeure est donc différente dans les deux classes, plus importante en 6ème dans cette phase..

Les propriétés visées sont également exprimées de manières différentes. En CM2, le vocabulaire utilisé est proche de ce qui est fait au cours du pliage. Des conclusions partielles sont faites, comme par exemple : “ce côté et ce côté là sont égaux”. En 6ème, le vocabulaire utilisé est plus mathématique. Par exemple la notion de médiatrice est spontanément évoquée par les élèves.

Le dernier point que nous allons évoquer concerne la gestion du temps pour cette fin de phase. En 6ème, la professeure fait travailler les élèves directement sur l’objet mathématique, sans lien avec le travail précédent de manipulation des bandes. Cette phase dure pendant 3 minutes. En CM2, la professeure fait justifier toutes les assertions par des pliages. Cette phase dure 34 minutes. La différence est très nette ici : en CM2, la professeure prend le temps de faire montrer les propriétés du losange à travers les pliages.

Conclusion partielle

Dans les deux phases que nous venons de décrire en CM2 et en 6ème, les professeures orientent le regard des élèves sur des propriétés reconnues perceptivement, à travers la manipulation d’objets matériels tels que le losange découpé ou les bandes de papier. À ce niveau, nous notons donc une volonté commune à approcher les connaissances géométriques en prenant appui sur l’espace sensible. En revanche, lors de la mise en commun, en CM2, les propriétés sont travaillées dans l’espace sensible à travers les pliages d’un losange puis sont écrites au tableau. Le statut de ces propriétés passe de l’espace sensible à une généralisation à tous les losanges : le losange a 4 côtés de la même longueur. *A contrario*, en 6ème, au cours de la mise en commun, les propriétés sont directement explicitées en dehors du contexte matériel des bandes de papier, sur une figure à main levée.

Les usages de la géométrie dynamique : description

Description générale rapide des moments utilisant la géométrie dynamique

En CM2, les élèves tracent un losange dans les deux environnements. Dans l’environnement Tracenpoche, les élèves doivent construire un losange ABCD sans aide. Dans l’environnement papier-crayon, ils doivent tracer un losange de dimensions données (soient les côtés de longueur 6cm et soient les diagonales 6cm et 10 cm). Puis une reprise collective dans la salle de classe est faite pour la construction dans l’environnement Tracenpoche. Ce sont les phases 2, 3, 2bis et 3bis de jour 1 et jour 2 (cf synopsis).

En 6ème, la professeure introduit le logiciel Geogebra pour faire vérifier les propriétés découvertes pendant l’usage des bandes de papier (phase 2 de jour 1). Puis elle fait construire différents losanges, dont les dimensions sont données (un quadrilatère RSTU avec RT = 5cm, RS= 3,5 cm et RS= ST=TU= RU, un losange KLMN avec KL= 4,5cm et KM=6cm) ainsi que d’autres quadrilatères que nous n’étudions pas ici (ce sont des rectangles ou des carrés). C’est la phase 3 du jour 2.

Une première comparaison va maintenant porter sur deux moments de l’usage de la géométrie dynamique, dans les deux classes, dans la mesure où l’organisation est la même, à savoir un moment collectif.

Approfondissement de la description en CM2 (phase 5)

En CM2, les élèves ont tracé un losange dans l’environnement Tracenpoche et un losange dans l’environnement papier-crayon, avec les instruments usuels. De retour en classe, un élève C est sur l’ordinateur dont l’écran est vidéoprojeté. L’élève F lui dicte comment réaliser le losange ABCD. Il dicte lentement de manière à ce que C puisse le faire. Par exemple F dit : « Tracer un cercle de centre A passant par B ». C fait ce cercle. La professeure assure la coordination entre celui qui dicte

(P : « Elle n'a pas entendu »), celui qui agit (« Fais marche arrière ») et le reste de la classe. C et F ont déjà construit un losange dans l'environnement Tracenpoche. Le losange étant tracé, la professeure convie F au tableau, pour qu'il lise le nom du quadrilatère. Finalement, le losange obtenu s'appelle ACBD. La professeure clôt alors la séance.

Approfondissement de la description en 6ème (phase 2)

Par groupe, les élèves ont utilisé les bandes pour tracer un losange sur leur cahier. Collectivement, ils ont repéré que les diagonales du losange ainsi obtenu sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux. La professeure tente de convaincre les élèves de l'imprécision de leur dessin. Elle cherche à leur montrer l'intérêt d'un nouvel outil connu (P : « Réfléchissez à ce que vous avez appris à utiliser cette année, qui vous permet d'observer des choses »). Après de nombreuses indications, les élèves pensent au logiciel Geogebra. Ils expliquent qu'il permet d'être plus précis. Un peu plus tard, guidé par le professeur, un élève parvient à exposer un avantage du logiciel, ie ce dernier permet de tracer plusieurs losanges, alors que, sur le cahier, un seul losange est tracé (L : « Sur le cahier, on en a eu un. Sur le logiciel, on peut en avoir plusieurs »). Un élève L trace un losange avec le logiciel Geogebra, l'écran de l'ordinateur étant vidéo-projeté : la durée de construction est d'environ une minute. Un autre élève Y vient au tableau déplacer un point pour vérifier la construction. Le professeur revient sur le rôle de tous ces losanges P : (« Pourquoi on a besoin de faire plusieurs losanges ? »). Les élèves expliquent qu'ils veulent regarder si les diagonales dont perpendiculaires. En utilisant le bouton «angle », l'élève détermine la mesure de l'angle. La question que le professeur pose ensuite concerne la découverte de la propriété sur tous les losanges. Comme les élèves ne répondent pas à la question, le professeur interroge l'élève Y qui était allée déplacer les points (Y : « On déplace la figure ») et va le faire au tableau. La validation est conduite par le professeur (P : « Est-ce qu'il y a toujours un angle droit ? »). Parallèlement à ce travail sur la perpendicularité des diagonales, les élèves et le professeur travaillent sur les diagonales, médiatrices l'une de l'autre. Puis le professeur conclut qu'il leur manque encore des outils pour démontrer pourquoi les diagonales sont perpendiculaires, mais elle les félicite du travail effectué.

Les usages de la géométrie dynamique : analyse comparée

La question de l'explicitation

Ce qui est intéressant en CM2, ce sont les conséquences de cette organisation prévue par la professeure, concernant l'explicitation des relations géométriques. La situation de communication amène l'élève F à dicter devant le collectif les instructions à un autre élève. Il s'agit pour lui de formuler des phrases en appui sur le vocabulaire géométrique (F : « Trace le cercle de centre A passant par B »). L'élève F est responsable du savoir. Il revient à un deuxième élève C de comprendre cette phrase mathématique et de la traduire dans l'environnement Tracenpoche. L'écran est vidéoprojeté : sa construction est également exposée publiquement. Cette orchestration (Trouche, 2005) est intéressante : la professeure organise un usage de la géométrie dynamique, dans lequel les élèves ont une responsabilité dans la construction, même si elle est toujours vigilante sur ce qui se passe.

L'élève de 6ème, trace le losange de la même manière que les élèves de CM2 : le losange est constitué deux triangles équilatéraux. Contrairement à ce qui s'est passé en CM2, L ne dit pas ce qu'il fait. Lorsque la professeure lui demande des explications, ces dernières restent incomplètes d'un point de vue mathématique (P : « Tu voulais faire quoi ? », L : « Un cercle »). Il est attendu qu'il sache tracer un losange avec le logiciel Geogebra. L'élève L, seul, a la responsabilité de la construction du losange. Il l'a déjà fait au cours de l'année (information donnée par le professeur). Un autre élève vient valider la figure par déplacement. Dans les deux classes, les professeures souligneront à un moment que le losange est particulier, mais elles n'insisteront pas.

Quelles finalités pour les professeurs

Nous allons maintenant nous intéresser au rôle de la géométrie dynamique envisagé par les professeurs, tel qu'on le repère à travers leurs discours ou leurs gestes d'enseignement. En CM2, sans que le professeur l'exprime, ce qui semble premier ce sont les propriétés mathématiques. Lorsque F, élève de CM2, dicte un programme de construction du losange, les explicitations prennent appui sur les relations géométriques. Une finalité de l'usage de la géométrie dynamique consiste à mettre en œuvre des relations géométriques et à les exprimer. En 6ème, la professeure fait expliciter aux élèves le rôle d'outil de la géométrie dynamique : les propriétés repérées sur un losange sont-elles encore valables sur « tous » les losanges ? Les conjectures faites sur une figure sont vérifiées sur un grand nombre de figures. La professeure fait établir la différence entre les conjectures et les démonstrations, inaccessibles au moment de l'étude.

Papier-crayon et logiciel : des environnements liés

Dans les deux classes, il existe un lien fort entre les deux environnements. Les tâches de construction dans l'environnement dynamique réinvestissent des techniques de l'environnement papier-crayon. Les tâches dans l'environnement papier-crayon sont d'une certaine manière « justifiées » par la géométrie dynamique. En CM2, l'élaboration de programmes de construction constitue un lien explicite. En 6ème, l'articulation entre les deux environnements est à la charge de l'élève.

Le rôle du nom des points

En CM2, la professeure a demandé de tracer un losange ABCD dans l'environnement Tracenpoche (énoncé : trace un losange ABCD). En 6ème, la professeure demande de tracer un losange dans l'environnement Geogebra. Ces deux tâches sont-elles identiques ?

Les contraintes instrumentales sont différentes. Le logiciel Tracenpoche nomme les points au moment de leur création. Le logiciel Geogebra place les points sans que leur nom apparaisse (dans la classe, il est ainsi configuré). Il semble donc que les deux professeures en tiennent compte dans la définition de la tâche.

Lorsque l'élève de CM2 et celui de 6ème tracent le losange dans l'environnement dynamique, ils utilisent la même technique, tracer successivement deux cercles. Ils obtiennent ainsi un losange particulier constitué de deux triangles équilatéraux.

La professeure de CM2 fait mettre en évidence la dénomination du losange : le quadrilatère obtenu est ACBD et non ABCD. Puis elle conclut la séance. La professeure de 6ème ne pose pas de question à ce propos, les noms des sommets ne sont pas affichés. Autrement dit, le nom des points n'est pas important

Conclusion-discussion

La question qui nous préoccupe est la suivante : comment le professeur et les élèves agissent-ils pour expliciter des propriétés géométriques, que ce soit en CM2 ou en 6ème ?

Nous avons présenté deux séquences ordinaires en cycle 3, l'une en CM2 l'autre en 6ème. L'objet mathématique étudié est le losange. Il est travaillé dans l'environnement papier-crayon et dans un environnement dynamique (Tracenpoche en CM2 et Geogebra en 6ème). Dans une première phase, la professeure fait manipuler aux élèves un losange découpé ou des bandes de papier. En CM2, les élèves doivent vérifier par pliage des propriétés du losange qu'ils ont d'abord visuellement perçues. En 6ème, les élèves doivent tracer un losange à partir des bandes, qui figurent les diagonales. Ainsi, de manières différentes, ils mettent en évidence une propriété, les diagonales du losange sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux. Cette même propriété est formulée en 6ème par « les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre ».

Les conjectures obtenues par la manipulation n'ont pas la même signification en CM2 et en 6ème. Ainsi ces conjectures sont validées par le seul pliage en CM2 alors qu'elles s'avèrent insuffisantes en 6ème. L'objet matériel de l'espace sensible n'est pas appréhendé de la même manière. Tout se passe comme si en CM2, la professeure et les élèves restaient dans l'espace sensible. Tandis qu'en 6ème, l'espace graphique permet d'énoncer des propriétés à travers la figure à main levée. Et la géométrie dynamique est alors convoquée.

Les usages de la géométrie dynamique en 6ème sont justifiés pour vérifier des propriétés sur de nombreuses figures. Les propriétés conjecturées sur un cas, égalités des longueurs et angle droit, sont repérées au cours du déplacement de la figure sur Geogebra. Par contre, en CM2, la géométrie dynamique est utilisée à des fins de construction, la figure étant validée par le déplacement des points.

Les relations géométriques sont explicitées en CM2 : la communication à autrui permet à chacun de prendre en compte les relations géométriques. Ainsi, l'élève F donne les éléments caractéristiques du cercle pour permettre à l'autre élève C de le construire. En 6ème, les lettres apparaissent au moment où les élèves doivent communiquer l'angle. Mais à aucun moment une explicitation claire apparaît. Le nom des sommets devient nécessaire, mais ils ne permettent pas réellement de mettre en évidence des expressions mathématiques. Autrement dit, ici, l'espace graphique (dans l'environnement dynamique) devient le lieu où sont évoqués des objets géométriques (le cercle défini par ses éléments caractéristiques). Cette référence à l'espace géométrique est présente dans les deux classes.

En regardant de près ces deux séances, nous mettons en évidence comment l'étude des figures évolue dans l'espace sensible (le losange découpé, les bandes de papier), dans l'espace graphique (tracer un losange), dans l'espace géométrique (les propriétés du losange). Comme le soulignent Perrin-Glorian et Godin (2018, soumis), l'étude des figures n'a pas ici ni une finalité pratique (rester au niveau du pliage), ni une finalité théorique (rester au niveau de la figure), mais plutôt une finalité d'apprentissage conceptuel. Il s'agit de donner à voir aux élèves du « même » et du « différent ». Le même losange est vu de manière différente, avec une tension plus ou moins grande vers la figure théorique de l'espace géométrique.

À l'appui des programmes de cycle 3 et des éléments de progressivité, la discussion s'est orientée sur l'identification de ce qui est fait en CM2 et qui pourrait être fait en 6ème, et vice-versa. La discussion s'est centrée dans un premier temps sur l'intérêt des usages papier-crayon dans l'élaboration des programmes de construction et sur la possibilité d'investir l'aspect dynamique du logiciel en CM2. Dans un second temps, elle a porté sur le rôle des différents environnements comme outil pertinent conduisant à nourrir des débats en classes. De ce point de vue l'espace graphique de la feuille de papier offre moins de potentialité que l'environnement de géométrie dynamique. Nous avons également posé la question : en quoi ces deux séances relèveraient-elles du cycle 3 ?

Références

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une clinique pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20, 209-250.

Perrin-Glorian, M-J. et Godin, M. (2018, à paraître). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège, *Actes de la CORFEM*, Nîmes, juin 2017.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques,* 25(1), 91-138.

At 23 : Mise en œuvre d'une organisation mathématique pour le cycle 3 dans le REP+ La Rochelle Ouest

Matthieu Gaud[1], Cyril Redondo[2]

[12]Collège Pierre Mendès France La Rochelle, IREM de Poitiers ;

matthieu.gaud@ac-poitiers.fr ; cyril.redondo@ac-poitiers.fr

Résumé : L'atelier se propose d'exposer la Recherche Action Participative (RAP) « Enseigner les mathématiques autrement par les grandeurs au cycle 3 » menée dans le REP+ La Rochelle Ouest, mise en œuvre dans 3 écoles primaires, le collège Pierre Mendès France, pilotée par deux membres de l'IREM de Poitiers et la coordinatrice réseau. Cette RAP a pour objectif d'harmoniser l'enseignement autour de 6 grandeurs (les angles, les durées, les longueurs, les aires, les volumes, les prix) entre les écoles primaires et la classe de 6ème. A partir des grandes questions qui structurent l'enseignement par les grandeurs en 6ème, nous présenterons les grandes questions qui amorcent les grandeurs en début de cycle 3, ainsi que des déroulements pédagogiques et des instruments utiles à la compréhension des grandeurs.

Mots clefs : grandeurs, REP, Chevallard, cycle 3

La place des grandeurs dans les différents cycles

> *La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur, hauteur.* (Legendre, 1817)
>
> *Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort.* (Lebesgue, 1935

En partant du document faisant référence pour l'heure, le bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015 (BO, 2015) regroupant programmes compétences, connaissances…, nous observons que trois parties sont invariantes à travers les cycles : nombres et calculs, les grandeurs et mesures, espace et géométrie. On ajoute à ces trois parties au cycle 4. une quatrième sur organisation et gestion de données, fonctions (qui était incluse dans nombres et calculs au cycle 3) et une cinquième sur algorithmique et programmation. On peut noter qu'une initiation à la programmation figure dans des rubriques des programmes des cycles 2 (programmer les déplacements d'un robot) et 3 (travailler avec des logiciels d'initiation à la programmation).

Pour ce qui est des Grandeurs et mesures tout au long des trois cycles, nous mentionnons les trois documents d'accompagnement (Grandeurs et mesures pour le cycle 2, pour le cycle 3, pour le cycle 4).

Le mot de grandeur est explicitement présent tout au long des programmes de mathématiques au cours des trois cycles et est associé à la longueur, la masse, les angles, la monnaie, la contenance, la durée, les aires, les volumes ainsi que quelques unités associées.

On insiste sur le fait que le travail en cycle 2 doit se poursuivre par rapport à ce qui a été fait en cycle 1 : la manipulation et l'observation de grandeurs qui sont basiques : les longueurs, les masses et la contenance. En cycle 2, on introduit les durées et la monnaie mais le document d'accompagnement n'insiste plus sur la manipulation et l'observation.

En cycle 3, le travail sur les grandeurs se poursuit avec « *l'élargissement du champ des unités et de nouvelles grandeurs sont introduites : les aires, les volumes et les angles.* » (Grandeurs et mesure en cycle 3).

En cycle 4, sont introduites les notions de grandeurs- produits et de grandeurs- quotients. Les élèves peuvent « *identifier des grandeurs composées rencontrées en mathématiques ou dans d'autres disciplines (par exemple, aire, volume, vitesse, allure, débit, masse volumique, concentration, quantité d'information, densité de population, rendement d'un terrain)* » (BO spé n°11, p 376).

Nous pouvons conclure qu'un élève finissant sa scolarité de collège devrait avoir vu les grandeurs suivantes : les longueurs, les aires, les volumes, les angles, les durées, les masses, les monnaies.

Dans les trois cycles, les programmes insistent sur les connexions entre grandeurs et mesures, et les autres parties du programme, ainsi qu'avec les autres enseignements (croisements des enseignements).

Si un accent semble mis sur la mesure de grandeurs dans les programmes des trois cycles, les documents d'accompagnement insistent pour l'enseignement des grandeurs et mesures doit permettre aux élèves de comprendre « *le sens des mesures de grandeurs qu'ils rencontrent à l'école ou dans leur vie quotidienne et qu'ils rencontreront dans un cadre professionnel.* » Qu'en est-il alors de la trigonométrie ? Qu'en est-il des fractions ? Des nombres décimaux ? Devons-nous comprendre qu'il subsiste deux mathématiques comme l'écrivait d'Alembert dans l'article « Mathématique ou Mathématiques » de l'Encyclopédie (1751-1772), dont il est l'un des maitres d'œuvre avec Diderot : les mathématiques pures et les mathématiques mixtes ? Lorsque je parle dans les durées de quart d'heure, est-ce juste une application de la notion de fraction $\frac{1}{4}$, quotient de 1 par 4 ?

L'énorme dilemme réside dans le fait que les *compétences acquises concernant les grandeurs ou les mesures étudiées en mathématiques sont en effet utiles et nécessaires dans les autres disciplines* et donc on se rend bien compte de l'importance de les étudier en amont des autres disciplines.

A l'heure actuelle, on observe un décalage entre l'enseignant de mathématiques et les autres collègues. Le collègue de géographie enseigne la notion d'échelle ou de distance, celui d'EPS enseigne les notions de vitesse (moyenne en VMA), de distance ou de durées, ceux de sciences interviennent sur les graphiques, les régressions linéaires… Ainsi, les collègues des autres disciplines qui ont besoin de notions concrètes de mathématiques en reviennent à un enseignement de mathématiques appliquées perlé, tandis que le collègue de mathématiques enseigne les mathématiques pures, décontextualisées et demande implicitement à l'élève de faire les ponts entre sa matière et les autres.

En effet, le document d'accompagnement sur les grandeurs et mesures stipule que « *[…] ces acquisitions, et en particulier la compréhension des systèmes de mesures et le sens des préfixes, vont aussi faciliter les apprentissages menés sur d'autres grandeurs étudiées dans les autres disciplines : capacité de stockage de données en technologie, repérage dans le temps en histoire, température ou densité en sciences, etc.* ».

Le duo enseignant de mathématiques – enseignants des autres disciplines sous-entend ainsi que l'élève est capable de faire le lien entre la notion de préfixes et notation scientifique (BOspé n°11, p 371) avec celle de capacité de stockage de données en technologie, de classement des objets invisiblement petits (objets cellulaires et atomiques) aux objets invisiblement grands (objets astronomiques) en science. Si le lien sur cet exemple est encore explicite mais est à construire, qu'en est-il de la notion de calcul littéral que les élèves voient du cycle 3 au cycle 4 ? Quel lien peuvent-ils construire avec les autres matières et comment comprendre *le sens des mesures de grandeurs qu'ils rencontrent à l'école ou dans leur vie quotidienne et qu'ils rencontreront dans un cadre professionnel* ?

Pourtant, le dernier paragraphe des documents d'accompagnement du cycle 4 est pour le moins alarmant :

> *Le traitement de situations concrètes pourrait faire penser que l'enseignement des grandeurs et des mesures est aisé mais les résultats des évaluations réalisées par la DEPP montrent qu'il en n'est rien.* (Grandeurs et mesures pour le cycle 4, p 1)

Si nous regardons un peu plus attentivement la note d'information n°19 de la DEPP (DEPP, 2015 et DEPP, RT2015), on peut remarquer que on peut remarquer que parmi les quatre domaines étudiés (la géométrie, les nombres et calculs, la gestion de données étant les trois premiers), le quatrième était explicitement les « grandeurs et mesures ». Ainsi quelques-unes des questions fondamentales et générales posées dans l'évaluation CEDRE étaient pour le champ « Grandeurs et mesures » : distinguent-ils aire et périmètre ? Ont-ils des acquis sur les grandeurs usuelles (Volume ? Durée ? Etc.) ? Choisissent-ils des unités de manière pertinente ? Convertissent-ils entre unités d'une même grandeur ?

> *Ces difficultés ne sont en général pas de l'ordre de l'erreur de formule ou d'unité mais bien d'une difficulté de compréhension du concept initial.* (Grandeurs et mesures pour le cycle 4, p 1)

Cette dernière phrase sonne comme un aveu d'échec pédagogique et nous amène à un certain nombre de questions sur le type d'enseignement des grandeurs pratiqué au cours des cycles 2, 3 et 4.

La progressivité des apprentissages

> *Il semble préférable de prendre le temps de construire chacune des grandeurs étudiées à l'école primaire avec les élèves.* (Grandeurs et mesures pour le cycle 2, p 2)

Cette phrase en préambule de la partie sur la progressivité des apprentissages se révèle aussi fondamentale que floue. En effet, que signifie le verbe *construire* ? En regardant très attentivement les documents d'accompagnement, nous remarquons que les mots « observations » et « manipulations » ne sont mentionnés qu'à 7 reprises. Or, comment construire une grandeur si l'élève ne manipule pas ?

Selon les documents d'accompagnement les apprentissages se construisent progressivement tout au long des quatre cycles de l'école et du collège de la manière suivante.

• <u>Au cycle 1</u>, les élèves constituent des collections de taille donnée et déterminent des tailles de collections dès la petite section. Par des observations, des comparaisons directes et des tris, les élèves sont amenés à distinguer certaines grandeurs : longueur, masse ou contenance.

• <u>Au cycle 2</u>, les élèves travaillent sur les grandeurs suivantes : taille des collections (nombre cardinal), longueur, masse, capacité, durée, prix. Il s'agit de prendre conscience qu'un objet peut-être considéré selon plusieurs grandeurs : sa longueur, sa masse, sa contenance, etc. Quelques unités usuelles sont progressivement introduites, elles prennent sens en invitant les élèves à déterminer des mesures par report et comptage d'unités élémentaires, puis à l'aide d'instruments simples comme la règle graduée, mais aussi en leur faisant estimer des mesures de grandeurs. Les élèves commencent à se constituer un répertoire de mesures de certaines grandeurs auxquelles ils peuvent se référer pour estimer d'autres mesures.

• Au cycle 3, en plus de la poursuite du travail sur les grandeurs rencontrées au cycle 2, s'ajoutent les grandeurs aire, volume et angle, et des unités de mesure associées sont progressivement introduites. Les préfixes utilisés pour les unités (de milli- à kilo-) doivent être connus des élèves en fin de cycle. L'utilisation de ces préfixes permet, tout au long du cycle, de renforcer le travail sur les nombres entiers et décimaux. L'utilisation des nombres et des opérations arithmétiques permet de résoudre des problèmes impliquant les grandeurs étudiées. Des formules pour calculer des mesures de grandeurs sont progressivement établies et régulièrement utilisées (aire du rectangle, longueur du cercle, volume du pavé droit, etc.).

• Au cycle 4, le travail se poursuit sur les grandeurs étudiées aux cycles précédents. Des formules supplémentaires sont établies pour déterminer les volumes des solides usuels. Les notions de grandeurs produit ou quotient, qui ont pu être rencontrées aux cycles 3 (vitesse, débit, coefficient de proportionnalité, etc.), sont formalisées. Les élèves étudient l'effet d'agrandissement ou de réduction sur les longueurs, les aires ou les volumes.

La place des grandeurs dans la vie des hommes

> *L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.*
>
> (Chevallard, Bosch, 2002)

Que les longueurs, angles, aires et volumes soient très présentes dans la vie des hommes, cela ne fait guère de doute. Arpentage, astronomie, urbanisme, architecture, déplacements, échanges de biens ou de marchandises, autant de domaines où pour des raisons pratiques ces grandeurs et leurs mesures ont vu le jour et ont été étudiées pour répondre à une foule de questions que se sont posées et se posent toujours les hommes, comme celles-ci :

- **mesurer** des longueurs, des angles, pour calculer des trajets, des longueurs inaccessibles, pour dresser des plans, pour s'orienter
- **partager** des longueurs ou des angles pour construire des instruments de mesure
- **calculer** des longueurs pour clôturer des propriétés, planter des haies, prévoir des coûts de matériaux vendus au mètre, pour construire des figures
- **comparer ou partager** des surfaces agricoles pour les échanger, les acheter, les vendre
- **comparer ou évaluer** des aires à partir de figures à l'échelle, à partir d'un plan, de photos aériennes (Google Earth, IGN, ..), à partir d'un schéma
- **calculer** une aire pour estimer une quantité de peinture, de semence, de tuiles, de carrelage, de papier pour un patron ou encore pour déterminer un prix (terrain à bâtir, crépi d'une maison…)
- **calculer** des volumes pour le transport de marchandises, pour fabriquer des solides de volume donné (emballages, cuves,…)

- **dénombrer** des segments dans des configurations planes (compter le nombre d'arêtes, course de taxi dans une ville…)
- **repérer** l'épicentre d'un séisme, déterminer les zones blanches en téléphonie mobile
- **étudier la variation en fonction de** (les prix en fonction des distances, les prix en fonction des durées, les prix en fonction des prix…)

Ce sont ces questions pratiques de comparaison, de partage, de mesure et de calcul des grandeurs qu'ont pris en charge les mathématiques, au point d'en donner la définition suivante : *Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs* (Bossut, 1784).

On entrevoit que les réponses qui vont y être apportées par les mathématiques vont vouloir être générales, mais que de nombreux obstacles vont apparaitre et obligeront les mathématiques à développer des méthodes adaptées à des classes de situations, et à inventer de nouveaux concepts et de nouveaux outils.

Notre mise en œuvre au cycle 3 de l'apprentissage par l'étude des grandeurs

C'est au travers de l'étude des 7 grandeurs -longueurs, angles, aires, volumes, populations, durées et prix- que nous réalisons l'apprentissage de la géométrie et des nombres et calculs par les élèves.

On peut grossièrement dire que nous avons 4 chapitres de géométrie, 2 chapitres pour les nombres et calculs et un pour l'apprentissage des nombres entiers et décimaux et grands nombres. À y regarder de plus près, nous travaillons aussi bien les notions de géométrie que de nombres et calculs pour chaque grandeur. Par exemple, la grandeur durée nécessite la notion de fraction (comme écrit plus haut) et la construction d'un dodécagone représentant une horloge, la construction des angles…

Pour chaque chapitre, et à chaque niveau la rencontre et la familiarisation avec les notions et techniques de la géométrie se font par l'étude de situations qui permettent d'élaborer des techniques et stratégies pour répondre à une ou plusieurs des 4 questions : comment comparer, partager, mesurer, calculer la grandeur ?

On peut noter que :

- comparer, mesurer, calculer font partie des compétences à développer pour ces grandeurs au cycle 3 (voir la partie 2 *Grandeurs et mesures* du programme)

- comparer, partager permettent de construire la grandeur en tant que grandeur (sans mesure), et ce faisant de construire les connaissances et compétences géométriques du programme

- mesurer, calculer permettent de construire les compétences numériques et pré-algébriques (utilisation de formules) du programme.

Voici nos choix pour chaque année liés aux compétences et connaissances à faire acquérir à chaque niveau :

- pour les aires : comparer, partager, mesurer, calculer c'est pour CM1, CM2 et 6^{e}, la différence étant dans un approfondissement progressif, en particulier pour le calcul avec une formule où l'aire du triangle et du cercle est réservé à la 6^{e}. La progressivité ne se joue pas au niveau des questions, mais des techniques (enrichissement de celles-ci), et des situations (figures en jeu, leurs constructions, les problèmes à résoudre...).

- pour les volumes : comparer, partager, mesurer des contenances (CM1, CM2), mesurer, calculer (pour le pavé en 6^{e})

- pour les angles : comparer, partager, calculer (CM1, CM2), partager, mesurer, calculer (6^{e})

- pour les longueurs : comparer, partager, mesurer, calculer (cycle 2), calculer le périmètre avec ou sans formule en cycle 3 (carré rectangle : CM1, CM2, cercle : 6^{e}).

- pour les populations : constituer des collections de taille donnée, comparer directement (cycle 1), dénombrer et comparer dans le cas général (cycle 2), dénombrer ou calculer (cycle 3)

- pour les durées : comparer (cycles 2, 3), mesurer, calculer (cycle 3)

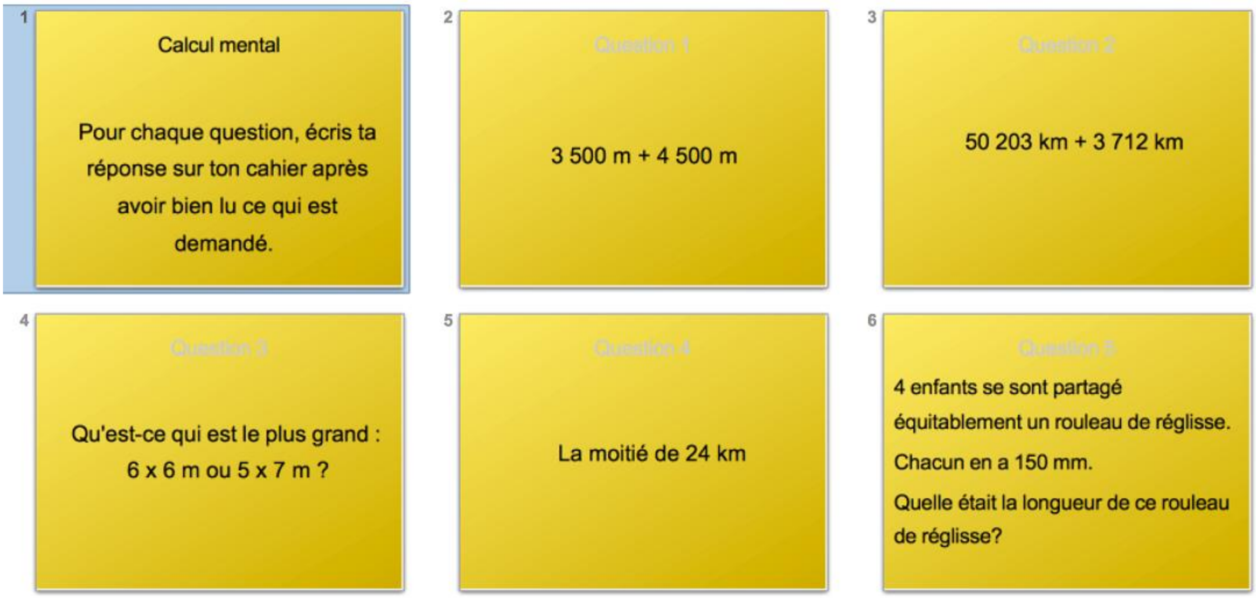
- pour les prix : comparer (cycle 2), partager, calculer (cycle 3)

	Comparer	**Partager**	**Mesurer**	**Calculer**
Aires	CM1, CM2, 6ème			
Volumes	Cycle 2, CM1, CM2		Cycle 3	6ème
Angles	CM1, CM2		6ème	Cycle 4
Longueurs	Cycles 1, 2	Cycle 2	Cycle 3	
Populations	Cycle 1	Cycle 2	Cycle 3	Cycle 3
Durées	Cycles 2, 3	6ème	Cycle 3	Cycle 3
Prix	Cycle 2	Cycle 3		Cycle 3

Répartition des grandeurs dans les cycles

Du calcul mental en cycle 3

Afin de débuter dans cette démarche et pour faciliter le travail des collègues de primaire dans leur enseignement, nous, enseignants référents dans notre REP+, leur proposons deux séances hebdomadaires de calcul mental basées sur les grandeurs. Nous avons fait le choix de mélanger les grandeurs peu importe leur déroulement propre : le calcul mental peu porter sur les grandeurs masse, longueurs, volumes… bien qu'ils soient en train d'enseigner la grandeur prix.



Les collègues du primaire doivent effectuer quatre séances de calcul mental par semaine. Nous en proposons donc 2 par niveaux (2 en CM1, 2 CM2) pour une durée d'une dizaine de minutes chacune. La troisième séance de calcul mental est consacrée à une forme de Défi Maths fondée sur le Mathador, jeu de Canopé. Il reste à l'enseignement de primaire la conception d'une séance, qu'elle soit de remédiation ou d'approfondissement, suivant ce qui s'est passé dans les précédentes. Il est bien évident qu'en amont, cela suppose que nous ayons préparé 72 séances de calcul mental pour les 3 niveaux du cycle 3.

Comme montré dans l'exemple ci-dessus, une séance de calcul mental (niveau CM1 pour celle-ci) se déroule toujours ainsi : 5 diapositives avec deux calculs additifs (les nombres sont plus grands dans le deuxième cas), une comparaison avec une multiplication, une question mêlant les mots de vocabulaire courant (moitié, triple, quart….), enfin un petit problème en deux phrases.

Il est à noter que peu d'enseignants de primaire sont équipés de vidéoprojecteur, et donc nous sommes dans l'impossibilité décrire des problèmes de géométrie avec les figures. C'est pour cette raison que nous avons conçu les séances de calcul mental sous une forme épurées qui sont facilement retranscriptibles par l'enseignant de primaire au tableau.

Les grandeurs à travers le cycle 3

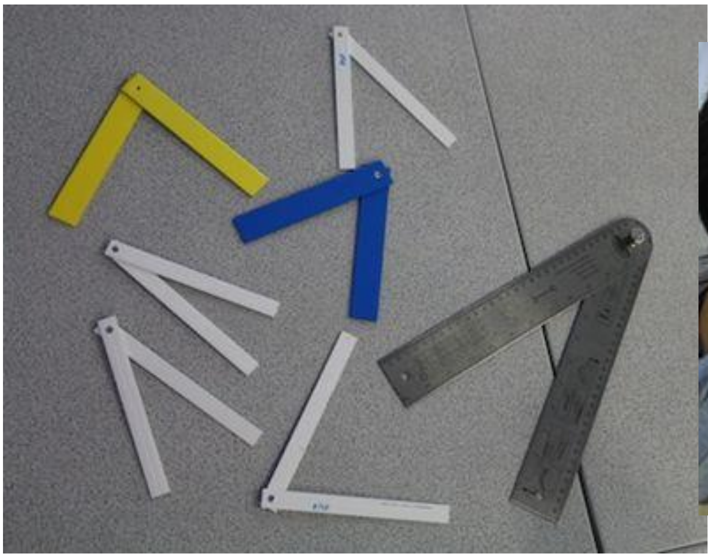
Une recherche action participative

Reste la question de l'enseignement par les grandeurs en cycle 3. Pour ce faire, nous avons créé une commission dans le conseil école collège spécialement chargé de l'enseignement des mathématiques et nous avons rédigé une recherche action, validée par Monsieur Grosdemange, DASEN Charente-Maritime. Le cœur de la recherche action participative que nous avons créé au sein de notre réseau (La Rochelle Ouest) en 2014 est de réfléchir à la mise en place d'un enseignement continu sur trois ans.

De façon concrète les personnes qui sont intéressés par la recherche action participative se retrouvent au collège deux fois par période dans une salle appelée « labo maths ». Les membres qui la composent, sont les enseignants du primaire volontaires, la conseillère pédagogique, la coordinatrice réseau et les enseignants du collège. Le but de cette recherche action participative est de mettre en place une autre forme d'enseignement des mathématiques dans les classes de primaire et de réfléchir à la question de la construction de chaque grandeur.

Au sein de cette recherche, pour aborder le problème de la construction de grandeur, nous avons décidé d'établir deux questions : comment appréhender la grandeur et comment s'approprier la grandeur.

La fausse équerre pour aborder les angles



Le semoulier pour aborder le temps

Nécessairement ces deux questions font appel à la construction d'instruments. Ainsi nous raccrochons les attendus du cycle 2 (manipulation et observation) avec les contenus du cycle 3. Pour ce faire, il faut s'intéresser fondamentalement à l'écologie d'une notion pour fabriquer le matériel qui permettra justement de l'expérimenter. Ce qui est intéressant c'est de savoir pourquoi on a besoin des outils et pour ce faire, il faut passer par les instruments comme des fausses équerres par exemple, pour comprendre ce qu'est un angle. Ainsi dans un premier temps il est nécessaire de fabriquer du matériel pédagogique adapté aux besoins de l'expérimentation, de la manipulation. Ce matériel va évoluer et va être utilisé différemment à différents niveaux en complexifiant les problèmes.

Nous renvoyons le lecteur au site du CARDIE de Poitiers (http://ww2.ac-poitiers.fr/meip/spip.php?article346) pour davantage de détails sur notre démarch

La mise en place de l'enseignement par les grandeurs en cycle 3 : exemple sur les durées

Niveau CM1 et/ou CM2 : comment appréhender les durées ?

Dans un premier moment, les élèves sont confrontés à une évaluation de durées. Trois groupes sont installés dans trois endroits différents et tout repère temporel est proscrit (les montres et les horloges sont inaccessibles). Chaque groupe va être confronté pendant quinze minutes environ à chacune des activités suivantes et chaque élève devra noter le temps qu'il pense avoir passé à faire cette activité.

L'ordre des activités est changé pour chaque groupe.

- Activité 1 : rester assis et ne rien faire
- Activité 2 : copier en continu les mots : la durée et le temps
- Activité 3 : faire un jeu ludique et plaisant (par exemple le Lynx)

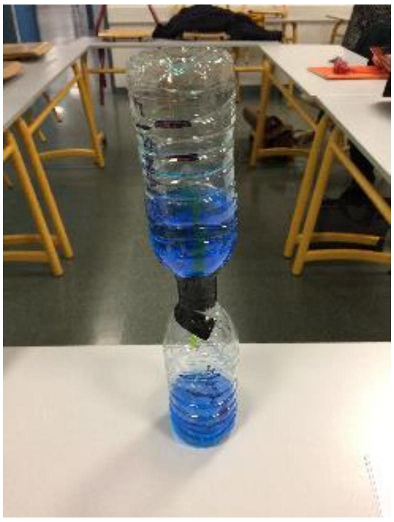
Le bilan de ce moment permettra de faire émerger les différences de perception du temps de chacun selon qu'il est occupé ou non alors que les durées sont identiques.

Le second moment est consacré à une lecture d'un texte issu de *Vendredi ou la vie sauvage* de Daniel Defoe dans lequel Robinson se construit des repères de temps. Nous allons dans cette partie découvrir comment l'Homme a partagé en Jours, Saisons, Années, Mois. Certaines de ces notions sont connexes aux sciences et peuvent donner lieu à des expériences en classe sur les phases du soleil et de la lune. Il est aussi possible de créer le débat sur les décalages de rythme entre année scolaire et année civile.

Niveau CM1 et/ou CM2 : comment s'approprier les durées ?

Le troisième moment de cette partie consiste à fabriquer un ou des instruments de mesure de durées. En effet, quand on fabrique un sablier ou semoulier ou clepsydre, on transforme physiquement le temps en quantité de matière. Cela permet de donner du sens à la notion de façon différente d'un nombre de secondes. Cette notion de débit qui traduit le temps qui passe, donne une représentation matérielle de temps immatériel.

Le dernier moment donne l'occasion aux élèves de tester leur niveau de compétence en reliant les bons instruments aux bons événements. On peut utiliser leurs instruments pour « chronométrer » une chanson.



Pour débuter ce parcours de situations sur les grandes questions, nous invitons les enseignants de primaire à puiser dans les brochures de 6ème publiées par l'IREM de Poitiers (IREM de Poitiers, 2010).

Ainsi, nous suivons le parcours de ces brochures : situations, synthèses de cours, éléments de cours.

Voici quelques exemples :

Niveau CM1/CM2 : comment comparer des durées ?

Temps d'emprunt	Durée d'une sortie
Est-il plus long d'emprunter sur une durée de 76 mois ou sur une durée de 5 ans ? Justifier.	Gaëlle met ¼ d'heure pour se rendre chez son amie Sophie. Elle reste chez son amie 20 minutes puis elle met 15 minutes pour rentrer. Gaëlle est-elle restée hors de chez elle plus ou moins de 50 minutes? Justifier.

Age limite

A-t-on le droit de laisser un enfant de 4 ans et demi jouer avec un jeu sur lequel est écrit “Interdit aux moins de 36 mois”? Expliquer.

Durée d’une réparation

J’ai fait réparer ma voiture chez le garagiste. Il a compté 1 heure de main d’œuvre pour une courroie puis 0,5 heure pour une roue à changer et 0,25 heure pour la vérification des niveaux. Le garagiste a-t-il travaillé plus ou moins de deux heures sur ma voiture ? Combien de temps exactement en heure et minutes?

Niveau CM1/CM2 : comment additionner et/ou soustraire des durées ?

Emploi du temps

Voici une photocopie de ton emploi du temps

1. Calcule le temps que tu passes à travailler en classe (attention, certains cours ne durent pas tout à fait une heure….).
2. Chaque soir de la semaine, Marie note le temps passé à travailler en dehors des heures de cours. Elle obtient cette fiche :

JOUR ET DATE	DUREE DU TRAVAIL PERSONNEL
LUNDI	15 minutes
MARDI	¾ d’heure
MERCREDI	1h35 + 3heures et 26 minutes l’après midi
JEUDI	56 minutes
VENDREDI	cinq minutes entre midi et deux
SAMEDI	une heure et quart
DIMANCHE	début à 13h14 et fin à 15heures 36minutes

   Quelle est la durée du travail personnel ?
3. Quelle est la durée totale du travail de la semaine de Marie si elle a en plus 19h 39 min de travail en classe ? En général, Marie travaille jusqu’à sept heures moins le quart le soir en semaine. Peux-tu dire à quelle heure elle commence son travail personnel en semaine ?

Duathlon

Avenir de 8 à 13 ans
8 Mai 08
Catégorie : PUPILLES
Distances :
Course à pied : 300m à 600m
VTT : 2 à 4km
Course à pied : 300 à 1600m
Résultats :

Temps	Nom-Prénom
00:09:49:33	C. VALENTIN
00:09:54:05	F. VALENTIN
00:09:55:18	V. QUENTIN
00:10:25:49	B. GUILLAUME
00:11:49:29	V. WILFRIED
00:12:46:71	B. THOMAS

Pour chaque duathlète, indique le temps qui le sépare du premier ?

Niveau 6ème : comment multiplier et/ou diviser des durées ?

Durée hebdomadaire de travail en 6ème

a) Un élève de 6ème a 25 séquences de cours de 55 min dans sa semaine.
Calculer la durée hebdomadaire de ses cours.
b) Comparer avec la vôtre.

Durée de travail en entreprise

La durée légale du travail est fixée à 35 heures hebdomadaires pour toutes les entreprises.
a) Un employé travaille 5 heures 45 minutes du lundi au jeudi.
Combien doit-il travailler le vendredi pour respecter la loi?
b) Que penser de la répartition de la durée de son travail ? Donner une autre répartition possible.
c) S'il travaille du lundi au samedi, et chaque jour autant, quelle sera la durée journalière de son travail ?

Fuite d'eau

Un robinet mal fermé peut perdre un litre toutes les cinq minutes.
Quelle quantité d'eau est perdue si le robinet fuit durant 12 heures ?

Le calendrier égyptien

Chez les Egyptiens, au temps des Pharaons, il avait été décidé de partager l'année en mois de 30 jours.
a) Combien de mois avait l'année des Egyptiens ?
b) Expliquer pourquoi l'année égyptienne se terminait par 5 jours de fêtes en l'honneur de Sothis.
c) *Travail de recherche (sites intéressants : egyptos et Wikipédia) :* En combien de parties les Egyptiens divisaient-ils le mois ? Et nous ? Comparer les deux systèmes.

Partage de l'année

a) Dans une année, y a-t-il un nombre entier de semaines ?
b) Peut-on partager exactement une année en périodes de 2 jours ? de 3 jours ? de 4 jours ? de 5 jours ? de 9 jours ? Expliquer.

Calendrier musulman

La durée d'une lunaison étant d'environ 29 jours et demi, les musulmans ont fabriqué leur calendrier avec des années de 12 mois, en alternant un mois de 30 jours et un mois de 29 jours.
a) Comparer la durée d'une année musulmane avec la durée de notre année.
b) Est-il vrai qu'un musulman qui a 33 ans dans son calendrier a 32 ans dans notre calendrier ? Expliquer.

Niveau 6ème : comment faire varier des durées en fonction de ?

Durée du jour à Paris

a) Prendre une nouvelle page du cahier, et tracer sur la marge (la ligne rouge) une demi droite graduée de 0 à 24 heures. Une heure représente une longueur de 1 carreau.
b) Sur cette demi droite graduée placer en vert le point donnant l'heure de lever du Soleil et en rouge le point donnant l'heure de coucher du Soleil le 01/01/07 à l'aide de l'almanach fourni (*" Levers et couchers du Soleil et de la Lune à Paris en 2007").*
c) Colorier en rouge la durée du jour, puis calculer cette durée.
d) Sur la première ligne verticale à droite de la

Nombre d'images par seconde

Pour qu'un film paraisse animé, il faut que l'œil humain perçoive 24 images par seconde. Certains disent que 18 suffisent. On trouve maintenant des caméras qui enregistrent beaucoup plus d'images par seconde, soit pour la fluidité, soit pour l'étude de mouvements ralentis, ou des films documentaires ou scientifiques.

120 images par seconde.

Verre en plastique qui tourne : Ralenti de 23 secondes. Combien d'images sont enregistrées ?
Cible tournante et lancer de fléchettes : Ralenti

marge tracer la même demi droite et faire le même travail pour le 01/02/07 e) Continuer pour tous les premiers des mois de 2007. f) Que peut-on dire de la durée du jour tout au long de l'année ?	de 19 s. Combien d'images sont enregistrées ? Quelle est la durée d'un film de 28400 images ? <u>1000 images par seconde.</u> Combien d'images seront enregistrées pour un film de 3min 15 sec ?

Conclusion

La mise en place des grandeurs est un grand chantier que l'on vient d'ouvrir. Il impose un changement de pratiques enseignantes et un changement de posture de l'enseignant vis à vis des élèves. Pourtant, dès que les élèves sont interrogés sur leurs savoirs mathématiques, (évaluations internationales, nationales ou les dernières évaluations informatiques nationales du premier trimestre de sixième), le contenu porte sur les grandeurs qu'ils connaissent.

Références

APMEP, *Maths & Puzzles*. Brochure n°1009, 2016.

ARCHIMÈDE, *La mesure du cercle*. Dans *Œuvres d'Archimède,* traduites par Peyrard, Paris, 1807.

CHAMBRIS Christine, *Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire*. Repères-IREM, n°69, 2007, pp. 5-31.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*. Petit x, n° 55, p. 5-32, IREM de Grenoble, 2001.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations*. Petit x, n° 59, p. 43-76, IREM de Grenoble, 2002.

CHEVALLARD Yves, *Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique*. Bulletin APMEP n° 471, 2007, p. 439-461.

GUICHARD Jean-Paul, *Les volumes en classe de sixième*. Repères IREM n° 76, p. 5-29, Topiques éditions, juillet 2009.

LEGENDRE Adrien-Marie, *Eléments de géométrie*. Firmin Didot, 11e éd., Paris, 1817.

ROUCHE Nicolas, *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique* . Repères - IREM, n°15, pp.25-36, 1994.

Mises en œuvre réalisées

IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs :* les Angles (2009), les Aires (2010), les Volumes (2011), les Longueurs (2012), les Durées (2010).
Brochures disponibles à l'IREM de Poitiers (http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/)

Références institutionnelles

BO Spécial n°11 du 26 novembre 2015, Programmes des cycles 2, 3, 4, 2015, disponible sur http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

DEPP, note d'information n°19 mai 2015 CEDRE 2014, 2015, disponible sur http://cache.media.education.gouv.fr/file/2015/26/0/depp-ni-2015-19-cedre-2014-mathematiques-college_422260.pdf

DEPP, rapport technique sur évaluations CEDRE, 2015, disponible sur http://cache.media.education.gouv.fr/file/Cedre/15/1/DEPP-CEDRE-mathematiques-college-rapport-technique_517151.pdf

Grandeurs et mesures, documents d'accompagnement pour l'enseignement, 2015, disponible sur :

- Cycle 2 :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/69/5/RA16_C2_MATHS_grandeur_et_mesures_doc_maitre_587695.pdf

- Cycle 3 :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf

- Cycle 4 :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Grandeurs_et_mesures/52/7/RA16_MATH_C4_doc_maitre_grand_mesu_610527.pdf

At 31 : Les aires en sixième.
Matériels différents, rapports différents avec la réalité

Catherine Desnavres[1], Marie Gervais[2]
[12]Groupe didactique de l'IREM de Bordeaux ;
catherine.desnavres@ac-bordeaux.fr, mgervais@ac-bordeaux.fr

Résumé : Dans cet atelier, nous allons vous présenter un parcours d'étude et de recherche qui a été élaboré dans le cadre de la recherche PERMES (IFE-Adirem) par l'équipe de l'IREM de Bordeaux. Dans les situations proposées, divers matériels sont utilisés pour installer un certain rapport avec « la réalité ». Du matériel apporté en classe (papier blanc, quadrillé ou millimétré) et manipulé par les élèves, des situations concrètes où la réalité est évoquée (schémas, cartes de géographie) et des simulations numériques (google maps, géoportail), permettent aux élèves de construire le sens du concept d'aire. Nous montrerons également comment l'organisation mathématique et didactique proposée conduit les élèves à travailler les compétences du programme et du Socle Commun en insistant sur la contribution apportée au parcours citoyen.

Mots clefs : aires ; cycle 3 ; sixième

Ce travail a été réalisé par notre groupe IREM Didactique des mathématiques, dans le cadre de la recherche PERMES (IFé - CII didactique), en collaboration avec l'IREM de Poitiers. Il est extrait et adapté de la brochure « Géométrie en sixième » de l'IREM d'Aquitaine. Les situations présentées ont été expérimentées dans plusieurs classes issues d'établissements différents, pendant plusieurs années. Elles ont été construites puis adaptées suite aux observations des classes.

Notre progression sur les aires en sixième est construite autour des objectifs suivants : comparer des aires, reconnaître que des aires sont égales, montrer que l'aire est une grandeur autre que la longueur, en la différenciant notamment du périmètre, montrer que l'aire est une grandeur mesurable, définir les unités d'aire, établir la formule de l'aire d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque, quand les dimensions sont décimales, calculer l'aire d'un polygone et estimer l'aire d'une figure non-géométrique.

Ce parcours se décline en 7 situations :

Situation 1 : les deux rectangles, différencier aire et périmètre.
Situation 2 : les figures sur quadrillage, comparer des aires.
Situation 3 : le rectangle, définir les unités d'aire
Situation 4 : le triangle, formule.
Situation 5 : le disque.
Situation 6 : les polygones, décomposer une figure.
Situation 7 : la mer d'Aral, aire d'une figure non-géométrique.

L'enchainement de ces situations permet une construction progressive du sens du concept d'aire. Il y a tout un travail préalable à faire (situations 1 et 2), avant de passer aux formules, étape trop souvent négligée. Dans les situations 3, 4 et 5, les formules deviennent indispensables car le quadrillage ne permet plus de répondre.

Situation 1 : les deux rectangles, différencier aire et périmètre

Le professeur ne donne pas le titre de la leçon, ne parle pas d'aire avant de commencer cette première activité qui est individuelle ; il distribue une feuille où sont imprimés deux rectangles identiques. Ils doivent être grisés pour que le collage se différencie nettement par sa couleur sur la feuille blanche du cahier et assez grands pour permettre aux élèves de manipuler facilement les morceaux lors du découpage. Les mesures des côtés sont des nombres entiers de centimètres (6 cm sur 8 cm ou 9 cm sur 7 cm) pour que le calcul du périmètre soit simple.

<u>Étape 1 :</u>

Découper les deux rectangles. En laisser un entier et le coller sur le cahier.
Découper le deuxième en cinq ou six morceaux avec des bords droits (rectilignes). Recoller les morceaux sur le cahier de façon à former une nouvelle figure. Les morceaux doivent « se toucher sur au moins un segment », sans se chevaucher. Il ne doit pas y avoir de trou.
Qu'y a-t-il de pareil entre la figure de départ et la nouvelle figure ?

<u>Objectif :</u> obtenir des figures de formes différentes et de même aire par découpage.

Les élèves disent : « les deux figures sont formées de la même quantité de papier », « il a fallu la même quantité d'encre pour les griser », « c'est la même surface sauf qu'on a déplacé les morceaux », « c'est la même figure sauf qu'elle n'a pas la même forme » « elles ont la même aire » ...

Bien sûr, ils confondent les mots surface et aire. Nous jugeons inutile de faire la distinction dans cette activité. Ces expressions différentes montrent que tous ne sont pas au même niveau concernant la compréhension de ce qu'est une aire.

<u>Bilan de cette première étape :</u> Toutes les figures formées à l'aide des morceaux de rectangles utilisent la même quantité de papier, elles ont nécessité la même quantité d'encre pour les griser quelle que soit leur forme. On dit qu'elles ont la même aire.

<u>Étape 2 :</u> Chacun doit commander au professeur du fil pour faire le tour de sa figure. Quelle longueur de fil faut-il ?

<u>Objectif :</u> différencier l'aire et le périmètre.

Certains élèves trouvent que leur figure a des contours compliqués et pensent que le périmètre est le même que celui du rectangle de départ. Pour gagner du temps, ils mesurent les côtés du rectangle témoin, et calculent son périmètre. Le professeur peut avoir préparé plusieurs morceaux de fil de même longueur que le périmètre du rectangle, qu'il donne à ces élèves. Ils se rendent compte que la longueur commandée ne convient pas, le fil est trop court.

Le professeur refuse une commande ainsi libellée : 3 mm + 2 cm + 2 cm + 4 mm + ……

Les élèves doivent donner la longueur totale de fil nécessaire.

Ils ont à ajouter des longueurs qui sont parfois exprimées en millimètres, d'autres en centimètres. Les erreurs sont nombreuses. Cela permet de revoir la technique de l'addition de décimaux. La calculatrice peut être autorisée pour effectuer l'addition afin d'aller plus vite. Les élèves s'aperçoivent que non seulement le périmètre de leur figure est différent de celui du rectangle de départ, mais que toutes les figures ont des périmètres différents. Certaines figures ont de très grands périmètres. Des élèves disent que plus il y a d’irrégularités dans le contour de la figure, plus le périmètre est grand.

<u>Bilan de cette activité :</u> quand on déplace des morceaux d’une figure, l’aire reste la même mais le périmètre peut changer. Il y a des figures de formes différentes qui ont la même aire mais pas le même périmètre.

<u>Pourquoi la confusion aire et périmètre résiste-t-elle chez les élèves ?</u> Une première explication à laquelle tout le monde pense : les formules n’ont pas pris de sens et sont interchangeables pour les élèves. Par exemple l’aire du rectangle peut devenir $2 \times L \times l$.

Une cause plus profonde tient au fait que les élèves associent implicitement les deux grandeurs car elles sont effectivement liées dans quelques figures fondamentales et apprises depuis la maternelle : le carré, le cercle, le triangle équilatéral. Si deux cercles ont le même périmètre, ils ont la même aire et inversement. Dans ces trois figures, périmètre et aire dépendent d’une seule et même variable. Ainsi, si le périmètre de ces figures augmente, leur aire augmente aussi, et réciproquement. Ceci est vrai pour toutes les figures si elles sont transformées par similitude. D’où l’idée que pour augmenter l’aire, il faut augmenter le périmètre : je dégage un cercle « plus grand » autour de moi pour « avoir plus de place ».

Cet obstacle culturel ne doit pas empêcher de commencer par l’étude de ces figures simples au début de la scolarité. Le savoir se construit toujours en remettant en question les connaissances anciennes plus ou moins implicites. (Mathématiques du collège au lycée, 1996, Nathan, Annie Berté).

<u>Exercices pour renforcer la distinction entre aire et périmètre.</u>

<u>Exercice 1 :</u>
Cette figure représente une planche de gommettes. Chaque gommette représente une unité.

Figure 1

Les élèves constatent que bien que l’aire diminue quand on enlève la gommette n°1, le périmètre reste le même, voire augmente quand on enlève la gommette n°3.

Ils s’en amusent et essaient d’obtenir l’aire la plus petite possible et le périmètre le plus grand.

Certains proposent d’enlever les gommettes n° 7, 8 ou 9. D’autres proposent de garder des gommettes qui ne sont rattachées aux autres que par un sommet.

Une discussion a lieu pour savoir quel est alors le périmètre d’une telle figure.

<u>Exercice 2 :</u> Classer des figures sur quadrillage selon leurs aires et selon leurs périmètres.

<u>Exercice 3 :</u> Faut-il calculer l'aire ou le périmètre pour ensemencer du gazon, peindre un mur, clôturer un champ, encadrer un tableau…..?

Situation 2 : les figures sur quadrillage, comparer des aires

Dans cette situation et les suivantes, les élèves commencent à réfléchir à la question individuellement, puis peuvent mettre en commun leurs idées avec leur voisin et travailler avec lui.

Le professeur distribue aux élèves une fiche quadrillée 5 × 5 sur laquelle se trouvent diverses figures. *(voir annexe : elles ont toutes la même aire sauf une mais on ne le dit pas aux élèves.)*

Comparer les aires de ces figures.

Objectif : évaluer une aire en utilisant un quadrillage.

La figure A est un rectangle. Des élèves comptent les carreaux qui sont autour de la figure. Le professeur leur fait remarquer qu'ils confondent l'aire et le périmètre en leur rappelant l'activité précédente. D'autres comptent les carreaux 1 à 1, il y en a 144, certains se trompent en comptant. D'autres encore mesurent les côtés en centimètres et comptent les centimètres carrés. C'est intéressant car ils n'ont pas le même résultat que leurs camarades, on peut constater qu'un cm² contient 4 carreaux. Enfin, certains comptent les carreaux sur la première rangée horizontale ou verticale, puis le nombre de rangées et effectuent la multiplication. Ces derniers ne sont pas encore arrivés à la formule de l'aire d'un rectangle, pour l'instant, ils comptent des carreaux comme ils l'ont fait à l'école primaire lors de l'apprentissage de la multiplication.

La figure B est un carré. Rien de nouveau pour cette figure, mais les élèves commencent à se douter que toutes les figures ont la même aire. Le professeur leur dit qu'il faut s'en assurer jusqu'au bout et le prouver pour toutes les figures.

Pour la figure C, plusieurs stratégies apparaissent dans la classe. Certains élèves découpent la figure en deux ou trois morceaux, puis ajoutent les aires des différents morceaux. Certains procèdent par soustraction en entourant la figure par un rectangle et en enlevant l'aire de la partie comptée en trop. La mise en commun de ces différentes stratégies est intéressante car elle donne des idées à tous pour les figures suivantes.

Beaucoup d'élèves sont bloqués sur la figure D, car ils ne savent pas comment faire pour les triangles qui contiennent des carreaux qui ne sont pas entiers. Certains entreprennent de compléter chaque carreau un par un. C'est très long.

D'autres ont l'idée de découper la partie triangulaire et de la recoller de l'autre côté pour boucher le trou qui a la même forme, la figure ainsi obtenue est un rectangle identique à la figure A.

La stratégie consistant à compléter les carreaux, a de plus en plus de mal à fonctionner sur les figures ayant un contour circulaire. Les élèves sont séduits par le découpage et s'amusent à reconstituer un rectangle pour la figure E et un carré pour la figure F.

A retenir : Pour évaluer une aire, on peut utiliser un quadrillage et compter les carreaux. Pour un rectangle ou un carré, le nombre de carreaux peut se calculer à l'aide d'une multiplication. La figure peut aussi être découpée en plusieurs morceaux rectangulaires ou entourée pour enlever ensuite ce que l'on a compté en trop. Enfin, des morceaux de la figure peuvent être déplacés.

Ce bilan est noté dans le cahier des élèves, contrairement aux précédents qui ne sont que des bilans d'étape: ils ne sont pas à retenir mais leur formalisation est nécessaire à la construction du sens.

Situation 3 : le rectangle, définir les unités d'aire

Le professeur distribue un rectangle dessiné sur du papier millimétré, de dimensions 4,7 cm sur 3,2 cm. Les dimensions en cm sont marquées sur le dessin.

Combien y a-t-il de cm² et de mm² dans ce rectangle ?

C'est dans cette situation que la formule devient véritablement performante par rapport au comptage des mm² qui est très fastidieux.

Nous utilisons cette situation, à la fois pour introduire la formule de l'aire d'un rectangle, mais aussi pour donner du sens à la technique de la multiplication de deux décimaux.

C’est aussi dans cette situation que les unités d’aire sont introduites.

Méthode 1 : Certains élèves tentent de compter les mm² un à un et bien sûr se trompent.

Méthode 2 : D’autres comptent en regroupant les mm² par cent pour faire un cm². Ils commencent donc par compter les cm² entiers, il y en a 12, ce qui fait 1200 mm², puis ils regroupent les demis cm², puis les bandes de 10 mm² par 10. Ils obtiennent ainsi 15 cm² et 4 mm² ou encore 1504 mm².

Méthode 3 : D’autres encore comptent les mm sur la longueur et la largeur du rectangle, ou mieux les trouvent par une conversion des cm en mm. Puis ils font une multiplication pour trouver le nombre de mm² dans le rectangle. Ensuite, ils essaient de faire une conversion pour donner le nombre de cm², celle-ci est souvent fausse.

Méthode 4 : Enfin certains multiplient les dimensions du rectangle en cm, et obtiennent directement le nombre 15,04 cm².

Ici, la mise en commun de toutes ces méthodes, permet de justifier l’égalité 1504 mm² = 15,04 cm².

La formule de l’aire du rectangle prend tout son sens, elle donne le même résultat que le dénombrement sur le quadrillage, de façon plus rapide.

On a une justification de la technique opératoire dans la multiplication $4{,}7 \times 3{,}2$ par la conversion des cm en mm (on multiplie d’abord des entiers, ce qu’on sait faire).

On peut aussi justifier la règle de conversion des unités d’aire : pour passer des mm² aux cm², on divise par cent, car dans un cm², il y a 100 mm².

Remarques sur la façon de poser la question :

La méthode 1 et le départ de la méthode 3 seraient favorisés si la question posée était : combien y a-t-il de mm² dans ce rectangle ? Si nous posions la question ainsi, nous obtiendrions peut-être moins souvent la méthode 2 et les élèves ne tenteraient pas la conversion en fin de méthode 3. Or la méthode 2 est très intéressante pour faire le lien entre les 4 méthodes, et la conversion des mm² en cm² donne l’occasion aux élèves de se rendre compte qu’ils doivent comprendre pour faire les conversions. Si la question posée était : combien y a-t-il de cm² dans ce rectangle, certains élèves ne pourraient pas démarrer la recherche.

Exercices de conversions d’unités d’aire :

Des aires exprimées dans des unités inadaptées, à associer aux objets correspondants, un timbre-poste avec une aire de 0,00003 m² ; un lac de 50 000 000 000 cm² …

Étape 3 :

Le professeur dessine un rectangle sur du papier blanc, les côtés du rectangle n’étant pas parallèles aux bords de la feuille.

Calculer l’aire de ce rectangle. Expliquez votre méthode.

L'orientation du rectangle dans la feuille dissuade les élèves de recourir au quadrillage: ils doivent utiliser la formule qu’ils viennent de voir. On peut alors l’institutionnaliser.

Étape 4 :

Le professeur propose des exercices où il faut évaluer l’aire d’un rectangle qui n’est pas dessiné, mais dont on connaît les dimensions.

Par exemple une pièce dont il faut remplacer le revêtement de sol, un jardin où il faut semer du gazon, un terrain ……

Le professeur propose aussi des situations où le périmètre est en jeu pour voir si les élèves font la confusion. Par exemple, une pièce où il faut poser du plancher et des plinthes, un terrain qu'il faut ensemencer et clôturer.

Situation 4 : le triangle, formule

Étape 1 :

Le professeur distribue aux élèves une feuille quadrillée 5 × 5, sur laquelle est tracé un triangle rectangle de 24 carreaux de longueur sur 12 carreaux de largeur et un triangle quelconque dont un côté et la hauteur correspondante sont sur le quadrillage.

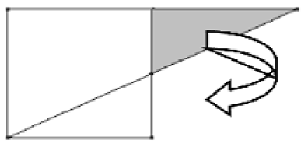
Calculer l'aire de ce triangle.

Le triangle est choisi assez grand pour que les élèves ne soient pas tentés de compter les carreaux. Ces dimensions sont des nombres pairs pour faciliter le travail des élèves (voir ci-dessous). Plusieurs stratégies apparaissent dans la classe.

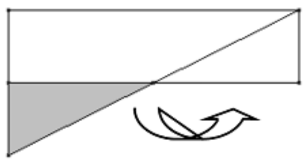
Certains élèves, pas forcément les plus nombreux, complètent le triangle par sa deuxième moitié pour former un rectangle dont ils calculent l'aire puis ils divisent par deux.

$$aire = \frac{24 \times 13}{2}$$

Certains partagent le triangle en plusieurs morceaux.



$aire = \frac{24}{2} \times 12$ Ou bien



$aire = \frac{24}{2} \times 12$

Figure 2

A cette occasion, on revoit la multiplication d'une fraction par un décimal et les trois méthodes pour calculer.

Pour le triangle quelconque, les élèves découpent en deux triangles rectangles ou tracent un rectangle autour. De rares élèves proposent des méthodes analogues à celles ci-dessus, en coupant la hauteur du triangle en deux. Lors de la mise en commun, on compare les différentes méthodes et insiste sur la (les) méthode(s) qui comporte(nt) le moins de calcul en utilisant la longueur totale du côté du triangle.

Etape 2 : Un triangle quelconque (où les trois hauteurs sont à l'intérieur) est dessiné sur papier blanc. Aucun de ses côtés n'est parallèle au bord de la feuille.

Mesurer les données nécessaires et calculer l'aire de ce triangle.

Les élèves choisissent indifféremment l'un ou l'autre des trois côtés et la hauteur correspondante. Certains partagent encore le triangle en deux triangles rectangles. A nouveau, l'absence de quadrillage permet de s'approprier la formule et de se rendre compte que le résultat est le même quel que soit le côté choisi (aux erreurs de mesure près).

On peut alors institutionnaliser la formule.

Au sujet des hauteurs ...

Par manque de temps en 6ème, l'aire du triangle avec les trois hauteurs et le cas de la hauteur à l'extérieur ne sont pas abordés : on crée ainsi un obstacle didactique qui va renforcer deux autres obstacles inévitables.

Obstacle didactique[1] : la hauteur du triangle semble appartenir à la surface du triangle...

De ce fait, on renforce :

Obstacle 1[2] :

les figures géométriques qui sont perçues comme des surfaces limitées par des bords (formes en plastique en maternelle), avant d’être conçues comme un assemblage de lignes ou de points dans un plan.

Obstacle 2 :

les directions privilégiées, horizontale et verticale, qui sont éliminées en mathématiques mais pas dans d’autres disciplines et qui sont fondamentales dans la société (posture debout, écriture, architecture...).

Traitement :

Nous avons les moyens de faire surmonter ces obstacles :

- triangle en papier découpé donc mobile pour tracer les trois hauteurs
- triangle plus grand en carton pour utiliser la règle ou une ficelle avec un petit poids pour vérifier la place de chaque hauteur issue de chaque sommet
- mêmes manipulations sur un triangle avec un angle obtus

On retrouve ici l'importance du matériel réel dont nous reparlerons à la fin de l'exposé.

Progression sur les cycles et le collège.

Il nous paraît donc inévitable de retravailler les aires en cinquième autrement qu’en terme de révision, même si elles n'apparaissent plus explicitement dans les programmes de cycle 4 et d'étudier plus en détail les hauteurs. Certains obstacles didactiques sont incontournables, mais il vaut mieux éviter de les créer sans les traiter.

Situation 5 : le disque

Connaissant une formule pour calculer le périmètre d’un disque, les élèves peuvent découvrir la formule de l’aire avec un découpage du disque en secteurs très petits.

Le professeur montre un disque sur papier blanc aux élèves et demande : « Comment déterminer l’aire de cette figure pour laquelle on ne connaît pas la formule ? »

Quelques élèves proposent d’utiliser un quadrillage, idée rejetée par la classe parce que la figure présentée est tracée sur papier blanc et de nombreux élèves proposent de découper et recoller les morceaux pour obtenir une figure connue.

L’idée du découpage en secteurs émerge et ils l’expérimentent.

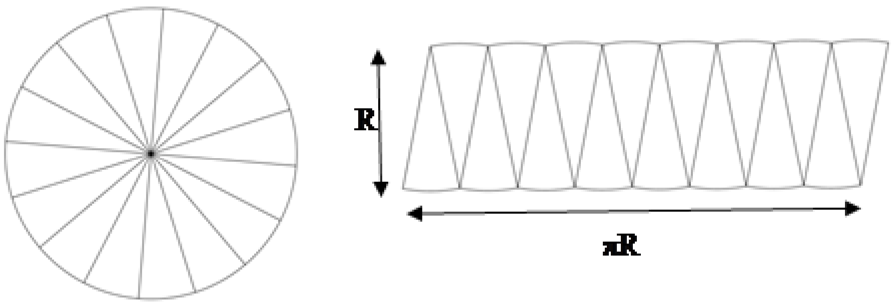


Figure 3

[1] Brousseau G. (1986)
[2] Duval R. Grand N n°76, (2005)

Une nouvelle discussion s'engage sur la nature de la figure obtenue : la succession des arcs de cercle devient un segment par passage à la limite ; le « parallélogramme » devient un « rectangle » en déplaçant un demi-secteur. Pour faciliter ces étapes, le professeur pourra montrer une animation avec un logiciel de géométrie dynamique. Nous obtenons alors les dimensions du rectangle : sa largeur est le rayon R du disque, sa longueur est le demi-périmètre $\frac{\pi \times d}{2} = \pi \times \frac{d}{2} = \pi \times R$. L'aire du rectangle permet d'aboutir à la formule qui donne l'aire du disque : π × R × R. La formule sous la forme π R² nous semble prématurée en sixième.

Conseils pour le professeur :

- il faut partir d'un cercle de rayon assez grand (au moins 6 cm) pour faciliter le découpage et le collage des secteurs par les élèves
- un découpage en 16 secteurs est recommandé
- selon le niveau de la classe, les élèves peuvent tracer les secteurs à la maison eux-mêmes ou le professeur peut fournir le disque prêt à découper

Situation 6 : les polygones, décomposer une figure

Objectif : Peut-on toujours savoir quelle est l'aire de n'importe quelle figure ? Comment fait-on ?

Il s'agit de faire déterminer l'aire d'un polygone quelconque, par exemple le terrain sur lequel est bâti le collège, ou un jardin … à partir de google maps.

Premier exemple: la place des Quinconces

Les élèves mesurent les dimensions de la figure en centimètres et les transforment en mètres en utilisant l'échelle du plan. Des erreurs persistent sur la confusion entre aire et périmètre, notamment pour le demi-disque.

Pour le calcul des dimensions réelles de la place, on voit des procédures de proportionnalité très astucieuses. La notion d'échelle n'a pas encore été vue. Un élève a fait tous les calculs avec les dimensions en centimètres, il se demande comment retrouver l'aire réelle de la place sans tout reprendre !

Figure 4

Deuxième exemple : un champ.

Plusieurs découpages du champ en rectangles et triangles apparaissent. Ce travail un peu long et difficile a été fait en groupe.

Figure 5

Situation 7 : la mer d'Aral, aire d'une figure non-géométrique

La mer d'Aral est située en Asie centrale, elle chevauche la frontière qui sépare le Kazakhstan au nord et l'Ouzbékistan au sud. Cette mer intérieure est alimentée par les fleuves Amou-Daria et Syr-Daria. A une certaine époque, elle était la quatrième plus grande masse d'eau continentale de la planète. Elle a perdu 75% de sa surface en 50 ans.

Comment peut-on évaluer l'aire de la mer d'Aral ?

Figure 6

Des élèves proposent d'utiliser une carte posée sur un quadrillage.

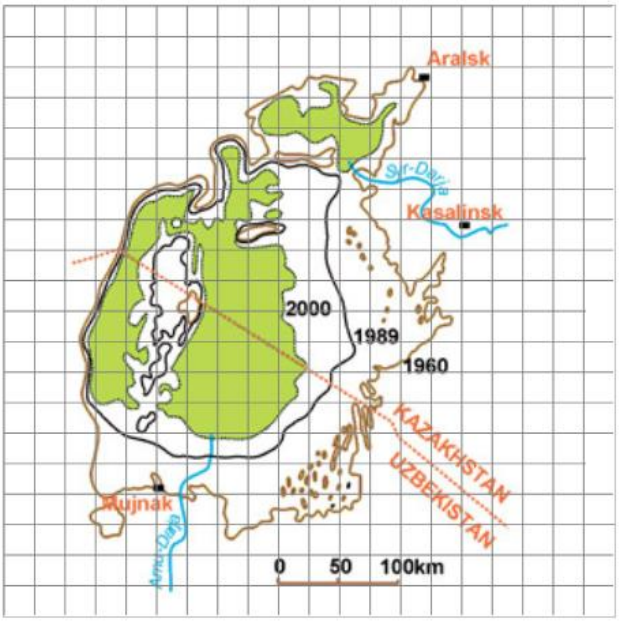


Figure 7

Le professeur distribue une carte de la mer d'Aral. Les élèves disposent d'un quadrillage établi à partir de l'échelle de la carte. Ils proposent d'approcher le contour de la figure en s'aidant du quadrillage. Puis ils comptent les carreaux à l'intérieur de la partie ainsi délimitée. Tous n'obtiennent pas le même nombre de carreaux. Ensuite ils calculent combien chaque carreau représente de km² en utilisant l'échelle de la carte. On obtient des approximations de l'aire de la Mer d'Aral. Des élèves disent que si les carreaux étaient plus petits, ce serait plus précis, mais plus difficile à compter.

<u>Prolongement :</u> voici des images satellites prises au fil des ans.

Figure 8

Le professeur propose une recherche documentaire sur les causes et conséquences du phénomène observé. C'est une occasion de montrer l'utilité des mathématiques dans des situations réelles et de contribuer au domaine 5 du socle commun “les représentations du monde et de l'activité humaine”.

Conclusion

Les stratégies mises en place par les élèves pour la résolution des problèmes dépendent des matériels utilisés. Le parcours part de manipulations de matériel concret pour évoluer vers de plus en plus d'abstraction.

Situation 1 : les élèves utilisent du papier blanc qu'ils découpent et collent.
Situation 2 : le papier quadrillé est un support réel mais les découpages sont imaginés.
Situation 3 : le papier millimétré permet de faire apparaître les unités. Ensuite, les élèves se détachent du papier millimétré, donc du dénombrement de carreaux : ils sont amenés à mesurer sur du papier blanc puis à calculer l'aire de rectangles évoqués (chambre…)
Situation 4 : un triangle en carton découpé permet de visualiser les trois hauteurs et particulièrement celle à l'extérieur. Des triangles sont tracés avec un logiciel de géométrie.
Situation 6 : l'outil informatique (Google Maps ou Géoportail) permet de calculer l'aire de figures réelles mais représentées à l'échelle.
Situation 7 : des recherches sont menées sur internet.

Cette évolution du matériel permet aux formules d'aire de prendre du sens. Chaque matériel induit un rapport avec la « réalité » différent : de la « réalité concrète » du papier à découper jusqu'à la « réalité évoquée » de la rénovation d'une chambre ou de la surface d'un champ représenté sur une carte.

Au cycle 3, l'étude des grandeurs se poursuit et la notion d'aire est introduite. Dans les manuels de sixième, toute une partie de l'étude présentée ici et qui a été proposée en sixième ne figure pas. Les auteurs supposent que la notion d'aire a été étudiée en CM2, différenciée du périmètre et que la formule de l'aire du rectangle a été mise en place. Nous avons cependant jugé important de reprendre cette étude en sixième. La progression proposée dans ce parcours est totalement conforme à celle du programme de cycle 3.

Dans le programme du cycle 4, l'étude de la notion d'aire n'est plus explicitement mentionnée. Cependant, il nous semble indispensable de poursuivre le travail, autrement qu'en réinvestissement. Nous l'avons déjà signalé au sujet de l'aire d'un triangle dont la hauteur se trouve à l'extérieur. Les dernières situations peuvent être traitées tout au long du cycle 4.

Ce parcours est conçu pour permettre aux élèves de mobiliser régulièrement les six compétences du programme de mathématiques comme indiqué dans le diaporama.

Références

Berté A.(1996). Mathématiques du collège au lycée, *Nathan.*

Castelnuovo E. et Barra M.(1980). Les mathématiques dans la réalité, *Editions CEDIC.*

Douady R.(1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2, 5-31. La Pensée Sauvage.

Douady R. et Perrin-Glorian M-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* , 20, 387-424

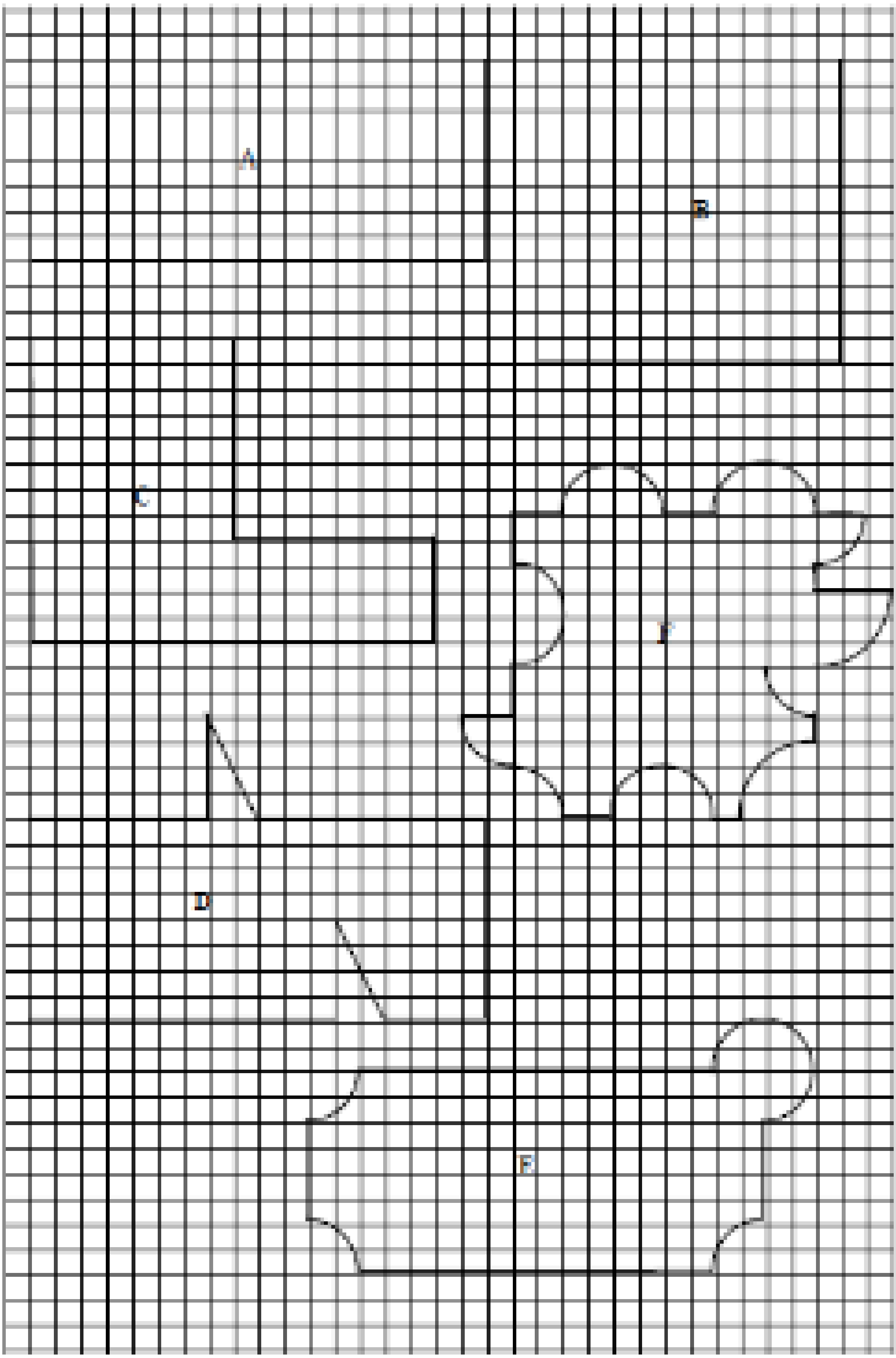
Duval R. et Godin M.(2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N 76 pp.7 à 27.*

Groupe didactique des mathématiques dans le secondaire (1996). La géométrie en 6ème, *IREM de Bordeaux*

IREM de Poitiers (2010). *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les aires.*

Polya G.(1958). Les mathématiques et le raisonnement “plausible”, *Gauthier-Villars.*

Annexe pour la situation 2



At 32 : Des films d'animation pour les apprentissages au cycle 3

Isabelle Renault

Référente pédagogique, Direction de la Pédagogie, Canopé; isabelle.renault@reseau-canope.fr,

Résumé : l'objet de cet atelier était, après une présentation de la plateforme "Les fondamentaux" d'échanger sur la problématique : comment exploiter un film d'animation en classe ou hors la classe dans le cadre de l'enseignement de la division *sur le cycle 3. Afin de prolonger la réflexion, des documents, qui figureront ensuite dans un parcours m@gistère sur l'enseignement de cette opération (sens et technique), sont mis à disposition des participants : les films sur cette thématique, une préparation de classe, un jeu « le divisor*[1] *».*

Mots clefs : division euclidienne; film d'animation ; reste ; division décimale

Présentation de la plateforme

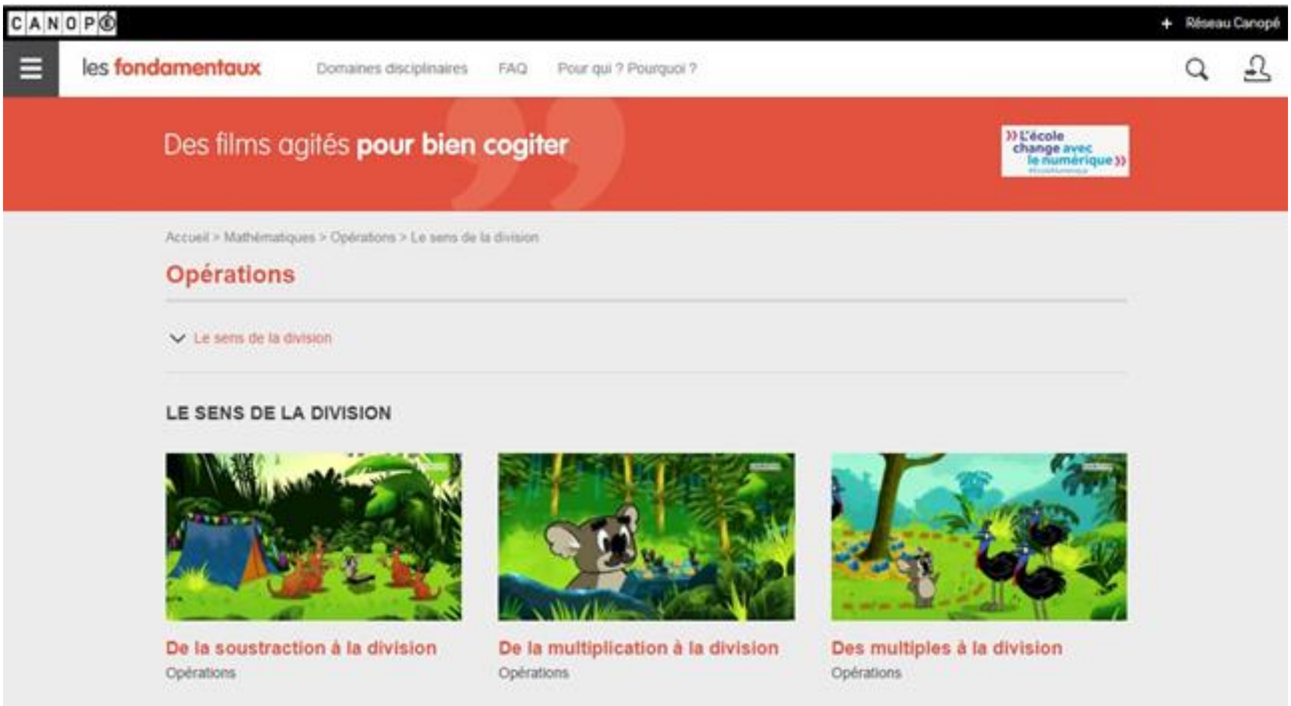


Figure 1 : La plateforme : « les fondamentaux »

Les films d'animation

Les films d'animation de la plateforme "les fondamentaux"[2] ont été réalisés dans le cadre de la stratégie du ministère "faire entrer l'école à l'ère du numérique". Ils illustrent les notions fondamentales enseignées dans les disciplines de français, mathématiques et sciences pour le primaire. Ils ont été conçus dans le but d'être exploités en classe ou hors classe pour des modalités d'usages pédagogiques très divers : travail en ateliers, travail en autonomie, ateliers de manipulation, de remédiation, de création, classe inversée.

[1] Voir le jeu et la règle de ce jeu en annexe 1
[2] Plateforme les fondamentaux : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques.html

Chaque film est intégré dans une série et traite d'une notion. Le problème est présenté dans la première partie du scénario. Dans la partie suivante le raisonnement est déroulé afin de répondre à la problématique.

Les scénaristes se sont appuyés sur des conducteurs pédagogiques écrits par des experts : professeurs d'Espe[3], conseillers pédagogiques afin de garantir une rigueur scientifique et respecter la progression des programmes.

Bien que les films s'adressent aux élèves, ils doivent être accompagnés d'une mise en œuvre pédagogique.

La liste des films

Le site « les fondamentaux » s'est enrichi au fil de ses trois années d'existence. On peut noter une évolution des divers univers graphiques mais aussi des thèmes traités.

Les premières vidéos réalisées portent sur la géométrie :

- pour la géométrie dans l'espace, les huit vidéos permettent de montrer les différentes faces d'un solide, d'une part et comment il se déploie pour son développement d'autre part. La représentation étant en perspective, cette visualisation ne dédouane pas de la réalisation de phases de manipulation en classe.
- pour la géométrie plane (une vingtaine de vidéos), les raisonnements s'appuient sur la géométrie instrumentée. De ce fait, un certain nombre de vidéos portent sur la construction à la règle, au compas, à l'équerre des quadrilatères et triangles particuliers. Voir et revoir ces vidéos permettra d'intégrer les protocoles de construction.

Une quarantaine de vidéos portent sur les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions. Elles aident à comprendre la numération décimale, la décomposition des nombres mais aussi comment les comparer ou les placer sur la droite graduée.

Une trentaine de vidéos portent sur les grandeurs et mesures. Les séries ont été fractionnées, en mesure des longueurs, des masses, des durées et la monnaie. La progression d'un film à l'autre permet de comprendre les différentes conversions.

Enfin une cinquantaine de vidéos traitent des quatre opérations, elles se répartissent en deux catégories, certaines portent sur le sens et d'autres portent plus spécifiquement sur la technique opératoire.

Un accompagnement indispensable

Pour chacune des vidéos, sont mis à disposition, une fiche pédagogique à destination des enseignants et une fiche d'accompagnement pour les parents.

Les fiches d'accompagnement pédagogique sont accessibles par l'adresse académique du professeur. Celles-ci ne décrivent pas en détail une séance de classe, mais elles permettent de contextualiser la notion, de mettre le film en lien avec les progressions de programme et de proposer des activités diverses pour intégrer les films à une séance de classe. A la fin de chaque fiche, des activités de prolongement sont présentées : elles s'inscrivent davantage dans une dynamique de micro projet.

[3] Ecole supérieure du professorat et de l'éducation

Les fiches parents sont accessibles directement sur la plateforme. Chacune traite d'une série de films. L'objectif est de donner de façon claire et synthétique les éléments de compréhension pour la notion développée. Les activités proposées ~~ont pour objectif~~ ~~de~~ doivent favoriser les échanges avec leurs enfants sur le travail effectué en classe. Il ne s'agit pas de donner des « devoirs » du soir, mais des indications sous la forme de petits jeux oraux ou de manipulation à expérimenter après avoir vu la vidéo.

Usages en classe

Une expérimentation sur l'usage de ces films d'animation a été menée par deux classes de CE1 de La Rochelle. Les professeurs ont choisi le film : « décomposer les nombres de 10 à 99 » pour travailler sur le nombre. Une captation en classe a été réalisée (visualisée lors de cet atelier[4]). Elle vise à montrer comment une équipe d'école s'est emparé de cette ressource numérique. Différentes pistes sont explorées, suivant la progression choisie, les habitudes de classe et les différents niveaux des élèves.

Le film d'animation déclencheur de la séance d'apprentissage

La vidéo a été vue en fin de séance précédente. En classe entière, le professeur part de la vidéo pour relancer les activités. Les élèves visualisent le film dans son intégralité par vidéo projection, Le professeur questionne pour faire formaliser à l'oral les éléments importants. Il mettra ensuite les élèves en travail en binômes pour exercer la notion vue.

Le film d'animation support pour un travail en ateliers

Dans un premier temps les élèves revoient la vidéo en petit groupe avec la professeure. Celle-ci questionne de façon précise les élèves pour leur permettre de bien discerner les éléments importants de la vidéo sur la notion de nombre, des éléments du scénario qui n'apportent qu'au récit. La professeure met ensuite en place différents ateliers qui vont permettre aux élèves de continuer à s'entrainer sur la notion. Pour un des ateliers, elle a extrait des images de la vidéo et les a intégrées dans un jeu de l'oie. Les élèves en difficulté pourront ainsi plus « naturellement » mettre en relation l'outil support et les exercices demandés. On voit dans la classe d'autres ateliers : addition en ligne avec un arbre, jeu de cartes du complément à 10. En lien avec le sujet du film, la professeure met en place des ateliers différenciés en accordant plus de temps à l'atelier jeu de plateau qu'elle a créé pour les élèves le plus en difficulté.

Le film d'animation avant la séance d'apprentissage

Les élèves visualisent le film seuls dans un premier temps, le professeur s'inscrivant dans une démarche de pédagogie inversée. Ils sont regroupés ensuite pour la phase de mise en commun. ~~et le~~ Le professeur laisse émerger les idées, questionne pour ~~voir les~~ amener chacun à distinguer ce qui relève du récit de ce qui relève de la notion étudiée. Les éléments importants sont progressivement posés sur le tableau interactif, et mis en relation pour construire collectivement la notion. Une fiche mémoire est ensuite créée.

[4] Cette vidéo n'est pas encore en ligne mais on peut trouver en suivant le lien : https://www.reseau-canope.fr/notice/les-fondamentaux-au-cycle-3.html des témoignages de parents et d'enseignants utilisant cette ressource.

Le film d'animation pour un travail en autonomie

Les élèves sont en autonomie avec les tablettes et les casques. Ils revoient le film individuellement autant de fois qu'ils veulent. Une fiche questionnaire leur est proposée. Ils peuvent faire des arrêts sur images, des retours en arrière, pour mieux observer, vérifier leur réponse.

Le film d'animation pour créer et reproduire

Dans une autre expérimentation en CM2 avec les fondamentaux sur les solides, les élèves ont reconstitué l'animation en réalisant les objets, les personnages, en retravaillant les dialogues. Ils ont ensuite réalisé un film « à la manière de », en réinvestissant toutes les notions apprises dans la séquence d'apprentissage et en s'inspirant du scénario de la vidéo. Il est évident que ce travail de création n'a pu être produit qu'après d'autres séances d'apprentissage, constituées de supports numériques ou non.

Le film d'animation pour créer du lien entre école et famille

La vidéo peut servir de passerelle entre l'école et la famille. Déposée sur l'ENT[5] au fur et à mesure des apprentissages et en fonction de la progression de la classe.

Les films peuvent ensuite constituer un « classeur audiovisuel mémoire » afin que les élèves puissent revoir, mémoriser et échanger avec leurs parents. Ces derniers, pourront ainsi s'approprier le vocabulaire utilisé en classe et adapté aux apprentissages.

Des parcours de formation m@gistere

La plateforme m@gistère propose aux enseignants, en inscription libre, des parcours de formation à distance ou hybrides (une partie en présentiel et une partie à distance). Parmi les parcours pris en charge par Canopé, deux sont consacrés à la prise en main des vidéos des « fondamentaux » pour des pratiques pédagogiques variées.

Un premier parcours : des films d'animation en classe pour quoi faire ?

Ce parcours, s'adresse aux professeurs des écoles, dans la collection e-action, c'est-à-dire qu'il permet une mise en œuvre dans le cadre professionnel et une analyse réflexive des pratiques. Il est d'une durée de 6 heures. Il a pour objectifs, de faire découvrir les usages de films d'animation (l'expérimentation décrite dans le paragraphe précédent fait partie des exemples montrés), de découvrir diverses stratégies d'intégration de cette ressource en pratique de classe et enfin de concevoir, puis mettre en œuvre une séquence utilisant ce type de ressource.

Un deuxième parcours : Enseigner la division au cycle 3 avec des films d'animation

Ce parcours disciplinaire s'adresse aux professeurs des écoles et aux professeurs de mathématiques. Il propose de mener une réflexion sur l'enseignement de la division au cycle 3 en décrivant les différentes étapes nécessaires au développement des compétences. En parallèle, la progression construite sur l'enseignement de la technique opératoire pour tout le cycle 3 prend appui sur la construction du sens de la division.

Des captations en classe de CM1 et de sixième viennent illustrer le propos et donnent des éléments à analyser. Différents dispositifs suivant les films utilisés sont questionnés.

[5] Espace Numérique de Travail

Échanges sur un dispositif en classe

A la suite de ces présentations de supports avec les différents films d'animation, les captations d'usages en classe et les dispositifs de formation, la place est laissée aux échanges sur la problématique : « Comment intègreriez-vous un ou des films des fondamentaux dans une séquence sur la division ? ». Différentes ressources[6] sont mises à disposition des participants : les films « les fondamentaux » sur la division, une préparation d'une enseignante avant la captation de sa séance en classe pour le deuxième parcours m@gistère et un jeu permettant de trouver le nombre de chiffres au quotient avant de se lancer dans la division posée.

Quelques questions sont posées pour amorcer la réflexion sur la problématique :

- Quel est l'axe choisi : la division/sens, la division/technique, la division/nombres ou parcours hybride ?
- Quels film(s) sélectionné(s) : pour quel objectif ?
- Quelle intégration de la vidéo :
    - à quel moment de la séance ?
    - en différentes parties/en totalité ?
    - en autonomie/en plénière

Après un premier échange par petits groupes, une discussion très fructueuse a porté sur la place à accorder à ces films dans une séance de classe. Des propositions ont émergé sur les différentes manières envisagées pour utiliser la ressource.

Certains des groupes préféraient passer la vidéo en plusieurs parties, afin de faire résoudre les problèmes aux élèves au fur et à mesure de la visualisation. Les réponses de la vidéo servent alors de validation. Ce dispositif permet aussi de laisser vivre dans la classe, différentes méthodes de résolution. D'autres étapes peuvent alors être envisagées : comparaison des stratégies, validation ou invalidation. On peut rapprocher ces propositions de celles des fiches d'accompagnement qui suggèrent par étapes des pistes d'exploitation. A titre d'exemple, pour la vidéo : « interpréter le reste[7] », on trouve une proposition après la première partie visualisée. Le problème étant posé, il s'agit ensuite de faire manipuler les élèves à partir d'un matériel en rapport avec le scénario (figure 2).

[6] voir les annexes 1 et 2

[7] https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/discipline/mathematiques/operations/le-sens-de-la-division/interpreter-le-reste.html

Propositions de pistes d'activités

Visionner le film d'animation jusqu'à 1'14.

Les élèves doivent expliciter la situation problème et se servir des prérequis sur cette notion : *chercher dans les tables de multiplication pour résoudre cette division et répondre à la question : Combien de carnets de timbres faut-il à Émilie la fourmi pour qu'elle puisse écrire à ses cousines, pendant sa semaine de vacances ?*

Par binômes, les élèves émettent des hypothèses en s'appuyant sur les tables de multiplication et sur une manipulation d'étiquettes.
Chaque binôme aura à sa disposition 10 plaquettes de 8 timbres.

Figure 2 : extrait fiche accompagnement pédagogique pour le film « interpréter le reste »

Une autre étape peut être souhaitée en faisant des arrêts sur image pour travailler sur les différentes écritures, formalisation de la situation : expressions en une ligne, avec des parenthèses (ou non), sous forme de quotient ou de produit (figure 3).

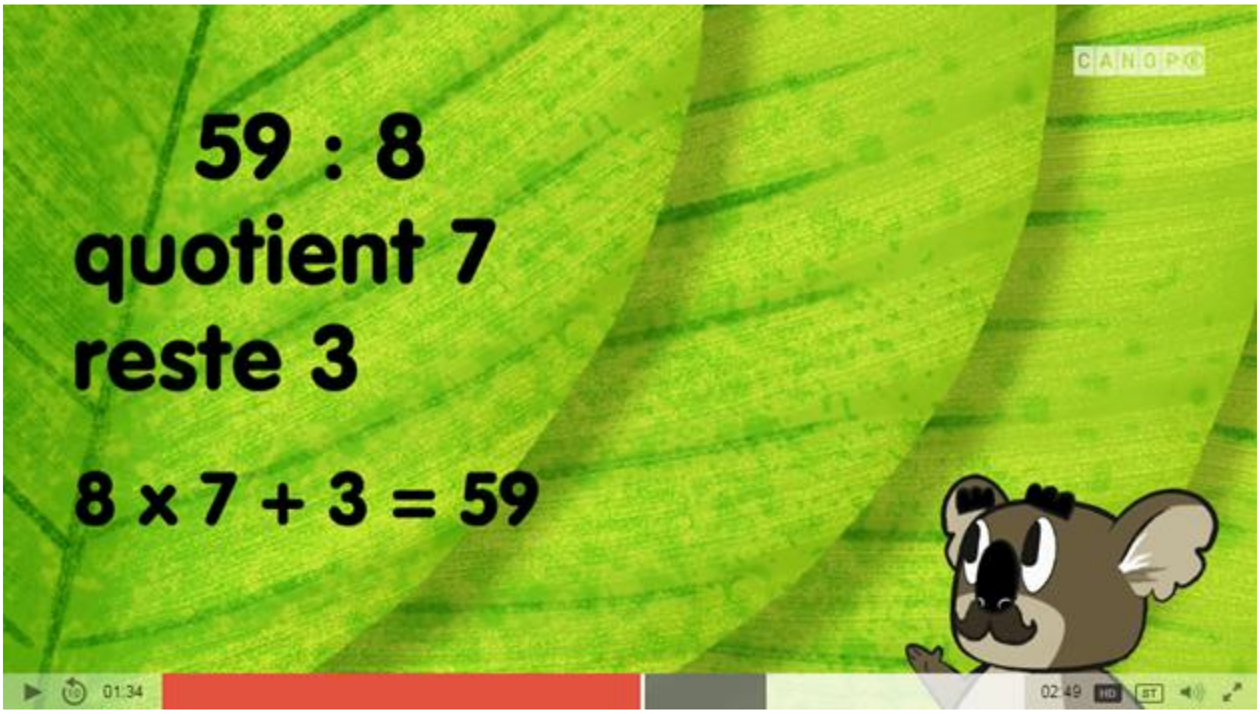


Figure 3 : capture d'image pour le film « interpréter le reste »

D'autres participants préféraient la visualisation du film, en amont de l'apprentissage d'une notion, pour une première approche, ou, suivant le niveau (6ème par exemple), pour une réactualisation des connaissances. Un petit quizz peut y être associé.

D'autres proposaient de passer en aval la vidéo, soit juste avant institutionnalisation, soit pour remédiation c'est-à-dire pour donner aux élèves la possibilité de regarder autant de fois qu'ils le souhaitent la vidéo. Le problème de la visualisation hors la classe a été abordé : s'il a un intérêt pour faire un lien avec la famille, il peut aussi être discriminant suivant l'équipement informatique des parents. Une solution est de ménager ou aménager un espace ou un temps de visualisation : on peut penser au CDI en collège, un coin ordinateur ou tablette dans la classe, un moment dans la journée pour regarder l'animation.

Un consensus se fait dans le groupe des participants à l'atelier sur les nombreuses possibilités offertes par la ressource…

Références

Sitographie

Parcours m@gistere : https://magistere.education.fr/reseau-canope/

Enseigner la division au cycle 3 avec les films d'animation les fondamentaux

Des films d'animation en classe ? Pour quoi faire ?

Plateforme les fondamentaux : https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/accueil.html

Bibliographie

Durpaire, J.M., Mégard, M. (coordination). (2012). *Le nombre au cycle 3, apprentissages numériques*. Scéren.

Rouquès, J.M., Staïner, H (2010). *Des maths ensemble et pour chacun, 5ème*, pp. 138-140. Canopé.

Annexe 1

Règle du jeu : « Divisor »

Matériel de jeu : 4 pions, 3 dés de couleurs différentes. Un dé permet de faire avancer les pions. Les deux autres déterminent les unités et les dizaines des diviseurs.

Le jeu de plateau « Divisor » reprend le principe du jeu de l'oie.

Les joueurs jouent l'un après l'autre. Le premier qui accède à la case « arrivée » gagne la partie.

L'objectif de ce jeu est d'entraîner les élèves à estimer le résultat de la division en recherchant combien de chiffres il y aura au quotient.

Dans chaque case un message est inscrit. Certains donnent des informations sur des actions telles que rejouer, passer un tour, etc. Les autres cases proposent un nombre qui sera le « dividende » accompagné d'une ou deux images de dés. Le lancer d'un ou de deux dés détermine le diviseur. Le joueur estime le nombre de chiffres au quotient et si sa réponse est validée par les joueurs ou la calculatrice, il avance d'autant de cases qu'il y a de chiffres au quotient.

Figure 4 : Plateau du jeu « Divisor »

Annexe 2

Préparation d'une séance en CM1

Compétences en jeu :

Résoudre des problèmes relevant de la division.
Interpréter le reste dans une division.
Matériel :
Vidéo Les Fondamentaux « Sens de la division - Interpréter le reste »
Ardoise
Feuilles A5 pour recherche individuelle (x12)
Feuilles affiches pour la recherche par groupe (x6) + feutres
Grande affiche pour un affichage de classe (captures d'images de la vidéo pour illustrer cet affichage).

Tableau 1 : préparation enseignante avant captation pour un parcours m@gistere

Phases		Déroulement	groupe	tps
1	**Présentation de l'activité**	Relier la séance aux apprentissages précédents en proposant quelques partages simples à effectuer sur l'ardoise : *23 gâteaux à partager en 4 enfants* *→ 23 = (4 x 5) + 3* *→ Rappeler la signification de chaque nombre (notamment quotient, reste)* *64 fleurs à mettre en bouquets de 10 fleurs* *47 cm de ruban pour faire des morceaux de 6 cm*	Indivi-duel	10'
		Annoncer explicitement l'objectif de la séance : *Nous allons résoudre un nouveau problème de division pour comprendre notamment la signification du reste.* Visualiser le début de la vidéo des Fondamentaux (→1'10) Faire expliciter par les élèves ce qu'ils ont vu *→ Emilie, la fourmi demande à M. Ronfleur, le koala de l'aider à trouver le nombre de carnets de 8 timbres qu'elle doit acheter pour envoyer une carte postale à ses 59 cousines.* Vérifier la compréhension, notamment « carnet de timbres ». Expliquer aux élèves qu'ils vont devoir aider la fourmi à résoudre son problème. Faire reformuler le problème par les élèves et écrire au tableau les mots importants : *carnets de 8 timbres ; 59 cousines*	Collectif	

2	**Activité de recherche**	Expliquer aux élèves l'organisation du travail : d'abord recherche individuelle puis par groupes de 4 pour échanger sur leurs recherches. Les élèves cherchent individuellement à résoudre le problème. → Distribuer une feuille pour les recherches. → Laisser à disposition la table de Pythagore. Les élèves sont regroupés par 4 pour échanger sur leurs recherches et trouver la bonne solution. *Vous allez discuter autour des solutions que vous avez trouvées. Chacun doit expliquer sa solution et la manière dont il y est arrivé. Les autres expliquent pourquoi ils sont ou ne sont pas d'accord.* *Puis vous vous mettrez d'accord sur la solution la plus pertinente et l'écrirez sur l'affiche. Vous devez noter la manière dont vous êtes arrivés au résultat et la réponse au problème posé par la fourmi.* *Certaines affiches seront montrées à toute la classe, il faut donc écrire assez gros.* Faire reformuler la consigne par les élèves et écrire au tableau la consigne (les différentes étapes du travail de groupe). Les élèves échangent et réalisent leur affiche. → Distribuer la feuille affiche à chaque groupe. → L'enseignante passe dans les groupes pour vérifier le respect des consignes, observer les procédures des élèves, relancer la discussion si nécessaire…	Indivi-duel Groupes de 4	15' à 20'
3	**Mise en commun** Confrontation et validation	L'enseignante sélectionne certaines affiches et demande aux groupes concernés de présenter leur travail. → Choisir des affiches dont la solution est différente. → Choisir des affiches dont la procédure de résolution est différente. → Choisir des affiches dont la présentation est différente. Demander aux élèves de s'exprimer et d'échanger en argumentant sur le travail présenté.	Collectif	10' à 15'
4	**Structuration et institutionna-lisation**	Faire reformuler par les élèves la solution du problème posé par la fourmi et la procédure pour résoudre ce problème. Réaliser, en même temps, un affichage pour garder une trace de ce qui a été appris lors de la séance. Visionner la fin de la vidéo.	Collectif	5'
5	**Exercices d'application**	S'il reste du temps, proposer quelques exercices à résoudre sur l'ardoise pour vérifier la compréhension. - 18 personnes doivent se rendre à La Rochelle en voiture, sachant qu'il y a 5 places dans une voiture, combien de voitures faut-il ? - 60 images sont rangées dans un album, sur chaque page il y a 9 images, combien de pages sont utilisées ? - 32 cartes à distribuer de manière égale entre 6 joueurs, combien en auront-ils chacun ? (quotient inférieur ici)	Indivi-duel	5'

At 33 : Des problèmes ouverts tout au long du cycle 3 (et plus si affinité)

Françoise Hérault[1], Fabrice Vandebrouck[2]

[1]ESPE de Paris, IREM de Paris ; francoise.herault@espe.fr
[2]Université Paris Diderot, IREM de Paris, LDAR ; vandebro@univ-paris-diderot.fr

Résumé : Nous abordons dans cet atelier des questions cruciales liées à la pratique des problèmes ouverts : A partir de quelles caractéristiques peut-on dire qu'un problème est ouvert ? Pourquoi en proposer aux élèves? Avec quels objectifs ? Quelles places dans les progressions mathématiques, quelles traces écrites de la part des élèves, quelles évaluations en faire ? Quelles interactions avec les séances ordinaires ? Nous donnons des éléments de réponses en nous appuyant sur différents auteurs et sur nos expérimentations.

Mots clefs : problème ouvert ; activité mathématique ; gestion ; aides

Dans cet atelier, notre objectif global est de faire réfléchir les participants, à partir d'un ou deux exemples de problèmes ouverts et de leur mise en œuvre dans des classes, à l'intérêt et à la gestion des problèmes ouverts en cycle 3. L'atelier est le fruit du travail d'un groupe IREM sur les problèmes ouverts qui a fonctionné à l'IREM de Paris de 2012 à 2016 et qui a donné lieu à la publication d'une brochure IREM Groupe POLIREM, IREM de Paris, brochure IREM numéro 96

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS15002.pdf.

L'atelier se déroule en plusieurs temps. Dans la première partie, nous essayons de caractériser les problèmes ouverts à partir des propositions spontanées des participants. Cela permet de dégager quelques premières idées fortes liées à ces problèmes. Dans la deuxième partie, nous mettons les participants en situation de recherche d'un problème ouvert à leur niveau, afin, non seulement de les faire réfléchir sur le problème et ses caractéristiques, mais surtout de dégager des caractéristiques de l'activité mathématique possibles d'élèves en situation de résolution de problème ouvert. Dans la partie 3, nous présentons une revue de la littérature qui a le plus soutenue l'activité du groupe IREM. Dans la partie 4, nous nous intéressons enfin aux conditions des mises en œuvre des problèmes ouverts dans les classes. Dans cet article, nous reprenons cette structure en quatre parties-

Des caractéristiques des problèmes ouverts

En guise d'introduction à l'atelier, les participants sont tout d'abord invités à lister des caractéristiques qui leur paraissent saillantes en lien avec les problèmes ouverts. Ces caractéristiques qui apparaissent spontanément sont complétées par les auteurs pour arriver à définir un peu précisément les problèmes ouverts.

Un premier point de vue est celui des tâches mathématiques. Dans notre atelier nous faisons la distinction claire entre les tâches mathématiques, du côté des mathématiques et de l'énoncé des problèmes et l'activité mathématique, qui est du côté des élèves. Les problèmes ouverts supposent des tâches qui ne se réduisent pas à des applications immédiates et une activité qui va être qualifiée de « riche » de la part des participants à l'atelier. Les problèmes ouverts ne se limitent pas à appliquer des connaissances de façon plus ou moins directe : la ou les solutions sont à la portée des élèves mais ne sont pas évidentes, les activités à mener ne sont pas immédiates, il y a des étapes, des intermédiaires à introduire, en un mot des adaptations au sens de Robert (1998). Ce sont donc aussi des « tâches complexes » mais au sens des didacticiens et pas au sens plus spécifique de l'institution actuellement (plutôt associées à situations de la vie courante avec des données de tous ordres à analyser pour en extraire de l'information pertinente).

Ceci étant, les caractériser en termes de « tâche complexe » et « activité riche » ne suffit pas à les définir assez précisément. Par exemple, dans leur article de 2004 dans Repère IREM, Robert et Rogalski (2004) étudient la question des différents types de problèmes : ils considèrent les problèmes d'introduction, les problèmes transversaux et les problèmes de recherche.

Les problèmes d'introduction semblent pouvoir se ramener à ce que d'autres appellent des situations problèmes : ce sont des situations d'apprentissage d'une connaissance nouvelle à travers un problème qui par sa construction requiert que les élèves surmontent un obstacle par la mise en fonctionnement d'une connaissance qui ne leur est pas encore familière (ou même totalement nouvelle). On trouve typiquement ces situations problèmes au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998).

Les problèmes transversaux et les problèmes de recherche sont des problèmes qui vont permettre aux élèves d'autres types d'apprentissages : il s'agit moins d'introduire des nouvelles notions que d'approfondir les connaissances déjà acquises par les élèves ou en cours d'acquisition, en les adaptant ou en les réorganisant pour pouvoir résoudre ces problèmes. Les problèmes « ouverts » ne sont pas explicitement mentionnés dans l'article de Robert et Rogalski mais on peut penser qu'ils couvrent ces deux catégories, à la fois problèmes transversaux – en termes de connaissances multiples à mettre en fonctionnement – et problèmes de recherche.

On retrouve des caractéristiques similaires dans ces problèmes, notamment le fait qu'ils font sens pour les élèves et favorisent leur engagement dans la résolution. Ils supposent une certaine posture de recherche de la part des élèves, qui peuvent avoir des initiatives, différentes démarches. Ils doivent permettent de valoriser les procédures personnelles des élèves, même partielles ou partiellement correctes. Il s'agit aussi de leur faire percevoir qu'avec leurs connaissances parcellaires, ils peuvent tout de même s'engager dans le problème. Il n'y a pas nécessairement de réponse finalisée attendue mais il y a des possibilités de réponses partielles de la part des élèves, multiformes et qui rendent possible des institutionnalisations elles-mêmes partielles de la part des professeurs.

L'une des difficultés relevée par les participants reste celle de la gestion du temps et celle de mener ces types de problèmes durant les temps de la classe, dans les contraintes actuelles des programmes. Il n'y a pas clairement d'injonction à mener de tels problèmes. Le gain pour les élèves n'est pas visible sur le court terme. Il faut accepter l'idée qu'avec ces problèmes, on perd du temps à court terme pour que les élèves en gagnent peut-être, à moyen ou long terme. Les exercices classiques provoquent souvent une orientation univoque de l'activité des élèves avec une prise en main rapide par le professeur. Les moments de recherche de problèmes ouverts peuvent permettre de laisser plus d'autonomie aux élèves dans leurs activités. Il s'agit plus de valoriser des compétences mathématiques transversales (rechercher, rédiger, expliquer…) que des connaissances mathématiques proprement dites.

Ces problèmes restent souvent difficiles pour les élèves, surtout s'ils ne sont pas pratiqués régulièrement, ce qui suppose donc une pratique régulière dans les classes pour arriver à des effets possiblement visibles sur les élèves. Ils sont l'occasion de faire travailler les élèves de façon différente, en îlots, en valorisant la coopération dans des groupes.

Zoom sur la résolution d'un problème ouvert

Dans cette deuxième partie, un énoncé de problèmes ouverts est donné à chercher aux participants de l'atelier : « *On se donne un carré de taille quelconque. Pour quelles valeurs de n peut-on partager ce carré en n carrés ?* » Un carré vert, découpé dans du papier bristol, est distribué aux stagiaires avec un autre énoncé possible du problème : « *Quels sont les entiers naturels n tels que le carré vert ci-dessous soit pavable par n carrés ?* ». Ce problème est extrait de la brochure SiRC (IREM de Grenoble).

Ce problème ouvert n'est pas destiné au cycle 3 mais aux participants. Ceux-ci doivent rechercher le problème, réfléchir aux formes d'énoncés des problèmes ouverts et réfléchir à leur activité mathématique pendant la résolution. La confrontation des deux énoncés et la présence du matériel distribué avec le deuxième énoncé est aussi discutée. L'énoncé d'un problème ouvert doit-il nécessairement être court ou bien doit-on plutôt s'assurer que l'énoncé ne pose aucune difficulté de compréhension pour les élèves ? Quel est ici le meilleur énoncé à donner pour que les élèves comprennent ? Bien que courts, les deux énoncés proposés ne sont pas si facilement compréhensibles ici. Les carrés « découpés » doivent-ils être de même taille ? (découpage en 4, 9…). Rien ne le dit. Le mot « partager » signifie-t-il « découper » ? « plier » ? Plier induit une certaine procédure et des configurations inaccessibles – on voit dans les figures ci-dessous certains partages qui ne sont pas accessibles par pliage. Distribuer le matériel (second énoncé) est-il une aide ou bien induit-il un pliage du carré vert qui s'oppose à certains partages ? – Est-il un support pour les élèves et la taille importe-t-elle? Si les élèves ont à construire des carrés les tailles seront –elles différentes ? Sur papier quadrillé on pourrait penser que cela aide mais cela induit un seul format de carré et réduit les possibles.

Il y a des réponses partielles possibles pour les élèves : 4 est par exemple une solution facilement trouvable, puis 9, 16... A partir de 4 carrés, on peut partager l'un des carrés lui-même en 4 carrés. Cela donne 7 carrés (4+(4-1)). En répétant cette construction, on construit successivement des partages en 4, 7, 10, 13… ceci donne en définissant d'algorithme de construction – on divise à chaque étape le carré en haut à gauche, ce qui en supprime 1 et en rajoute 4 - des partages pour tous les nombres n de la forme $n = 3k+1$ ($k \geq 0$).

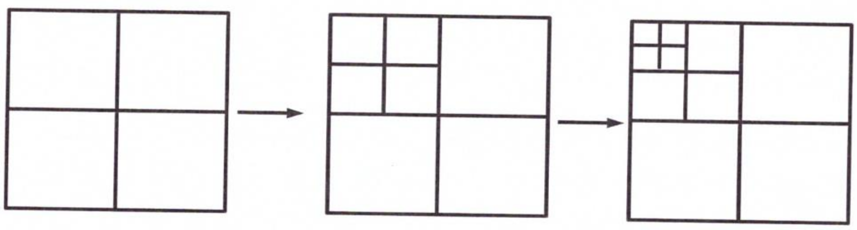


Figure 1 : illustration de l'algorithme 3k+1

On peut alors commencer un travail sur les nombres entiers et se poser des questions sur les entiers n qui sont atteints par ces deux algorithmes ou bien ceux qui ne sont pas atteints par les deux algorithmes ci-dessus : encore beaucoup 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 11 ; 12 ; 14 ; 15 ; 17… A partir du partage en 9 et en reproduisant l'algorithme opéré à partir de 4 carrés, on obtient de nombreuses autres valeurs de n : par exemple 9 ; 12 ; 15… il n'y a toujours pas d'assurance d'atteindre tous les entiers n.

A partir des partages en 9 et en 16 et non pas cette fois en continuant les partages mais plutôt en regroupant des petits carrés (renversement de la démarche), on peut cette fois arriver à 6 ou 8.

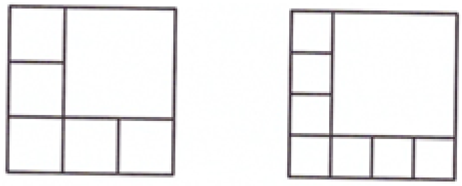
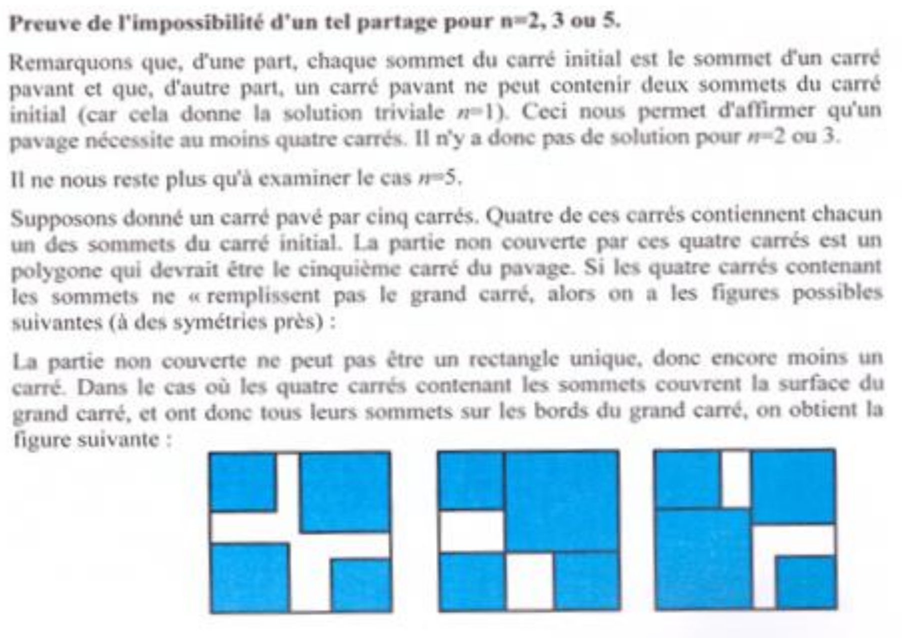


Figure 2 : illustration pour obtenir 6 et 8 carrés

En partageant dans les deux cas le grand carré en 4, on enlève un carré au total et on en rajoute 3. On voit donc qu'on peut avoir une solution pour tous les entiers n de la forme $n = 3k$ $(k>1)$ et $n = 3k + 2$ (k>1). Cela suffit maintenant à conclure qu'on peut atteindre tous les entiers n sauf a priori 2, 3 et 5.

La preuve de l'impossibilité de paver en 2, 3 ou 5 carrés n'est pas immédiate et peut être laissée aux meilleurs élèves. La figure 3 est un extrait de la justification telle qu'on la trouve dans la brochure de Grenoble.



Preuve de l'impossibilité d'un tel partage pour n=2, 3 ou 5.

Remarquons que, d'une part, chaque sommet du carré initial est le sommet d'un carré pavant et que, d'autre part, un carré pavant ne peut contenir deux sommets du carré initial (car cela donne la solution triviale $n=1$). Ceci nous permet d'affirmer qu'un pavage nécessite au moins quatre carrés. Il n'y a donc pas de solution pour $n=2$ ou 3.

Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas $n=5$.

Supposons donné un carré pavé par cinq carrés. Quatre de ces carrés contiennent chacun un des sommets du carré initial. La partie non couverte par ces quatre carrés est un polygone qui devrait être le cinquième carré du pavage. Si les quatre carrés contenant les sommets ne « remplissent pas le grand carré, alors on a les figures possibles suivantes (à des symétries près) :

La partie non couverte ne peut pas être un rectangle unique, donc encore moins un carré. Dans le cas où les quatre carrés contenant les sommets couvrent la surface du grand carré, et ont donc tous leurs sommets sur les bords du grand carré, on obtient la figure suivante :

Figure 3 : preuve de l'impossibilité pour 2, 3 et 5

Ce problème illustre bien certaines des caractéristiques de l'activité mises en relief dans la partie précédente, à savoir la possibilité pour les élèves de s'engager au moins un peu dans le problème : 4, 9, 16 sont facilement accessibles… il y a des premiers éléments de généralisation et formalisation possible : par exemple si on note P(n) la propriété « il existe un pavage d'un carré quelconque par n carrés ». Alors par construction, il vient quel que soit k >0, on a P(k^2).

Les élèves peuvent s'engager dans plusieurs pistes, proposer différents découpages et se poser des questions sur le fait d'atteindre ou non tous les nombres entiers. Si on a les P($3k$+1) (k ≥ 0) alors on peut travailler sur la partition {(3k, 3k+1, 3k+2) k ≥ 1}. On peut d'abord avoir l'algorithme qui fait passer d'un entier n solution à l'entier $n+3$ – transformation d'un petit carré en 4 petits carrés, ce qui en ajoute bien 3 – ou on peut d'abord essayer d'atteindre 6 et 8 sachant qu'on a déjà obtenu 7. Plusieurs preuves partielles d'arithmétique élémentaire sont accessibles aux élèves, à divers niveaux de difficultés, ce qui permet le travail sur un même problème avec une certaine différenciation des élèves. On travaille enfin sur le rôle des exemples, que des exemples ne suffisent pas à justifier que tous les entiers d'une forme donnée sont atteignables sans avoir si ce n'est donné une preuve, au moins un algorithme (c'est-à-dire avec un aspect récursif) de construction.

Deux références sur les problèmes ouverts

Les références que nous avons retenues dans notre groupe IREM et pour l'atelier sont d'une part le livre Arsac et Mantes (2007) « Les pratiques du problème ouvert », un ouvrage écrit en 2007 après 20 ans de pratique et d'analyse sur les problèmes ouverts, d'autre part les deux articles de Kosyvas (2010, 2013), le premier « Problèmes ouverts : notions, catégories et difficultés » dans les Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives et le second « Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège » dans Repère IREM numéro 91.

Les premiers rappellent tout d'abord la définition de Jean Brun : « *Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est à dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple* ».

L'objectif des problèmes ouverts, d'après les deux auteurs, est de mettre les élèves dans la situation du chercheur en mathématiques. C'est aussi placer les élèves dans une situation d'apprentissage qui les amène à essayer, conjecturer, tester, prouver. Pour eux, le problème ouvert doit avoir les caractéristiques suivantes : l'énoncé est court ; l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de question du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours. Enfin, le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, ils peuvent prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples… Il est souhaitable (souhaitable mais non crucial) qu'il y ait :

- plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat
- ou éventuellement plusieurs expressions de la solution
- ou plusieurs solutions
- ou plusieurs possibilités de trouver des solutions partielles.

Pour obtenir des effets importants sur les élèves et les enseignants, la recherche du problème ouvert doit se faire selon eux ponctuellement, en classe, soit 3 à 4 fois par an.

Pour Kosyvas, la première caractéristique – énoncé court - et la troisième caractéristique – domaine conceptuel familier de l'élève - bien qu'elles contribuent favorablement à la gestion pédagogique de la classe, ne sont pas indispensables à chaque problème ouvert. En effet, il n'est pas certain que seule la formulation courte, laconique, facilite la compréhension. Pour lui, le problème doit être clair au niveau sémantique, mais pas nécessairement court. Le terme « problème ouvert » renvoie seulement à un problème de recherche pour lequel l'élève ne dispose d'aucune procédure de résolution éprouvée. Par exemple un problème sur une notion non déjà enseignée constitue toujours un problème ouvert, même s'il n'est pas toujours pertinent de la présenter sous forme d'un problème ouvert. Même chez les didacticiens des mathématiques, il signale qu'il n'y a pas de définition commune du problème ouvert. Il s'agit d'un problème avec de nombreuses directions ouvertes. Il souligne que les problèmes ouverts restent une activité marginale dans les pratiques de classe car ils incluent des difficultés de compréhension pour les élèves et de gestion de classe pour les enseignants.

Dans notre groupe IREM et notre atelier nous retenons comme caractéristiques cruciales des problèmes ouverts :

- **La démarche n'est pas indiquée :** la tâche ne se réduit pas à une succession d'applications immédiates de connaissances, elle nécessite certaines adaptations de ces connaissances et une disponibilité de connaissances qui sont anciennes pour les élèves ;
- **Les problèmes sont connectés avec les pratiques ordinaires :** ils font travailler des compétences transversales, mais on doit aussi pouvoir travailler aussi bien des réinvestissements de connaissances anciennes que préparer à l'introduction de nouvelles connaissances ;
- **La caractérisation de problème comme ouvert est subjective,** elle dépend des élèves, du niveau de la classe, des connaissances anciennes des élèves supposées disponibles, des objectifs d'apprentissages de l'enseignant ;
- **Il y a de nombreuses possibilités d'ouvertures d'un problème** : il peut s'agir de la variété de méthodes de résolutions, de l'existence de solutions multiples, des interprétations ouvertes de l'énoncé…
- L'énoncé du problème est clair **au niveau sémantique** mais pas nécessairement court ;
- La solution n'est pas disponible d'emblée, **mais elle est possible à construire** par les élèves ;
- Tous les élèves peuvent **commencer quelque chose** avec leurs propres connaissances même si le problème leur paraît difficile : essayer, conjecturer, tester, projets, contre-exemples…
- La **solution finale validée n'est pas obligatoire** mais des solutions et validations partielles sont possibles

Ces critères cruciaux ne sont pas nécessairement faciles à trouver dans les problèmes. Les problèmes ouverts « robustes » restent encore rares. Nous n'avons pas abordé dans l'atelier la façon d'ouvrir les problèmes classiques. Sur ce point on consultera Betton et Coppé (2005).

La gestion des problèmes ouverts

Un nouveau problème ouvert est proposé aux participants, à chercher en groupe : « *Léa a un récipient de 8L d'eau et veut en donner 4L à son ami Tom. Pour mesurer, elle dispose en plus de 2 récipients, non gradués, vides : l'un de 5L et l'autre de 3L. Quelles sont les actions à faire pour verser les 4L d'eau dans le récipient de 5L ?* ». Cette fois, les participants sont invités à réfléchir aux conditions de mise en œuvre dans les classes : Dans quelle progression ? Avec quelle mise en œuvre ? Quelle gestion des élèves ? Quelles aides apporter aux élèves, notamment pour des élèves qui ne pourraient vraiment pas s'engager dans l'activité ? Quelle différenciation possible ? Quelle correction ? Quel bilan ? Quelle évaluation des élèves ?

Par exemple, l'introduction du problème et la dévolution au problème aux élèves peut se faire en utilisant un extrait du film « Une journée en enfer ». Il met en scène l'inspecteur John McClane (Bruce Willis) qui se trouve aux prises avec un maître chanteur, facétieux et dangereux, qui dépose des bombes dans New York. Dans l'extrait, le maître chanteur attire l'inspecteur à proximité d'une fontaine d'eau et exige de lui qu'il réponde à une énigme formulée ainsi : « *Sur la fontaine, il doit y avoir 2 bidons, l'un a une contenance de 5 gallons, l'autre de 3 gallons. Remplissez l'un des bidons de 4 gallons d'eau exactement et placez-le sur la balance. La minuterie s'arrêtera, soyez extrêmement précis, un gramme de plus ou de moins c'est l'explosion* ». Mais le fait de proposer l'énigme du film n'induit pas les mêmes procédures : par exemple l'économie d'eau n'est pas la même selon que l'on a seulement un seau de 8 litres d'eau uniquement ou si on a la fontaine à disposition. Avec la première énigme, on doit représenter 3 quantités qui évoluent à chaque étape, la première étape étant 8 litres dans grand seau initial, 0 litres dans le récipient de 5L et 0 litres dans le récipient de 3L. La quantité totale d'eau reste constante :

8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3

Figure 4 : solution possible avec 3 récipients

Avec le deuxième scénario, on a besoin seulement de représenter deux quantités – les deux dernières colonnes - qui évoluent de la même façon à chaque étape, avec une étape de moins – la première. Mais le fait de remettre de l'eau à la fontaine peut s'avérer bloquant pour certains élèves car des quantités mathématiques disparaissent ou réapparaissent.

Dans l'expérimentation telle que nous l'avons menée dans le cadre du groupe IREM, les élèves de classe de seconde visionnent l'extrait du film et recherchent individuellement la réponse au problème posé pendant 5 minutes. Ensuite, le travail est organisé par groupes de 4. Les élèves se prennent rapidement au jeu. Ils cherchent des solutions assez farfelues en faisant intervenir d'autres outils non disponibles. Ensuite après un certain temps certains commencent à faire des schémas, des essais. Les groupes qui ne font pas de schémas et qui essayent de résoudre « de tête » ont du mal à avancer dans leur recherche. Le rôle des schémas apparait clairement et une aide proposée par le professeur aux élèves qui ne démarrent pas est de faire des schémas. Plusieurs solutions émergent mais la rédaction de ces solutions pose problème aux élèves. Certains élèves passent effectivement par des schémas avec des flèches, d'autres essayent de rédiger un texte, ce qui est difficile pour eux. De plus ils n'en voient pas forcément la nécessité.

Le problème permet de faire travailler les élèves faibles mais possède des extensions qui permettent de faire travailler les groupes plus forts. Dans notre expérimentation, un groupe ne voit pas du tout comment faire et utilise en fin de séance l'application du site « Matou Matheux » qui permet de visualiser les transvasements en temps réel, ainsi que les quantités d'eau dans les bidons. Les élèves du groupe parviennent alors à trouver et à expliciter la solution du problème. Au contraire, des groupes peuvent trouver assez vite la solution mais il est possible de proposer des généralisations aux élèves avec d'autres valeurs des contenances ou bien en cherchant des conditions génériques sur les contenances atteignables compte tenu des contenances des deux récipients donnés.

Des productions d'élèves de seconde sont proposées à la discussion pendant l'atelier. Certaines sont très proches de la réalité, les schémas donnant plus ou moins à voir la forme des récipients tandis que certains élèves arrivent à s'extraire de la situation matérielle pour donner les représentations mathématiquement signifiantes (figure 5).

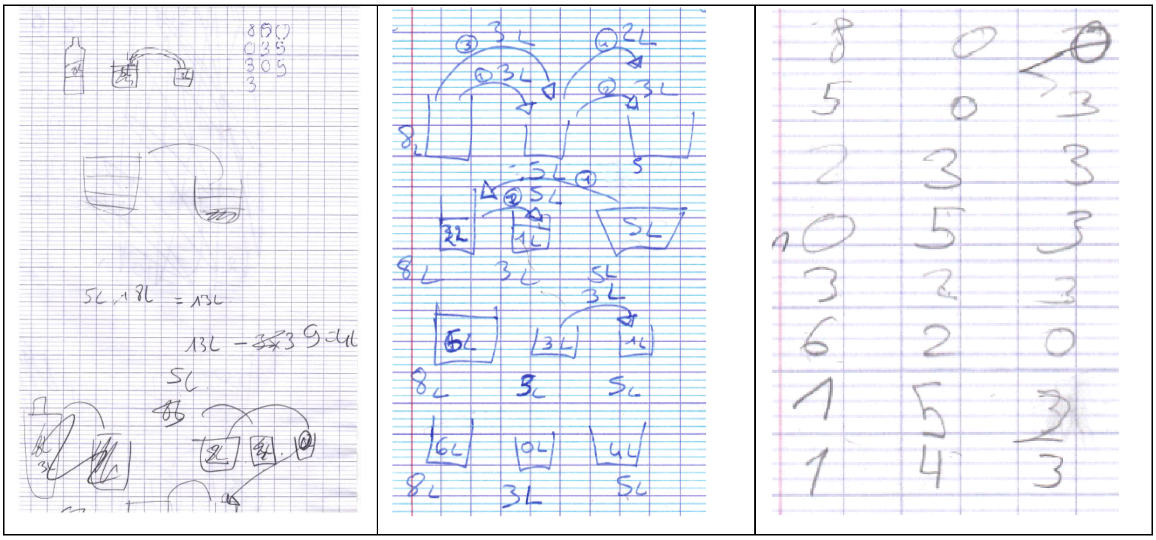


Figure 5 : productions d'élèves de plus en plus expertes

Au-delà de ce problème particulier, la gestion des problèmes ouverts suppose du professeur d'inventer une gestion adaptée à ses pratiques habituelles et à la classe à laquelle il s'adresse. Il peut par exemple mettre en place des aides différentiées sous formes d'étiquettes écrites distribuées ou non aux élèves, sur lesquelles ne sont pas forcément marquées les mêmes aides. Nous n'avons pas abordé directement non plus la question des bilans à faire après les problèmes ouverts. Dans le problème des récipients, le professeur peut aussi bien évaluer la bonne compréhension de l'énoncé, le fait d'avoir ou non obtenu le résultat final attendu, les démarches mises en œuvres par les élèves, les interactions au sein des groupes, la façon dont ils s'approprient les aides fournies ou encore la rédaction d'une solution finale.

Conclusions

Nous concluons par une photographie du tableau noir qui traduit la richesse des interactions pendant l'atelier. Le tableau a été initié au début de l'atelier avec les caractéristiques proposées par les participants, enrichies au cours de l'atelier et au fil de leurs remarques.

Les problèmes ouverts permettent de travailler « autrement » avec les élèves, en mettant en valeur leurs connaissances anciennes même minimes. Les élèves sont d'un coup plus intéressés, même s'ils sont habituellement en difficulté. Ils peuvent mettre aussi en œuvre leurs connaissances de sens commun alors qu'ils ne s'autorisent pas à les mobiliser dans les exercices classiques. Ils apprennent à travailler en groupe, à débattre, à être plus autonomes et modifient peu à peu leurs rapports aux mathématiques.

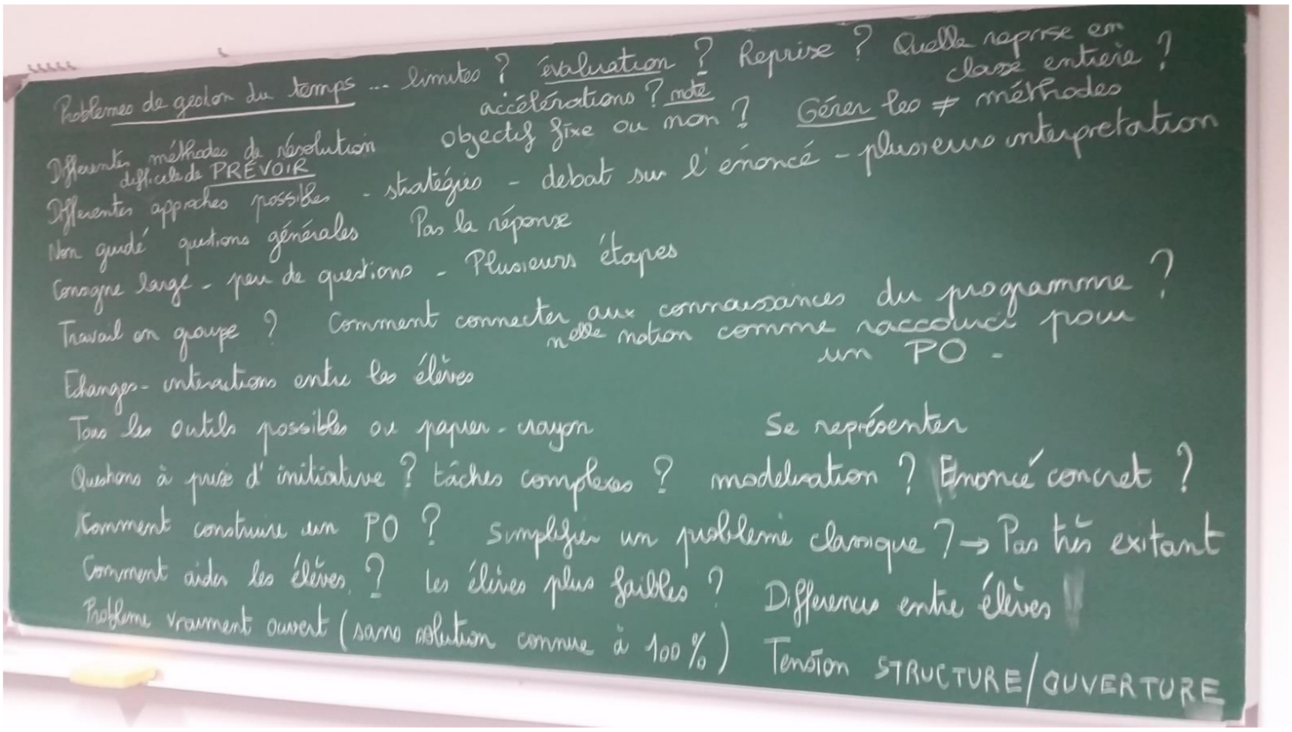


Figure 6 : photo du tableau à la fin de l'atelier

Les problèmes ouverts ne sont sans doute pas assez fréquents dans les pratiques de classes, en particulier parce qu'ils ne sont pas faciles à trouver, pas faciles à gérer avec les élèves et qu'ils ne s'articulent pas forcément facilement avec les problèmes et exercices classiques, nécessaires pour permettre d'assurer l'avancée dans les connaissances nouvelles des programmes. On a observé qu'une pratique régulière des problèmes ouverts agit sur la relation entre le professeur et les élèves, sur l'ambiance dans la classe et l'attitude des élèves. En ZEP, par exemple, il a semblé que des élèves qui ont des temps d'expression réservés à l'occasion des problèmes ouverts, respectent plus facilement la parole du professeur pendant les exercices et problèmes plus classiques. Les élèves semblent plus attentifs et plus impliqués. En les encourageant dans les démarches qu'ils mettent en œuvre sur les problèmes ouverts, leur peur du « jugement » s'estompe peu à peu et ceci rejaillit aussi dans les séances plus classiques.

Références

Quelques sites de ressources

SIRC, IREM de Grenoble, site
https://www.imj-prg.fr/fetes/FS2009/fs2008_fichiers/Chasse_Bete_Resultats.pdf

RESCO, IREM de Montpellier, site
http://www.irem.univ-montp2.fr/resolution-collaborative-de-problemes-resco/recherche/resolution-collaborative-de-problemes-resco

EXPRIME, IREM de Lyon, CD Rom et site
http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article263

Groupe POLIREM, IREM de Paris, brochure IREM numéro 96
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS15002.pdf

Bibliographie

Aldon, G., Meunier, M., Roblin, M., Royot, A.S., Terrenoire, A., Vilas-Boas, H., Vilas-Boas, J. (2012). *Narration de recherche en mathématiques : écrire pour comprendre, écrire pour apprendre*, IREM de Lyon, CD Rom

Arsac, G., Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

Betton, S., & Coppé, S. (2005). Favoriser l'activité mathématique dans la classe : ouvrir les problèmes, *Bulletin de l'APMEP, 461*, 733-748.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Colonna, A., Le Berre, M., Legoupil, B., Zucchetta J-F. (2011). *Le LGD mène l'enquête, Recherche de problèmes au collège avec un LGD*, IREM de Lyon, CD Rom.

Kosyvas, G. (2010). Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *15*, 45-73.

Kosyvas, G. (2013) Pratiques pédagogiques de problèmes ouverts dans un collège expérimental à Athènes. *Repères IREM*, 91, 25-50

Robert A., (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(*2), 139-190.

Robert A., & Rogalski, M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherché au lycée, *Repère IREM*, *54*,. 77-103

At 36 : Informatique débranchée : construire sa pensée informatique sans ordinateur

Sylvie Alayrangues[1], Samuel Peltier[2] et Laurent Signac[3]

[12] Université de Poitiers, XLIM ; sylvie.alayrangues@univ-poitiers.fr, amuel.peltier@univ-poitiers.fr

[3] ENSI Poitiers ; laurent.signac@univ-poitiers.fr

Résumé : L'informatique débranchée, appelée également et peut-être plus justement, informatique sans ordinateur ou sciences manuelles du numérique, est une approche qui consiste à appréhender certains éléments de la science informatique par l'utilisation d'objets « concrets » et complètement « déconnectés » (bâtonnets, allumettes, cartes, jetons, ficelles, perle...). Elle permet de s'affranchir de la machine et de la technicité de sa programmation pour mieux saisir les grands principes de la science elle-même. Grâce à elle, il est possible d'aborder de manière ludique des problèmes complexes (recherche d'informations, tri de données, cryptographie, stratégie gagnante...) et leur résolution via la conception d'algorithmes. Elle favorise la mise en œuvre d'une démarche scientifique avec les enfants et adolescents. Elle est propice au travail de groupe. Enfin, lors des activités, il s'agit non pas de donner une solution clé en main mais d'amener les participants à imaginer leur propre solution ou à la co-construire ensemble.

Mots clefs : informatique débranchée, science informatique, médiation scientifique, ateliers d'initiation

Introduction

L'informatique, science et technique (Conseil scientifique de la Société informatique de France (SIF), 2014), prend une place de plus en plus importante dans les programmes du primaire à la terminale mais, à défaut d'être reconnue comme discipline au sens scolaire, elle est intégrée à d'autres enseignements (mathématiques, technologie...), ou, lorsqu'elle fait l'objet d'enseignements spécifiques (Informatique et Création Numérique (ICN), Informatique et Sciences du Numérique (ISN)), elle reste enseignée par des professeurs d'autres disciplines. Aussi, une des difficultés auxquelles se heurte cette introduction massive de l'informatique dans le système scolaire est l'absence de formation à cette discipline de la plupart des enseignants dans leur cursus antérieur et la difficulté de former des cohortes entières d'enseignants de tous niveaux et toutes disciplines à la fois à la science informatique et à sa didactique.

Plusieurs approches existent pour faciliter cette acculturation nécessaire à la science informatique. Ainsi, par exemple, il est proposé aux enseignants de l'école primaire d'aborder l'informatique par le biais de la programmation créative qui permet notamment d'inventer des jeux, de raconter des histoires et ainsi de faire travailler aux enfants plusieurs compétences simultanément (Romero, 2016; Romero and Valllerand, 2016). La robotique ludique (Noirpoudre et al., 2017) est également un point d'entrée qui, outre la dimension créative, comporte également un aspect plus technologique et permet de programmer un objet qui réagit à son environnement. Un pas de plus vers le côté technique est franchi avec la démarche des « makers » qui associe conception électronique et développement informatique (Anderson, 2013). Ce courant se traduit notamment par la multiplication de lieux favorisant ces activités, tels les « Fab'lab » (Réseau français des Fab'lab, 2015))

L'informatique débranchée, également appelée informatique sans ordinateur (Di Cosmo, 2015) ou sciences manuelles du numérique (Quinson) est une autre porte d'entrée vers la pensée informatique qui peut être utilisée à tout âge et dans des contextes très divers. Elle présente l'avantage d'aborder l'informatique sans artefact technologique et se situe ainsi davantage au niveau de l'apprentissage des concepts, de ce que d'aucuns nomment la « pensée informatique » (Wing, 2009).

Dans un premier temps, nous présentons les 4 piliers qui fondent la science informatique et expliquons comment des activités sans ordinateur permettent de s'y familiariser. Nous partageons ensuite les éléments à prendre en compte pour construire un tel atelier et nous illustrons ceci sur l'exemple d'ateliers autour de l'algorithmique. Nous poursuivons par quelques retours d'expériences partagés par des collègues du secondaire. Enfin, nous concluons avec des perspectives.

Qu'est-ce que l'informatique ?

Piliers de l'informatique

Plutôt que de partir d'une définition de la science informatique comme celle proposée par la Société informatique de France (Conseil scientifique de la Société informatique de France (SIF), 2014), nous adoptons ici le point de vue de l'Académie des sciences, qui, dans un rapport publié en 2013 (Académie des sciences, 2013), met en avant ce qu'elle définit comme les quatre piliers de la science informatique : algorithmes, données / information, langages, machines.

En quelques mots, un **algorithme** est une méthode qui permet de résoudre un problème de manière systématique. Les **données** appelées à être manipulées par un ordinateur permettent de représenter des informations de nature très diverses : des images, des sons, du texte, des nombres. Pour ce faire, elles doivent d'abord être codées de manière appropriée pour pouvoir être traitées.

Avant l'ordinateur, **machine** « universelle » imaginée par Turing, les machines existantes ne permettaient de traiter qu'un type d'algorithme sur un jeu de données de nature unique. Parmi ces machines, on peut citer le métier à tisser Jacquart, et les bien plus anciens bouliers pour calculer. Au 20ème siècle, est donc apparue la notion de machine « universelle », machine qui peut exécuter, *n'importe quel algorithme* traitant *n'importe quel type d'information* tant qu'algorithmes et informations sont codés de manières adéquates. Ces ordinateurs sont maintenant partout et de toutes tailles : des grands calculateurs aux objets connectés (télévision, grille-pain, etc.) en passant par les ordinateurs de bureau, les ordinateurs portables, les tablettes et les Smartphones. Concrètement, ces machines ont deux composants principaux leur permettant de fonctionner : un processeur (autrement dit une unité de calcul) et une mémoire. Ces deux éléments centraux sont bien entendu couplés à des mécanismes d'entrée / sortie permettant de fournir les données d'entrée du problème et de récupérer les résultats après traitement.

Enfin, pour implanter les algorithmes, généralement exprimés en langage naturel, donc ambigu, il est nécessaire de disposer de **langages** de programmation précis et sans ambiguïté.

Activités débranchées

« L'informatique n'est pas plus la science des ordinateurs que l'astronomie n'est celle des télescopes. » disaient Michael R. Fellows et Ian Parberry (Fellows and Parberry, 1993). En effet, si, pour s'incarner, l'informatique a besoin de la machine, les principes qui sous-tendent cette science peuvent se penser sans elle.

Le courant actuel des activités débranchées prend sa source dans la publication d'un cahier de telles activités, publié par Tim Bell (Bell, 2015) en Nouvelle-Zélande, même si des travaux avaient déjà été menés en France à la fin des années 80 (Crozer and Grosperrin, 1987). En France, le mouvement s'est récemment développé à la fois dans le contexte de la médiation scientifique et dans celui de l'enseignement scolaire. Dans le premier cas, les activités sont souvent imaginées par des enseignants-chercheurs en informatique pour partager des grains de sciences, lors de la fête de la science, de visites de laboratoires, d'actions ponctuelles dans le cadre scolaire ou périscolaire (Duflot-Kremer; Quinson). Elles le sont aussi parfois par des associations qui développent des activités de médiation scientifique (par exemple, la fondation *la main à la pâte*). Davantage tournés vers l'enseignement, plusieurs groupes des IREM, notamment ceux de Clermont-Ferrand et Grenoble, créent et mettent à disposition des supports pédagogiques pour réaliser de telles activités en classe (Groupe IREM Grenoble, 2017; IREM Clermont-Ferrand). Un groupe de travail hébergé par la Société informatique de France, le groupe InfoSansOrdi (SIF), est un lieu d'échanges pour toutes celles et tous ceux qui s'investissent dans la conception de telles activités quelle que soit leur provenance.

Ainsi des notions liées à chacun des piliers évoqués précédemment peuvent être illustrées par le biais d'activités sans ordinateur, dont voici quelques exemples (la liste est très loin d'être exhaustive et si, pour chaque activité, une référence vers un fiche activité est fournie, il ne s'agit pas forcément de la version originale). Il est à noter qu'une même activité peut permettre d'aborder plusieurs piliers. Le découpage choisi ici vise juste à donner quelques exemples concrets de problématiques abordées par l'informatique sans ordinateur. Pour les activités citées, des liens sont donnés vers des pages web proposant des descriptions plus précises.

La construction de dessins, à la main, en suivant la philosophie de la tortue logo (Alayrangues et al.), autrement dit en utilisant un jeu d'instructions limité (tourne, avance, dessine) représentées par des cartes, se prête bien à une découverte de la notion d'algorithme (**Figure 18**). Une autre approche passe par l'analyse d'un jeu et la formalisation de stratégies gagnantes comme le jeu de Nim, ou les haricots de Dijkstra (Alayrangues et al.). Une approche plus physique, autrement dit qui nécessite que les participants se déplacent, peut être mise en œuvre pour illustrer certains algorithmes de tri (Algo-rythmics). Il est également possible d'aborder des notions plus avancées, en réfléchissant aux caractéristiques des algorithmes trouvés pour résoudre un problème. Comment savoir s'ils sont corrects ? Existe-t-il une solution unique ? S'il existe plusieurs solutions, l'une d'elles est-elle meilleure que les autres ? Ces interrogations sont notamment présentes dans les activités « Alice déménage » (Duflot-Kremer) et le « base-ball multicolore » (Quinson).

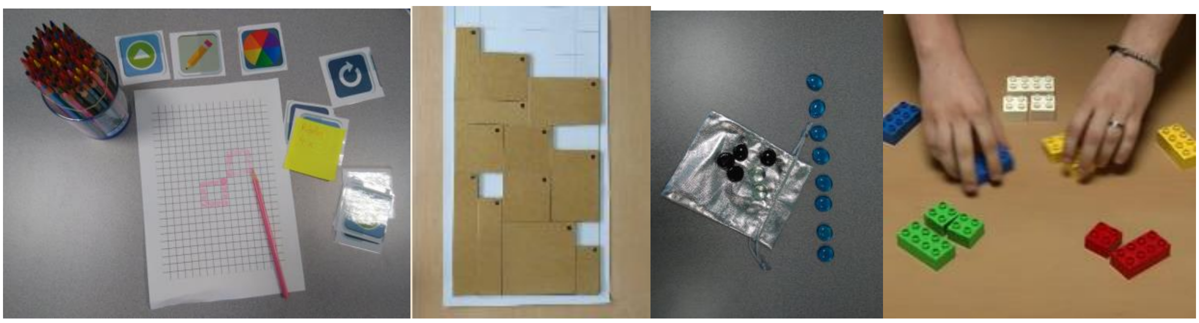


Figure 18 : matériel pour des activités liées aux algorithmes

(image 1 et 3 issues de (Alayrangues et al.), image 2 issue de (IREM Grenoble), image 4 issue de (Pixees))

Les activités autour des codes secrets et plus particulièrement de la cryptographie (Alayrangues et al.) permettent d'aborder la notion du codage (et en l'occurrence même de chiffrement) d'informations. Elles peuvent traiter de cryptographie symétrique, où la clé de chiffrement et la même que celle de déchiffrement (chiffre de César, scytale) ou de cryptographie asymétrique, où les clés de chiffrement et déchiffrement sont différentes (activité du coffre et des cadenas). Un autre terrain de jeu intéressant est le codage des images (IREM Clermont-Ferrand). On peut s'intéresser aux images binaires, autrement dit en noir et blanc, par exemple via un tableau de 0 et de 1. On peut également se poser la question de la compression de telles images, autrement dit de trouver un codage moins gourmand en mémoire. On peut aussi étendre l'activité à la représentation des images en couleur. Enfin, il est possible de réaliser des activités autour de la stéganographie (Alayrangues et al.), qui consiste à dissimuler une information dans une autre information. Une telle activité peut, par exemple, consister à cacher des chiffes ou des lettres dans une « image » réalisée avec des perles à repasser.

Figure 19 : matériel pour des activités liées à la représentation des données

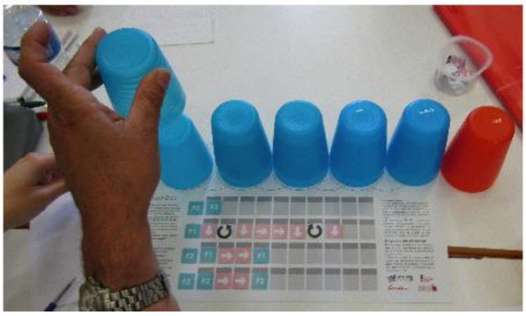
(image 1 à 3 issues de (Alayrangues et al.))

De façon peut-être plus inattendue, il est aussi possible de réaliser des activités débranchées autour du fonctionnement des machines. Une approche jeu de rôle (IREM Clermont-Ferrand) peut, par exemple, permettre aux participants de se familiariser avec les différents composants d'un ordinateur en se mettant à leur place et en coopérant pour exécuter un petit programme (par exemple, la saisie et l'affichage d'un caractère). Des activités permettent également de s'immerger dans les principes du parallélisme, c'est le cas de l'activité réseau de tri (Duflot-Kremer). D'autres donnent à expérimenter le fonctionnement d'un réseau d'ordinateurs (Duflot-Kremer) pour comprendre comment les messages y circulent de point à point, comment on peut pallier les défaillances d'une machine du réseau, comment la structure du réseau (on parle aussi de sa topologie) influe sur le temps d'acheminement des messages, etc.

Figure 20 : matériel pour des activités liées aux machines

(image 1 issue de (Duflot-Kremer), image 2 issue de (Pixees))

Les activités débranchées illustrant la notion de langage sont très souvent liées aux activités algorithmiques. Dans l'activité du robot-idiot (Duflot-Kremer), on peut notamment réfléchir à la manière d'exprimer les instructions qui permettront de diriger le robot pour atteindre le but fixé. L'activité Gobot (IREM Clermont-Ferrand) met à disposition un langage simplifié dont les instructions sont exprimées par des cartes représentant des flèches. Enfin, il est aussi possible de s'intéresser à la manière dont un langage peut être reconnu par un ordinateur, autrement dit, étant donné un mot, comment savoir s'il appartient ou non à un langage donné. Il s'agit d'aborder la notion d'automate, ce que propose notamment l'activité « jeu du labyrinthe » (IREM Clermont-Ferrand).



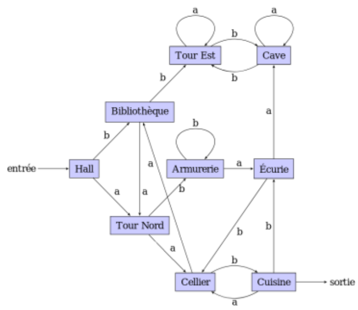


Figure 21 : matériel pour des activités liées aux langages

(image 1 issue de (IREM Grenoble), image 2 issue de (IREM Clermont))

Construire un atelier

Généralités

Selon qu'un atelier est imaginé dans le cadre d'activités de médiation scientifique ou dans le cadre scolaire, le processus de création sera différent : les créateurs ne sont pas les mêmes, les objectifs non plus.

Pour construire une activité dans le cadre de la médiation scientifique, on choisira probablement en premier un thème informatique puis on fixera autour de lui un certain nombre d'objectifs. Ici la difficulté, étant donné un thème, consiste à identifier les aspects que l'on peut travailler en fonction du contexte dans lequel se déroulera l'activité (atelier court ou long, ponctuel ou régulier, devant un public « homogène » (par rapport à l'âge par exemple) ou « hétérogène »...).

Dans le contexte scolaire, il sera sans doute plus naturel de commencer par fixer les objectifs en fonction des attendus du programme puis de trouver le thème informatique qui permettra de les illustrer au mieux. Cette approche nécessite une culture informatique solide pour trouver le thème le plus approprié en fonction des objectifs fixés.

Dans les deux cas, il est primordial de connaître le public auquel on s'adresse, ses capacités cognitives, et quand cela est possible les compétences censées avoir été acquises précédemment.

Pour rendre ceci plus concret, considérons comment il est possible de construire un atelier autour de l'algorithmique.

Exemple de construction d'un atelier autour de l'algorithmique

L'algorithmique est un vaste sujet et les objectifs visés peuvent être de natures très différentes. Par exemple, on peut, étant donné un problème, se contenter de trouver un algorithme qui permet de le résoudre. Mais on peut assez naturellement se poser également la question de prouver que l'algorithme trouvé fonctionne. Plus difficile, comment savoir si l'algorithme est efficace, voire optimal ? L'algorithme peut-il être adapté pour résoudre un problème similaire ?

Ainsi, un même atelier peut se décliner de manière différente selon le public auquel il s'adresse et du temps dont on dispose.

Nous avons conçu notre première activité, « Pixel art et algorithmique » (Alayrangues et al.), pour un atelier destiné à un public « à partir de 8 ans » dans le centre de culture scientifique et technique de Poitiers, l'espace Mendès France (Espace Mendès France : culture & médiation scientifiques).

Pour cette première expérience, nous avons choisi d'explorer un thème classique, l'algorithmique et de nous inspirer d'activités déjà réalisées par d'autres : nous avons ainsi repris le principe de la tortue Logo (Papert, 1992).

Nous nous sommes fixés plusieurs objectifs :

- Réflexion sur les informations que l'algorithme va manipuler et sur leur mémorisation via des variables
- Découverte de la notion d'algorithme (en l'illustrant par la réalisation de dessins) :
    - avec un jeu d'instructions très limité
    - avec des structures de contrôle pour répéter des instructions
- Exécution d'un algorithme « à la main »
- Construction d'un algorithme pour obtenir le résultat souhaité
- Découverte de la notion de « bug » (ici, erreur au niveau de l'algorithme)

Pour l'aspect concret, nous avons classiquement représenté les instructions par des cartes. Dans un premier temps, seules les instructions « tourner » et « avancer » sont disponibles. Elles sont représentées par des flèches. On ajoute plus tard dans l'atelier la possibilité de lever et baisser le crayon pour réaliser des dessins non connexes. Il est aussi prévu de disposer d'une instruction permettant de changer la couleur du crayon.

Pour les boucles, on dispose d'élastiques pour rassembler les séquences d'instructions que l'on souhaite répéter et des papiers autocollants pour écrire le nombre d'itérations à effectuer.

On dispose aussi de cartes « variable » pour mémoriser à tout instant l'orientation courante (autrement dit, la direction dans laquelle avance le crayon) et éventuellement la couleur et le fait que le crayon soit baissé ou levé.

Au-delà de la découverte des notions, il existe une difficulté supplémentaire. Lorsqu'un humain exécute un algorithme à la place de l'ordinateur, il faut faire attention à ce qu'il ne corrige pas involontairement des bugs présents dans l'algorithme (ou qu'il n'en introduise pas d'autres). Une manière de limiter le problème consiste à faire exécuter l'algorithme par un participant autre que celui qui l'a inventé.

Retours d'expérience

Nous avons lancé un petit sondage informel auprès de plusieurs personnes ayant réalisé des ateliers dans le cadre scolaire (de la maternelle au lycée). Nous n'avons pas la place ici de présenter l'ensemble des réponses obtenues. Nous commençons par une courte synthèse générale, puis présentons les trois activités qui ont été le plus cité dans les retours. Nous présentons pour chacune un lien vers sa description détaillée, le(s) public(s) avec lequel elle a été jouée, la ou les catégories à laquelle elle appartient, un bref résumé, sa durée et quelques remarques des personnes qui les ont préparées et animées.

Il est à noter que les activités ont été selon les cas réalisées par des enseignants, des enseignants-chercheurs en informatique ou des étudiants en informatique. La plupart des enseignants se sont fondés sur des activités mises à disposition sur Internet.

Les retours obtenus correspondent essentiellement au ressenti des personnes qui ont animé l'activité et à l'appréciation des participants. Dans certains cas, les activités ont été immédiatement suivies d'un temps de bilan avec les élèves.

Dans tous les cas, les participants se prêtent globalement bien au jeu et apprécient l'« originalité » des activités et leur côté ludique. Ils se montrent actifs et s'ils sont accompagnés dans la démarche, ils construisent eux-mêmes les solutions aux problèmes qui leur sont posés. Ils apprécient également de pouvoir travailler par petits groupes. Pour certaines activités, la possibilité de « rebrancher » a été particulièrement appréciée. Il a aussi été remarqué que ce ne sont pas forcément les élèves d'ordinaire les plus à l'aise dans la classe qui réussissent le mieux les activités.

Dans plusieurs cas, les activités ont été animées par deux enseignants, parfois de disciplines différentes. Pour certains, il s'agissait aussi de premières expériences d'enseignement de l'informatique et, dans l'ensemble, l'expérience leur a donné envie de recommencer. Souvent, les ateliers ont été réalisés en petits groupes, ce qui peut demander, pour fonctionner au mieux, un bon taux d'encadrement. Les activités en groupes ont régulièrement été suivies d'un temps en classe entière pour dresser un bilan voire reconstruire ensemble une solution au problème posé.

Les collaborations avec des étudiants en informatique ou des enseignants-chercheurs ont été également très appréciées à la fois par les participants et par les enseignants.

En ce qui nous concerne, nous avons mené la plupart de nos activités dans un cadre périscolaire, au centre de médiation de Culture Scientifique Technique et Industrielle de Poitiers, l'espace Mendès France. La plupart des remarques précédentes peuvent s'appliquer à ce que nous y avons vécu. La différence essentielle en ce qui nous concerne est la diversité du public. Les ateliers sont ouverts à partir de 8 ans sans limite d'âge supérieure. Nous avons ainsi été amenés à réaliser des ateliers avec des groupes d'enfants, des groupes d'adultes, des groupes mixtes (enfants, ados, adultes). Si cette diversité est une richesse et source d'échanges parfois inattendus, la principale difficulté est que nous découvrons la constitution du groupe le jour de l'atelier.

Gobelets (Cargobot ou Gobot)

Descriptions de l'activité (deux versions) :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?article146#cargobot

http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Informatique-sans-Ordinateur#ancre-5

Public : Cycle 3 en demi classe, ou Cycle 4 en classe complète.

Catégorie : Algorithmes, Langages

Résumé : Écrire des suites d'instructions, autrement dit des petits programmes, pour commander un robot (une grue) qui déplace des containers (représentés par des gobelets). Cette activité est notamment l'occasion d'introduire les notions de programmation, d'exécution d'un programme et de débogage.

Durée : de 50 minutes à 2h.

Remarques :

- L'activité est particulièrement adaptée pour une première découverte de l'algorithmique et illustre bien que l'ordinateur ne fait rien d'autre qu'exécuter les instructions qui lui sont fournies ;
- Elle constitue un point d'entrée intéressant à la fois pour les enfants et pour les enseignants qui n'auraient pas de connaissance préalable en informatique et quelques inquiétudes à l'enseigner ;
- Après une phase de « jeu » avec les gobelets, les élèves comprennent la nécessité de mettre en place une démarche rigoureuse ;
- Certaines versions de l'activité peuvent être envisagées dès la maternelle ;
- L'activité peut aussi servir de support pour travailler le langage ;
- Il est aisé de « rebrancher » l'activité avec Lightbot (soit avec Lightbot Flash, soit avec une application pour smartphones et tablettes : http://lightbot.com/) ;
- En Cycle 3, un groupe complet (20 ou plus) rend l'activité difficile à gérer.

Images

Description de l'activité :

http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Informatique-sans-Ordinateur#ancre-6

Public : Cycle 3 en petit groupe, Cycle 4 en classe complète.

Catégorie : Information/ Données

Résumé : Coder une image à la manière d'un ordinateur (avec ou sans compression)

Durée : de 1h15 à 2h.

Remarques :

- Les principes ont été compris assez rapidement et la synthèse est venue des élèves ;
- Les élèves ont vite eu envie de coder et décoder leurs propres images ;
- L'activité peut donner lieu à des activités sur ordinateur en manipulant des images, par exemple au format PPM qui stocke les valeurs de tous les pixels de l'image

Crêpier

Description de l'activité :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?article146#crepier

Public : cycle 4 ou cycle 3 (en demi groupe)

Catégorie : Algorithmique (Tri)

Résumé : Trouver un algorithme pour trier une pile de crêpes en fonction de contraintes (tailles....)

Durée : de 1h30 à 2h.

Remarques :

- Niveau assez avancé. Il vaut mieux prévoir un taux d'encadrement suffisant (ex : 2 enseignants pour 15 élèves en 5e) pour compenser la différence de vitesse d'avancement entre les groupes ;
- La notion de boucle arrive très tôt, et les alternatives (si-alors-sinon) viennent ensuite ;
- Rentre bien dans le cadre de la réforme.

Conclusion et perspectives

L'informatique sans ordinateur est un point d'entrée de la science informatique particulièrement riche, en premier lieu, parce qu'elle permet d'en aborder les quatre piliers : algorithmes, données, machines et langages. Elle présente également l'avantage de ne pas nécessiter de matériel coûteux pour être mise en œuvre.

Monter une telle activité demande à la fois des connaissances en informatique, et des compétences en pédagogie. Aussi, la création d'une activité peut-elle être le fruit de dialogues fructueux entre informaticiens et enseignants. Les informaticiens maîtrisent les concepts à transmettre tandis que les enseignants connaissent à la fois le « public » de l'activité et le cadre imposé par les programmes.

En outre, il existe une vaste littérature sur laquelle s'appuyer, et plusieurs communautés se développent pour partager, échanger, « remixer » et inventer de nouvelles activités (Groupe InfoSansOrdi hébergé par la SIF (SIF, groupe InfoSansOrdi) ou communauté Class'code (Class'code, 2017) qui utilise entre autres, mais pas seulement, de telles activités). Ainsi, outre les aspects scientifiques, on retrouve des aspects de travail collaboratif qui font aussi partie de la culture informatique.

Ces activités (et de manière générale l'initiation à l'informatique) présentent d'autres avantages : elles contribuent notamment à développer des compétences qui ne sont pas propres à l'informatique mais s'avèrent utiles dans bien d'autres apprentissages : rigueur, langage, logique, créativité, résolution de problème, travail collaboratif, etc.

Deux questions relatives à l'utilisation de cette approche débranchée pour se familiariser avec l'informatique sont cependant encore insuffisamment explorées.

On peut tout d'abord se demander comment évaluer l'impact de cette approche. Ces activités ont, initialement, été développées dans un contexte de médiation scientifique où l'objectif n'est pas d'acquérir des connaissances et compétences mais de susciter la curiosité et l'envie d'en découvrir davantage. Aussi les évaluations classiquement réalisées dans ce contexte s'intéressent-elles plutôt au ressenti des participants qu'à l'estimation de ce qu'ils ont appris et à la manière de réinvestir ces connaissances et compétences. Des analyses didactiques autour de l'enseignement de l'informatique, notamment par le biais de l'informatique débranchée, commencent à se développer pour tenter d'aller plus loin et de déterminer l'impact de cette approche en terme d'apprentissage (Drot-Delange, 2013).

En outre, l'informatique débranchée, si elle donne un certain nombre de clés de la science informatique, ne peut être suffisante lorsqu'il s'agit d'approfondir les connaissances et d'acquérir des compétences techniques. Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire de rebrancher les activités, que ce soit avec un langage de blocs (comme Scratch) ou un langage de programmation textuel (comme Python). Un bon dosage est à trouver en fonction des attendus des programmes des différents niveaux, en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit pas de former des informaticiens mais des citoyens capables d'appréhender les enjeux informatiques de la société dans laquelle ils sont appelés à vivre.

Remerciements

Marie Duflot-Kremer, Séverine Fleury, Noëlle Lacourt, Émilie Marcon, Fabien Marsollat, Marianne Mognos, Malika More, Martin Quinson.

Références

Académie des sciences, 2013. L'enseignement de l'informatique en France - Il est urgent de ne plus attendre, http://www.academie-sciences.fr/fr/Rapports-ouvrages-avis-et-recommandations-de-l-Academie/l-enseignement-de-l-informatique-en-france-il-est-urgent-de-ne-plus-attendre.html

Alayrangues, S., Peltier, S., Signac, L., poitiers-infosansordi [WWW Document]. GitLab. URL https://framagit.org/poitiers-infosansordi.

Algo-rythmics, Technologically and artistically enhanced multi-sensory computer science education (Inter-cultural method for teaching-learning sorting algorithms) [WWW Document]. URL http://algo-rythmics.ms.sapientia.ro/dance/insertion.

Anderson, C., (2013). The Maker Movement: Tangible Goods Emerge From Ones and Zeros. WIRED, https://www.wired.com/2013/04/makermovement/.

Bell, T., (2015). Computer Science Unplugged [WWW Document]. URL http://csunplugged.org/

Class'code, (2017). Class´Code v2 [WWW Document]. URL https://pixees.fr/classcode-v2/

Conseil scientifique de la Société informatique de France (SIF), 2014. L'informatique, la science au coeur du numérique. 1024 Bull. Société Inform. Fr. 2, 13--20. http://www.societe-informatique-de-france.fr/wp-content/uploads/2014/02/1024-2-science-au-coeur-du-numerique.pdf

Crozer, G., Grosperrin, R., (1987). Informatique sans ordinateur. URL https://files.inria.fr/mecsci/grosperrin-et-al/informatique-sans-ordinateur.pdf

Di Cosmo, R., (2015). Enseigner et apprendre les sciences informatiques à l'école [WWW Document]. Interstices. URL https://interstices.info/informatique-ecole.

Drot-Delange, B., (2013). Enseigner l'informatique débranchée : analyse didactique d'activités. Presented at the AREF, pp. 1–13. https://archivesic.ccsd.cnrs.fr/sic_00955208/document

Duflot-Kremer, M. La page médiation de Marie [WWW Document]. URL https://members.loria.fr/MDuflot/files/med/index.html.

Espace Mendès France : culture & médiation scientifiques [WWW Document] URL https://emf.fr/.

Fellows, M.R., Parberry, I., (1993). SIGACT trying to get children excited about CS. Comput. Res. NEWS 5, 7. http://archive.cra.org/CRN/issues/9301.pdf

Groupe IREM Grenoble, (2017). Action informatique débranchée [WWW Document]. URL http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?article146#cargobot.

IREM Clermont-Ferrand. Informatique sans Ordinateur [WWW Document]. URL http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Informatique-sans-Ordinateur.

Noirpoudre, S., Roy, D., Desprez, T., Segonds, T., Caselli, D., Oudeyer, P.-Y., (2017). Poppy Education : un dispositif robotique open source pour l'enseignement de l'informatique et de la robotique. Presented at the EIAH 2017 - Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, p. 8. https://hal.inria.fr/hal-01517941/document

Papert, S., (1992). Jaillissement de l'esprit. *Flammarion*.

Pixees [WWW Document]. URL http://pixees.fr

Quinson, M., Sciences manuelles du numérique [WWW Document]. URL http://people.irisa.fr/Martin.Quinson/Mediation/SMN/

Réseau français des Fab'lab, (2015). RFFLabs – Le site du réseau Français des Fablabs [WWW Document]. URL http://www.fablab.fr/

Romero, M., (2016). De l'apprentissage procédural de la programmation à l'intégration interdisciplinaire de la programmation créative. Form. Prof. Rev. Sci. Int. En Éducation 24, 87–89. http://formation-profession.org/pages/article/24/13/a92

Romero, M., Valllerand, V., (2016). Co-creative activities for 21st Century Kids. https://www.slideshare.net/margarida.romero/romero-vallerand-2016-cocreative-activities-for-the-21st-century-kidsr02

SIF, groupe InfoSansOrdi [WWW Document]. URL http://www.societe-informatique-de-france.fr/mediation/infosansordi/

Wing, J., (2009). La pensée informatique. *Interstices*.

At. 42 : Le défi calcul : entre calcul mental et calculatrice

Christine Chambris[1], Mariam Haspekian[2], Isabelle Melon[3], Nathalie Pasquet-Fortune[3]

[1] IREM de Paris et Université de Cergy-Pontoise ; christine.chambris@u-cergy.fr

[2] IREM de Paris et Université Paris-Descartes ; , mariam.haspekian@parisdescartes.fr

[3] IREM de Paris et Académie de Paris ; isabelle.melon@ac-paris.fr, npasquet-fortune@ac-paris.fr

Résumé : Dans le cadre d'une liaison école collège, un défi calcul a été proposé. L'objectif initial était d'avoir un projet fédérateur permettant de faire se rencontrer des classes de CM et sixième. Nous avons poursuivi la réflexion autour de ce défi calcul et le dispositif a évolué vers un outil plus intégré au quotidien de la classe, permettant de réinvestir, consolider et approfondir des procédures déjà connues de calculs ou des connaissances en numération utiles pour les calculs, ainsi que d'inciter à une utilisation raisonnée de la calculatrice.

Mots clefs : calcul mental ; calculatrice ; progressivité des apprentissages

Remarque préliminaire

L'atelier au colloque, d'une durée d'1h30 a été envisagé comme un moment de formation au défi calcul. Le texte en reprend les différentes étapes, complétées ici de quelques commentaires et alternatives, ainsi que d'éléments de réflexion pour une formation au défi calcul. Il propose aussi aux participants un prolongement du travail (ou à une formation au dispositif). Ce texte vise ainsi à mettre en évidence une structure possible pour une formation au dispositif présenté. Nous alternons des temps de pratique et des temps plus théoriques. Le diaporama utilisé pour l'atelier a été mis en ligne sur le site Internet du colloque, ainsi que diverses ressources liées au dispositif (documents professeur et documents élèves).

Introduction : origine du projet et enjeux

Nous faisons partie du groupe IREM Primaire-Collège de l'IREM de Paris. Ce groupe a été constitué il y a 3 ans, en relation avec le projet CaPriCo[1]–Calculatrices Primaire-Collège- (IFé) : Texas Instrument équipait 50 classes avec la nouvelle TI Primaire Plus (TIPP) et Hatier publiait les fichiers Mosaïque CM1/CM2 et 6ème/5ème (fig. 1). Ce groupe répondait aussi à la volonté de créer un groupe école-collège à l'IREM de Paris, en lien avec la création du nouveau cycle 3 (en 2014). Dès le départ, nous avons eu une réflexion incluant tout type de calculatrice et pris en compte la question générale suivante : quelles tâches sont pertinentes avec la calculatrice et permettent un enrichissement du travail et des apprentissages dans le domaine numérique ?

Figure 1 : La « calculatrice bleue » - TIPP et son fichier d'activités dédiées, « Mosaïque »

Après la mise en œuvre de plusieurs activités des fichiers Mosaïque (par exemple, apprentissage des touches spécifiques de la TIPP, activités de type *calculatrice cassée* (Caron, 2007) ou « affichages sous contraintes » (MEN, 2004, p.12)) dans les classes des membres du groupe, la nécessité de

[1] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-14-15/caprico

réfléchir à « l'utilisation de la calculatrice à bon escient » s'est affirmée. Comment faire en sorte que les élèves apprennent à l'utiliser pour des calculs relativement complexes et à s'en passer pour des calculs qu'ils peuvent réaliser mentalement ? L' « utilisation de la calculatrice à bon escient » est donc à la fois une compétence des programmes (2008) et une nécessité sociétale.

Nous nous demandions donc comment outiller les élèves pour qu'ils progressent en calcul mental et comment faire pour qu'ils utilisent la calculatrice à bon escient. Le défi calcul proposé sur le site Léa (Nathan)[2] par l'un des membres de notre groupe a été une piste, donnant naissance à cet atelier.

Pratique : découverte de l'activité « Défi calcul » (15 min)

Une découverte concrète de cette activité a été mise en place auprès du public présent, muni de calculatrices (prêtées ou personnelles). Une feuille « mini-défi » comportant sept calculs a été distribuée aux participants. (fig. 2)

Calculs		<u>Méthode choisie</u> M pour mental C pour calculatrice	Résultats
1	0,4 + 0,20 + 0,60 + 0,8		
2	62 474 x 9 587		
3	564 758 – 4 700		
4	123,4 – (2,3 x 10)		
5	36,1 + 36,2 +36,3 + (7 x 36,2)		
6	(102 – 27) x 4		
7	390 – 356,875		
Nombre de résultats justes en calcul mental =>			

Figure 2 : document distribué aux participants

Phase 1 : Déterminer individuellement pour chaque énoncé s'il relève d'un calcul mental ou instrumenté en indiquant respectivement M ou C dans la deuxième colonne. . Une fois ce travail fait (le temps était limité à une minute), la feuille devait être retournée pour attendre que tout le monde soit prêt pour la deuxième phase.

Phase 2 : Nous avons laissé quelques minutes aux participants pour faire les calculs qu'ils avaient sélectionnés comme devant être réalisés à la calculatrice. Nous avons ensuite rangé les calculatrices. Les feuilles devaient être à nouveau retournées en attendant que tout le monde soit prêt pour la phase 3.

Phase 3 : Nous avons laissé quelques minutes aux participants pour réaliser les calculs mentaux.

Phase 4 : Nous avons réalisé une rapide correction en présentant successivement les différents calculs sur une diapositive et en faisant apparaître les propriétés mises en œuvre dans chacun des calculs (comme indiqué ci-après) :

- <u>Le calcul 1</u> : 0,4 + 0,2 + 0,6 + 0,8. Par des compléments à 10, réinvestis au rang des dixièmes avec les nombres décimaux, on obtient : 0,4 + 0,6 = 1 ; 0,2 + 0,8 = 1 ; 1 + 1 = 2

[2] Nous avons découvert beaucoup plus tard que ce défi reprenait une proposition du document d'accompagnement des programmes de 2002, Utiliser les calculatrices en classe (MEN, 2004, p. 6).

- Le calcul 2 : 62 474 x 9 587. Le calcul instrumenté était le plus approprié.
- Le calcul 3 : 564 758 – 4 700. Par la numération de position, en enlevant 4 milliers et 7 centaines à 4 milliers et 7 centaines, on obtient 0 aux rangs des milliers et centaines 560 058.
- Le calcul 4 : 123,4 – (2,3 x 10). Ce calcul mobilise l'interprétation d'une expression comportant des parenthèses, la numération de position et la multiplication d'un décimal par 10. On obtient : 123,4 - 23 = 100,4
- Le calcul 5 : 36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 x 36,2). Ce calcul mobilise l'interprétation d'une expression comportant des parenthèses, la reconnaissance et la transformation de termes « presque égaux » dans une addition, la transformation d'une addition itérée en multiplication et la multiplication des décimaux par 10 (cf. section suivante). Plusieurs participants n'avaient pas reconnu la multiplication par dix et avaient donc choisi la calculatrice pour cet item.
- Le calcul 6 : (102 – 27) x 4. Par la conservation des écarts (l'écart entre 102 et 27 est le même que celui de 100 à 25) et l'usage des multiples de 25, on obtient : (100 - 5) x 4 = 75 x 4 = 300
- Le calcul 7 : 390 - 356,875. Par sauts successifs mobilisant d'abord le complément à 1 de 0,875, puis un complément à une puissance de 10 combiné à la numération de position, on obtient : 356,875 + 0, 125 + 3 + 30 = 390. L'écart entre les deux nombres est : 33,125

Réflexion sur la progressivité des calculs, les enjeux d'apprentissage (10 min)

La section précédente permet de mettre en évidence les caractéristiques des calculs qui y ont été présentés. Un des problèmes qui s'est posé rapidement à nous avec ce dispositif a été de trouver un moyen pour faire progresser les élèves à la fois en calcul mental et pour repérer des calculs difficiles à effectuer à la main et. La question est alors : sur quoi la progressivité de l'apprentissage peut-elle se fonder, au cycle 3, pour ce dispositif défi calcul ?

Deux dimensions nous semblent susceptibles de la fonder. La première (pour laquelle aucun calcul n'est proposé dans les exemples ci-après) est constituée par des calculs dont les traitements sont des procédures que le cycle3 vise à automatiser. Il s'agit par exemple des multiplications et divisions des nombres entiers ou décimaux par les puissances de dix (10 ; 100 ; 0,1 ; 0,01, etc.). L'élaboration de ces techniques de calculs s'appuie sur les propriétés de la numération positionnelle : multiplier par 100 (resp. 0,01) c'est rendre des chaque ordre d'unité cent fois plus grand (resp. plus petit), et notamment transformer les unités simples en centaines (resp. en centièmes). De tels calculs peuvent être programmés dans le défi avant, pendant, après la phase de construction de ces connaissances. Le but est alors principalement d'aider les élèves à reconnaître et utiliser ce qu'ils sont en train d'apprendre.

La deuxième dimension, essentielle dans ce dispositif et dont relèvent tous les exemples proposés ci-après, est que calculer mentalement par exemple 36,1 + 36,2 +36,3 + (7 x 36,2) suppose de mobiliser plusieurs propriétés. L'enjeu du cycle 3 est en effet le rebrassage de propriétés élémentaires dans des calculs qui deviennent, de fait, complexes.

Pour identifier une technique de calcul mental pour l'expression 36,1 + 36,2 +36,3 + (7 x 36,2), il faut analyser sa structure de façon approfondie et y voir des calculs intermédiaires, simples à effectuer, qui finalement permettront le calcul de l'expression complète. Il faut voir que le nombre 36,2 est presque répété 10 fois (7 fois dans 36,2 et presque 3 fois dans 36,1+36,2+36,3). C'est la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition (ou l'addition itérée) qui permet de transformer 36,2+36,2+36,2+(7x36,2) en 10 x 36,2. Ceci n'est fondamentalement intéressant que si on sait calculer 36,2 x 10. Pour finir, il faut reconnaître que 36,1+36,2+36,3 peut se transformer en

36,2+36,2+36,2 grâce à une compensation (liée à la commutation –commutativité de l'addition- des termes et à la propriété d'associativité de l'addition), par exemple :

36,1+36,2+36,3=36,1+36,3+36,2=36,1+(0,1+36,2)+36,2=(36,1+0,1)+36,2+36,2=36,2+36,2+36,2

Cette activité « Défi calcul » (la deuxième dimension) apprend ainsi à anticiper les transformations dans le but d'effectuer des calculs « simples ». C'est très important sur le plan du calcul mental, et de son apprentissage. De plus, cette compétence sera utile en mathématiques par la suite notamment en algèbre où observer les structures des expressions avant de se lancer dans les calculs algébriques sera très important.

Pour soutenir ces apprentissages et le travail de l'enseignant, il est apparu nécessaire de créer une banque de calculs organisée en fonction des propriétés sous-jacentes. Elles doivent faciliter la mise en place des séances dans une progressivité des calculs. Dans cette banque de calculs, le professeur trouve ainsi des calculs où les propriétés apparaissent isolées (31+32+33) ou plus ou moins imbriquées (31 + 32 + 33 + (32 x 7)).

Pratique : analyse d'exemples de calculs (10 min)

Dans un troisième temps, nous avons proposé aux participants une série de calculs, notamment :
300 900 – 256 875   23+24+25   3x15   45 212 – (52x100)   40+20+60+80+1000   24x50
78+37+59+22+63   600 700 – 188 677   7+4+3+8+300+6+2   150+(2x75)   500:25   6x15.

Nous leur avons demandé de les associer aux critères et propriétés que nous avions identifiés précédemment. Pour faire la synthèse de cette tâche, nous avons présenté les différents calculs dans la « banque » de calculs que nous avons conçue. (fig. 3)

Compléments à 10, à 100	Position (soustraction)	Structures, propriétés algébriques	Multiplication / division		Fractions
7+4+3+8+300+6+2	562 358 – 2 300	Parenthèses	Multiplication, division par 25, 15, 50 (basique)	Division par 4, 25	1/2+1/2
70+30		3+(2x4)	3x15	500 : 25	1-1/4
40+20+60+80	562 548 – 51 226	(3+2)x4	2x75	56 : 4	3x1/4
40+20+60+80+1000		10+(2x10)			3x1/3
	15 563 – 8 263		Multiplication – associativité, distributivité	Multiplication et structures	
45+25+55+75		Additions itérées	16x25	10x(2+37)	
78+37+22+63			24x50	150+(2x75)	
78+37+22+63+17			104x25		
78+37+59+22+63	Propriétés algébriques et position	Additions itérées et propriétés algébriques	6x15		
	45 212 – (52x100)	29+30+31	75x3		
240+120+360+480	1 234 – (23x10)	93+100+107	15x75		
24+12+36+48	1 275 – (25x3)	98+100+102	20x75		
	1753 – (25x30)	23+24+25+(7x24)	60x75		
600 – 256	6 666 – (15x40)	23+24+25			
700 – 307	*(378x7)+(378x3)	825+826-827			
800 – 243	45 212 – (52x10) distributivité				
Compléments à 100, combinés à la position					
300 900 – 256 875					
600 700 – 188 677					

Figure 3 : La banque de calcul et les calculs proposés.

Replacer le défi dans le contexte d'enseignement actuel du calcul (10 min)

L' « intelligence du calcul » : un cadre théorique pour l'enseignement du calcul

> *Faire aimer les mathématiques, c'est aussi faire aimer ce calcul sans lequel elles n'existeraient pas, sans lequel elles seraient impuissantes. Pour cela un équilibre doit être trouvé dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul entre automatisation et raison, ses deux facettes indissociables. (Artigue, 2005)*

A l'école primaire, trois formes de calcul sont enseignées : le calcul mental (exact, automatisé, approché), le calcul posé et le calcul instrumenté. Les programmes du cycle 3 du B.O. n°11 du 26 novembre 2015 précisent que ces formes « sont à construire en interaction. (…) Le calcul, dans toutes ses modalités, contribue à la connaissance des nombres ». Il ne s'agit donc pas d'opposer les formes de calculs mais de les envisager dans leurs spécificités et leurs complémentarités.

Bien que le terme intelligence de calcul n'apparaisse pas littéralement dans ces nouveaux programmes, il semble bien qu'il en soit question à propos de l'enseignement du calcul mental qui vise

> *prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations en jeu dans les calculs.(p. 200)*

La notion d'intelligence du calcul apparaît dans le rapport Kahane (2002)[3].

> *[L]a reconnaissance de formes, la recherche d'analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées (...) jouent un rôle clé dans ce pilotage raisonné que l'on désignera globalement comme « intelligence du calcul ».*
>
> *Développer cette intelligence du calcul qui seule permet de faire face aux situations non routinières, se doit d'être une ambition majeure de l'enseignement du calcul, quels que soient les objets sur lesquels il porte. (p. 6)*

Ce rapport insiste sur la place du calcul dans les apprentissages mathématiques afin de dépasser les représentations sociales qui tendent à restreindre le calcul à la production de résultats utiles dans un contexte de vie quotidienne.

Pour l'enseignant, développer cette intelligence s'impose comme l'objectif central de la mise en œuvre des apprentissages numériques. Il lui est donc indispensable de cerner les compétences mathématiques en jeu dans les types de calcul afin de guider au mieux ses élèves dans leur « pilotage raisonné » des calculs. En particulier, les activités de calcul mettent assurément en jeu des habiletés intellectuelles diverses qu'il convient de faire émerger et de développer lors des apprentissages.

En quoi le défi calcul contribue-t-il au développement de l'intelligence du calcul ?

Selon la définition ci-dessus, le défi calcul sollicite plusieurs composantes indispensables au pilotage raisonné du calcul :

---

[3] Dans le cadre de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques présidée par J.-P. Kahane, Michèle Artigue a dirigé le rapport sur le calcul.

- la reconnaissance de formes de calcul, ici, mental ou instrumenté qui incite l'élève à bien observer le calcul pour faire un choix
- la recherche d'analogies qui s'appuie sur la reconnaissance de structures de base mémorisées
- le jeu sur les variations possibles des procédures de calcul (ex : calcul de soustraction, par comptage en avant, conservation des écarts....)
- le sens des expressions manipulées : interprétation pertinente des signes en terme de structure des expressions et des nombres
- le sens des ordres de grandeur n'est pas abordé, ni travaillé spécifiquement dans le dispositif, ce qui n'exclut en aucun cas que les élèves y aient recours.

Il s'agit de développer une approche réflexive du calcul, « un pilotage raisonné », qui implique :
- de faire des choix,
- de développer des stratégies et des méthodes,
- de les mettre en œuvre
- d'organiser et gérer son calcul.

Cette approche réflexive nécessite, selon Butlen et al. (2012), des « adaptations » (p.36) (voir aussi Robert et al., 2002), c'est à dire des prises de décisions. Ces dernières reposent, mobilisent, développent des connaissances sur les nombres et les propriétés des opérations.

Deux membres du groupe IREM ont ensuite témoigné de leurs mises en œuvre du défi calcul en classe.

Mise en œuvre du dispositif dans une classe de CM1 (10 min)

L'enseignante a choisi d'organiser ce défi en deux temps bien distincts :

1 - des séances préparatoires planifiées sur plusieurs semaines

2 - le jour « officiel » du défi, au sein d'une classe ou dans le cadre d'une rencontre inter-classes.

Deux sessions de défi sont programmées dans l'année scolaire, permettant ainsi l'intégration progressive des connaissances nouvelles dans les calculs en jeu, par exemple, les nombres entiers en première partie de l'année de CM1, les nombres décimaux en deuxième partie.

Le dispositif global

<u>1) Présentation du défi calcul aux élèves</u>

Le défi calcul sollicite plusieurs composantes indispensables au pilotage raisonné du calcul :
- une rencontre interclasse à une date fixée (les équipes de 2 ou 3 seront mixtes, c'est l'occasion de créer des liens entre les élèves des 2 classes)
- 30 calculs à faire en un temps limité donnés à chaque équipe
- soit mentalement, soit à la calculatrice
- prise de connaissance du barème :
  - **+4 pts** pour un résultat en calcul mental juste,
  - **+2 pts** pour un calcul instrumenté juste
  - **0 pt** pour une absence de réponse
  - **-1 pt** pour un résultat faux ou un conflit dans le groupe.

Le choix du barème est explicité auprès des élèves : il les incite à choisir prioritairement le calcul mental pour éviter qu'ils aient recours systématiquement à la calculatrice.

$\Rightarrow$ « Il faut donc s'entraîner ! »

2) Mise en œuvre d'un entraînement ritualisé (2 séances par semaine sur 6 ou 7 semaines)

3) La rencontre avec l'autre classe

Les enjeux des séances d'entraînement

Enjeu motivant du point de vue de l'élève : Se préparer pour le jour du défi.

Enjeux pour l'enseignant :

- Faire de ces moments d'entraînement:
  - un rituel, pour créer un cadre rassurant pour l'élève (mise en œuvre et consignes récurrentes, supports et matériels identiques)
  - un véritable moment de réflexion sur le calcul, objet d'observation et d'interrogation
- Faire prendre conscience aux élèves
  - de l'étendue de leurs compétences numériques
  - qu'elles sont mobilisables simultanément, à bon escient
  - de l'intérêt de maîtriser des connaissances mémorisées, automatisées

Ces entraînements ritualisés sont des temps de réinvestissement, de consolidation, de remédiation, d'approfondissement durant lesquels l'élève est amené à rebrasser ses connaissances antérieures et à les mettre en réseau. On l'amène à prendre conscience de l'intérêt de disposer de structures mémorisées et automatisées.

Description des séances d'entraînement

Durée : 15 min / 20 min

Matériel : - 2 stylos (bleu, vert) + 1 calculatrice
- 1 fiche « entraînement » par élève

Travail individuel en 6 étapes

1- distribution de la fiche à chaque élève face cachée sur la table

2- découverte / temps d'observation des calculs pour choisir le mode « calcul mental » ou « calculatrice » (2ème colonne)

3- Effectuation des calculs à la calculatrice / résultats notés au stylo vert

4- Rangement des calculatrices et des stylos verts

5- Effectuation des calculs mentalement / résultats notés au stylo bleu. (Le changement de couleur de stylo marque pour l'élève le changement de forme de calcul et permet à posteriori à l'enseignant de vérifier que l'élève a bien respecté son choix initial de mode de calcul.)

6- Signal de fin

⇒ L'enseignant indique le début et la fin de chaque étape

⇒ La feuille est retournée face cachée à la fin de chaque étape

Mise en commun

Les 4 calculs sont écrits au tableau (fig. 4) puis pour chacun :

1- sondage pour connaître le choix de forme de calcul de chaque élève

2- collecte des différentes propositions de résultats

3- collecte des procédures des élèves

4- discussion sur la pertinence du choix de la forme de calcul

5- évaluation de l'efficacité des procédures selon 2 critères : fiabilité et rapidité

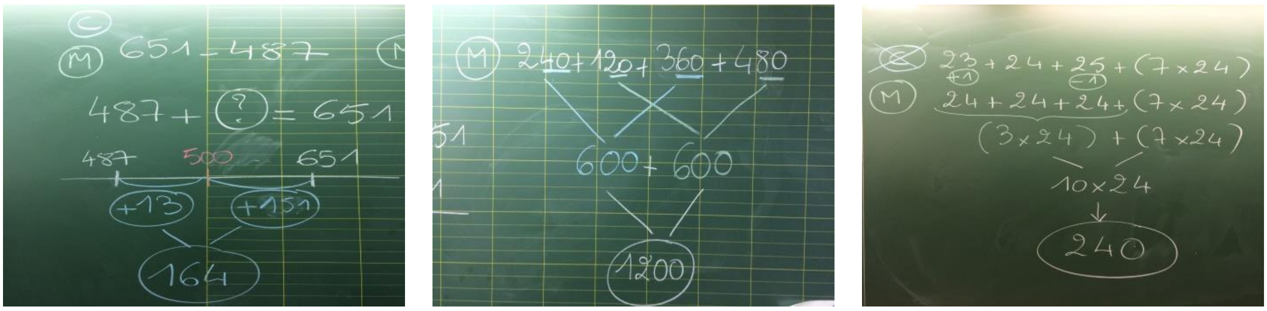


Figure 4 : Des traces de mises en commun (procédures proposées par des élèves de CM1)

Mise en œuvre du dispositif dans une classe de CE2 (10 min)

L'enseignante a choisi d'organiser ce défi en trois temps bien distincts :

1- des séances d'assimilation progressive de nouvelles connaissances dans le cadre des séances d'entraînement quotidiennes ;

2- l'élaboration de fiches « correction » qui expliquent les démarches à adopter pour résoudre les défis proposés.

3- la rédaction de défis pour d'autres classes.

Le dispositif global

<u>1) Présentation de l'enjeu aux élèves : obtenir un diplôme de calcul mental</u>

Les élèves sont très motivés par la possible acquisition d'un diplôme « fort.e en calcul mental ». (fig. 5)

Figure 5 : Le diplôme

<u>2) Entraînements quotidiens</u>

Cinq calculs sont à faire en un temps limité sous la forme d'un entraînement ritualisé, avec différentes étapes.

<u>3) Moments de synthèse hebdomadaires</u>

Description des séances d'entraînement quotidiennes

<u>Durée</u> : 10 à 15 min

<u>Matériel</u> : - 1 fiche entraînement par binôme ou par élève
- 3 stylos (noir, bleu et vert pour la correction)
- 1 calculatrice

Figure 6 : Un binôme

La fiche « entraînement » comporte 5 calculs. Ces calculs sont à réaliser :

- mentalement ou à l'aide d'une calculatrice ;
- en binôme (fig.6), ou individuellement (si l'élève s'en sent capable).

<u>Travail en 8 étapes</u>

1 - La fiche est donnée face cachée aux élèves.

2 - Les élèves disposent de 1 min 30 s au départ, puis de moins en moins de temps, jusqu'à arriver à seulement 1 min pour observer les calculs qui sont à effectuer et indiquer, dans la 2ème colonne, s'ils souhaitent réaliser un calcul mental (CM) ou faire usage d'une calculatrice (CI pour

« calcul instrumenté »). Ils retournent ensuite la feuille en attendant que tout le monde soit prêt pour la suite.

3 - Les élèves disposent de 3 min maximum pour prendre leur stylo noir, effectuer tous les calculs qu'ils souhaitent réaliser mentalement et remplir les cases correspondantes de la troisième colonne. Ils retournent à nouveau leur feuille pour attendre leurs camarades. Une fois le temps écoulé, la feuille est retournée ; le stylo bleu et la calculatrice sont rangés.

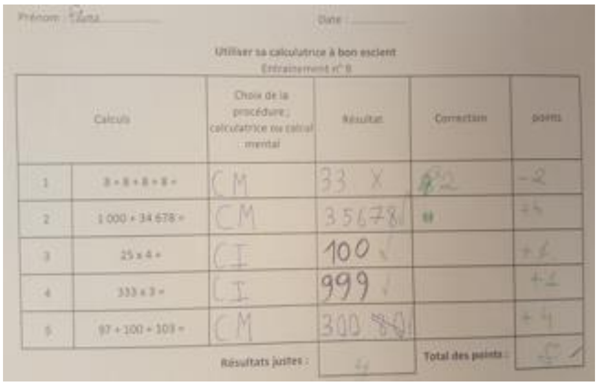
4 - Les élèves disposent de 2 min maximum pour utiliser leur stylo bleu et leur calculatrice afin de remplir les dernières cases de la troisième colonne.

5 - Une correction collective est faite. Chacun exprime et explique sa manière de procéder pour calculer mentalement. Les différentes propositions et procédures sont collectées. Il apparaît alors des démarches qui peuvent varier d'un calcul à l'autre (associativités…). Un débat argumenté s'ouvre autour des démarches utilisées et celles qui semblent les plus efficientes pour certains élèves. L'évaluation de l'efficacité des procédures est faite selon deux critères : la fiabilité et la rapidité du calcul.

6 - Les élèves comptent les points obtenus. Le barème favorise le calcul mental :

- **+4 pts** pour un résultat en calcul mental juste,
- **+2 pts** pour un calcul instrumenté juste
- **- 2 pts** pour une absence de réponse, un résultat faux ou un conflit dans le groupe.

Par exemple, sur la fiche de droite (fig. 7), l'élève a réalisé mentalement 4 calculs (stylo noir + CM) et un calcul instrumenté (stylo bleu et CI). Tous les résultats sont corrects. Chaque calcul mental lui remportera 4 points et le calcul instrumenté 1 point. Il a donc 17 points.



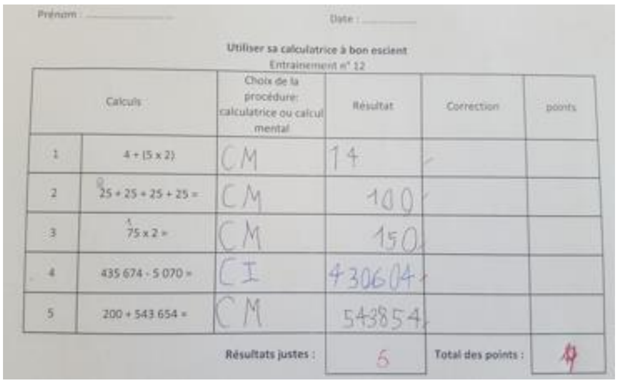


Figure 7 : Deux fiches après correction

7 - Les élèves passent à la rédaction en groupes de la correction de chacun des calculs sous forme de petites affiches explicatives (un groupe par calcul). Il s'agit de réaliser une affiche qui permette de comprendre au premier coup d'œil comment le calcul peut être réalisé. Ceci permet de garder la trace des stratégies de calcul. (fig. 8)

8 - Les élèves inscrivent leurs résultats sur un graphique qui leur permet de constater leurs progrès. (fig. 9)

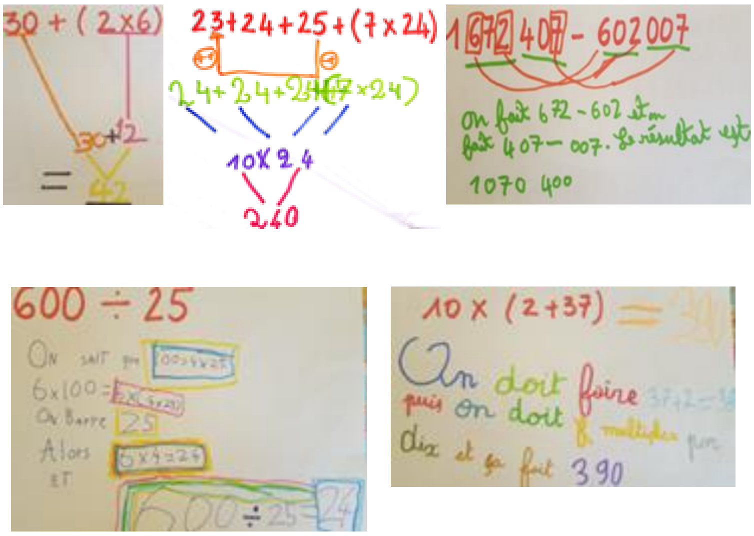


Figure 8 : La trace des stratégies de calcul

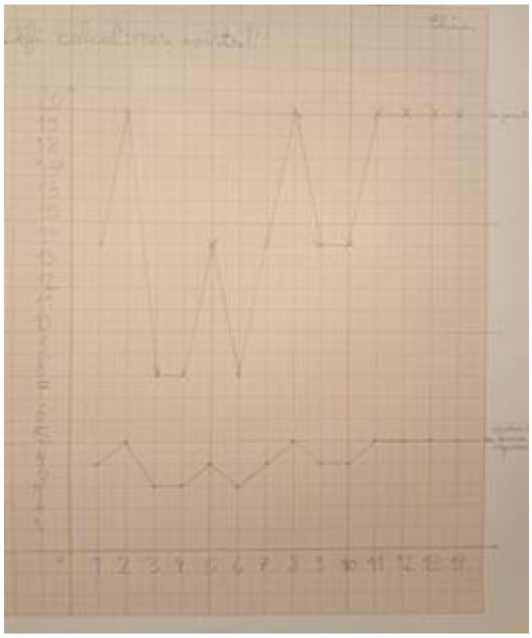


Figure 9 : Le graphique d'un élève

Moments de synthèse hebdomadaires : Classification et élaboration de calculs

Une fois par semaine, les élèves font une classification des affiches selon les caractéristiques ou les propriétés des calculs à effectuer. Ce temps permet de faire une synthèse sur les propriétés et les techniques de calcul rencontrées. (fig. 10)

Figure 10 : Classer les calculs

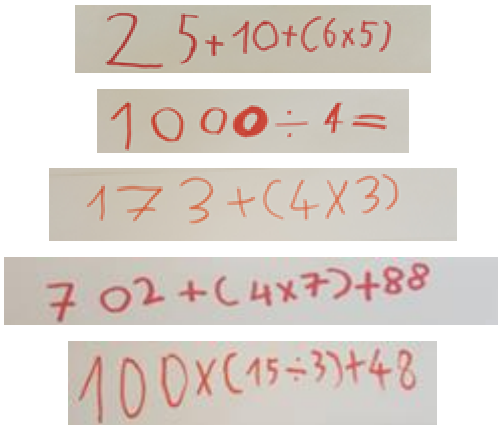


Figure 11 : 5 calculs élaborés par les élèves

Le même jour, ils rédigent des calculs qu'ils vont envoyer à d'autres classes / d'autres élèves de la classe et préparent la correction des calculs proposés sur une affiche (fig. 11). Cet exercice leur plaît particulièrement car ils aiment défier et piéger leurs camarades. La seule contrainte : savoir soi-même effectuer l'opération ! Ce temps a aussi une fonction d'évaluation formative.

Quelques pistes complémentaires et un prolongement

Au cours de la préparation de cet atelier, nous avions également envisagé de faire un tour de table introductif en demandant aux participants leurs difficultés éventuelles liées au calcul mental et à la numération dans leurs formations et/ou classes. Dans la mesure où ce dispositif a eu une certaine diffusion, nous avions aussi envisagé de faire parler les participants sur leurs propres expériences éventuelles autour de ce dispositif, en fin d'atelier.

Pour terminer ce texte, nous souhaiterions insister un aspect essentiel de notre travail. En effet, au fil des années, plusieurs collègues du groupe IREM ont mis en place des rencontres inter-classes, notamment école collège, sur la base du défi-calcul. La possibilité de ritualiser le dispositif pour en en faire un moyen d'apprentissage du calcul mental et la nécessité, pour ce faire, de disposer d'une ressource pour les enseignants est apparue progressivement.

Afin de commencer à constituer une telle ressource, nous avons identifié de premières variables sur lesquelles on peut jouer pour choisir (ou élaborer) les calculs et commencé à constituer des séries de calculs prenant en compte ces variables. Notre banque de calculs est constituée par des séries de calculs liés à ces variables et elle met ces variables en évidence. Elle est organisée en prenant en compte une certaine progressivité pour chaque variable. Ce travail nous semble pouvoir et devoir être poursuivi sur deux plans : d'une part l'identification de variables supplémentaires, d'autre part l'élaboration de séries de calculs.

Nous invitons les collègues intéressés pour poursuivre ce travail à nous contacter via le site de l'IREM de Paris (groupe IREM Primaire-Collège). Bien sûr un tel travail peut aussi être organisé, localement, dans le cadre de formations au défi.

Références citées et bibliographie complémentaire

Artigue M. (2005). L'intelligence du calcul. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour. Le calcul sous toutes ses formes*. En ligne : https://gpc-maths.org/data/documents/artiguecalcul.pdf

Butlen D., Masselot P. (2010). Dialectique entre sens et techniques, l'exemple du calcul mental. In J.-L. Durpaire et M. Mégard (Coord.) *Le nombre au cycle 2*. (pp. 11-22). CRDP Orléans-Tours. En ligne : http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

Butlen D., Masselot P. (2012). Calcul et conceptualisation. In J.-L. Durpaire et M. Mégard (Coord.) *Le nombre au cycle 3*. (pp. 31-50). CNDP (Futuroscope). En ligne : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/44/9/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf

Caron, F. (2007). Au cœur de « la calculatrice défectueuse» : un virus qu'on souhaiterait contagieux! *Petit x*, 73, 71-82.

Kahane J.-P. (dir.) (2002). Rapport d'étape sur le calcul. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. En ligne : https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_75043/fr/commission-kahane

MEN (2004). Utiliser les calculatrices en classe. Document d'accompagnement aux programmes de 2002. En ligne : http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57yutz/IMG/pdf/Utiliser_les_calculatrices_en_classe.pdf

Programmes d'enseignement de l'école primaire, *Bulletin officiel, Hors-série n°3 du 19 juin 2008*, MEN-DEGESCO

Robert A., Rogalski M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématique des élèves sur des exercices - le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x*, 60, 6-25.

Le calcul aux cycles 2 et 3. *Ressource thématique associée aux programmes*. Mars 2016. En ligne : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/28/1/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_609281.pdf

At 43 : Outiller les professeurs de cycle 3, exerçant en REP Plus, sur la résolution de problèmes arithmétiques : des pistes pour la conception d'un accompagnement

Denis Butlen[1], Pascale Masselot[2]

[12]ESPE de Versailles, UCP, Laboratoire de Didactique André Revuz ;

denis.butlen@u-cergy.fr , pascale.masselot@u-cergy.fr

Résumé : Cet atelier a été l'occasion de partager une expérience collaborative ciblée sur un thème avec différentes catégories d'enseignants intervenant dans le cycle de consolidation. Après avoir présenté le contexte de la formation et le public concerné (recherche action ciblant les professeurs de REP Plus exerçant en cycle 3), nous explicitons les principes organisateurs de la formation dispensée en nous référant à certains de nos travaux de recherche (Pézard, Butlen, Masselot, 2012), le détail des contenus abordés prenant appui sur des travaux de Houdement (2015) autour des problèmes qualifiés d'« élémentaires » et nous proposons aux participants une analyse à partir de quelques uns des supports élaborés par les enseignants concernés et certaines productions de leurs élèves en retenant certains concepts (Robert, Vandebrouck, 2014). Un débat autour des enjeux d'une telle formation et des alternatives possibles, a permis de préciser les hypothèses et les choix retenus.

Mots clefs : éducation prioritaire, résolution de problème, problèmes élémentaires, accompagnement, professeurs des écoles

I - Introduction

Nous présentons un dispositif d'accompagnement de professeurs des écoles et de collèges de REP[1] Plus enseignant les mathématiques dans des écoles scolarisant des élèves issus de milieux très défavorisés. Notre but est d'élaborer, d'expérimenter et d'évaluer ce dispositif en vue de proposer aux formateurs intervenant dans le domaine de l'éducation prioritaire un module de formation susceptible d'être reproduit à grande échelle par des formateurs de l'ÉSPÉ[2] mais aussi de terrain (CPC[3], PEMF[4], IEN[5]). Nous nous appuyons pour cela sur des recherches antérieures, notamment celles qui ont pour but d'évaluer l'impact d'un tel dispositif sur les pratiques effectives des PE en ayant bénéficié (Charles-Pézard, Butlen, Masselot, 2012). Le contenu mathématique principalement ciblé par cette formation est la résolution de problèmes élémentaires ou de base (Houdement, 2015) ou que nous avions appelés problèmes standards dans nos travaux sur les effets d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes (Butlen, Pézard, 2007).

[1] Réseau d'Education Prioritaire : regroupement d'écoles primaires et de collèges scolarisant des élèves issus de milieux sociaux défavorisés et bénéficiant de moyens supplémentaires pour l'enseignement
[2] Ecole supérieure du professorat et de l'éducation
[3] Conseiller pédagogique de circonscription
[4] Professeur des écoles maître formateur
[5] Inspecteur de l'éducation nationale

Dans le cadre de l'atelier, dans un premier temps, les animateurs après avoir présenté le contexte de la recherche et de la mise en place du dispositif, exposent le cadre théorique mobilisé. Dans un deuxième temps, à partir des énoncés de problèmes choisis et organisés selon différents indicateurs par les enseignants concernés par le dispositif, les participants étudient les productions des enseignants et analysent quels sont, selon eux, les problèmes élémentaires pour les élèves, à partir des contraintes retenues et des ressources apportées. Dans un troisième temps, nous proposons aux participants de l'atelier un échantillon de productions d'élèves, réponses à certains des problèmes retenus. La tâche est alors d'analyser ces productions (ainsi que les énoncés). Dans un dernier temps, les animateurs de l'atelier exposent la stratégie de formation qu'ils ont mise en œuvre sur la base de ces productions d'élèves.

II - Présentation du contexte et des choix : appui sur des travaux de recherche, adaptation de l'accompagnement aux contraintes et spécificités du public

1 Rappel du contexte du projet et de la demande institutionnelle

Le but initial pour les chercheurs est d'élaborer, expérimenter et évaluer un dispositif d'accompagnement en REP pouvant être reproduit à grande échelle.

Il s'agit de viser une amélioration de l'apprentissage des élèves et un bénéfice relatif au confort des enseignants en termes de marge de manœuvre et de recul sur la profession (à moyen et long termes).

Ce projet a été favorablement accueilli institutionnellement car il répondait à une attente académique. Nous avons rapidement reçu le soutien d'IEN, d'IPR[6] et des responsables académiques de l'éducation prioritaire. Au départ plus modeste, le projet est devenu académique suite à une demande du rectorat qui souhaitait qu'il cible un REP Plus au minimum par département de l'académie. De ce fait, nous avons été amenés à le décliner en fonction des demandes locales et du public sollicité institutionnellement.

2 Des demandes et un public variés

Le projet propose donc d'accompagner, sur une durée de trois ans, quatre REP Plus associés directement au projet (départements de l'académie de Versailles). Les classes de cycles 3 et 4 étaient au départ prioritairement visées mais sont devenues en fait inégalement représentées, dans la mesure où une demande particulière d'un département visait spécialement le cycle 2.

L'équipe encadrant le projet est pluri catégorielle ; elle comporte des enseignants chercheurs et des formateurs. Un étudiant en master 2 a rédigé un mémoire du master Recherche (REDEF[7]) de l'université de Cergy-Pontoise sur un sujet connexe mais ciblant un public associé à cet accompagnement sur le dispositif « plus de maîtres que de classes ».

Cette composition pluricatégorielle témoigne de notre volonté d'associer à moyen terme les divers personnels encadrant les REP. Il s'agit aussi de croiser les différentes préoccupations (demandes de formateurs) qui traduisent des enjeux ou des intérêts qui peuvent être différents mais qui enrichissent les échanges autour d'un objet commun.

---

[6] Inspecteur pédagogique régional

[7] Recherches en éducation, didactique et formation

3 Divers contextes

Comme nous l'avons déjà souligné, le public est constitué de professeurs des écoles du cycle 2 au cycle 4, regroupés localement, pour une part sur la base du volontariat ou dans le cadre des heures de formation spécifiquement accordées à l'éducation prioritaire.

Selon les cas, il pouvait s'agir d'enseignants d'un ou de plusieurs REP Plus du cycle 3 (école élémentaire et collège) regroupés dans un collège ou seulement de cycle 4 ou de tous les enseignants du cycle 2 d'un REP Plus ou encore de tous les enseignants des écoles d'un REP Plus sur la base du volontariat. Ainsi dans un département, l'accompagnement a concerné un groupe de cycle 4 constitué de tous les enseignants des trois collèges d'un REP Plus et deux groupes de cycle 3 regroupant tous les enseignants (PE[8], PLC[9], référents) de trois REP Plus. Dans un autre département, les quatre journées de stages de formation visaient un groupe d'enseignants de cycle 3 d'un REP Plus (PE, PLC, PDMQDC[10], référents) et dans un dernier, l'accompagnement a concerné un groupe d'enseignants de cycle 3 d'un REP Plus.

4 Des modes d'interventions adaptés aux demandes et aux contextes locaux

De ce fait, le dispositif, afin de s'adapter aux demandes et contraintes locales, s'est décliné selon les cas en : un regroupement sur trois journées complètes au cours du premier semestre, des regroupements de deux journées plus espacés dans le temps, des cycles comportant une conférence suivie de deux ou trois ateliers de 1 heure 30 à 2 heures parfois doublés par un dispositif complémentaire d'ateliers gérés par les référents locaux ou enfin plusieurs regroupements de 3 heures dans une même école.

4.1 Les hypothèses

Nos hypothèses sont basées sur les résultats de nos travaux de recherche précédents autour de l'accompagnement des professeurs débutants nommés en ZEP[11] et prennent en compte les besoins du public, quant à la forme et aux choix des contenus de travail privilégiés.

Nous retenons de nos travaux la nécessité de prendre en compte à la fois l'amélioration des apprentissages des élèves et le confort de l'enseignant. Le dispositif se construit autour de plusieurs dialectiques dont deux notamment nous semblent incontournables. La première consiste à installer une dialectique entre apports d'informations, élaboration de supports pour les enseignements (tests et activités possibles), témoignages de mise en œuvre, analyse de productions d'élèves et élaboration de pistes pour dépasser certaines difficultés repérées. La seconde dialectique porte sur les besoins ressentis par les enseignants et les besoins identifiés par les chercheurs (exemple : autour des activités de résolution de problèmes : des rallyes au traitement de problèmes élémentaires).

Cela renvoie à une manière de penser les problèmes d'une profession :

---

[8] Professeur des écoles
[9] Professeur de lycée et de collège
[10] Plus de maître que de classe, dispositif spécifique aux REP+, des enseignants en nombre supérieur aux classes sont affectés dans certaines des écoles du réseau
[11] Zone d'éducation prioritaire, ancienne dénomination du dispositif d'éducation prioritaire

- il existe des problèmes et il existe des experts (enseignants) de la profession et des chercheurs. Dans certains cas, les experts de la profession ne peuvent seuls trouver des solutions aux problèmes ;

- résoudre ces problèmes de la profession nécessite une reformulation par les chercheurs en problème pour la recherche.

Ce point de vue est le parti pris.

Il se contextualise par exemple ainsi : il est fréquemment suggéré de proposer des rallyes mathématiques en éducation prioritaire mais le constat établi à la suite de ces expériences est que les élèves sont souvent en échec. Ces rallyes ont comme objectif annoncé de changer le rapport aux mathématiques des élèves et des professeurs.

Au lieu d'avoir un effet positif sur l'investissement des élèves dans les mathématiques, cela peut conduire à un désinvestissement de ces derniers mais aussi un désinvestissement des enseignants qui ne voient pas dans ce dispositif les effets prometteurs attendus. L'apport du chercheur consiste, notamment dans ce cas, à replacer les types de problèmes fréquentés à l'occasion des rallyes (problèmes souvent atypiques ou complexes) dans le cadre plus complet de l'apprentissage des différentes catégories de problèmes susceptibles d'être enseignés dans la scolarité obligatoire en mathématiques. Cela peut ainsi permettre de relativiser la place de ces rallyes dans la fréquentation des mathématiques.

Une autre hypothèse, issue du travail de Masselot, pour qu'une formation « produise un effet », proche de celui qui est attendu, il est nécessaire d'entrer en résonnance avec les représentations et logiques des enseignants (Masselot, 2000).

4.2 Les modes d'intervention des formateurs

Afin de pouvoir prendre la distance nécessaire pour pouvoir analyser et réguler à chaud les interventions du formateur, nous avons adopté le principe d'une intervention à plusieurs voix : un intervenant principal et un ou plusieurs réactants qui complètent, précisent, interrogent le propos en prenant en compte le niveau de réception du public. Ce mode de fonctionnement a déjà été testé lors de nos précédents scénarios d'accompagnement. Il assure un certain confort pour le formateur qui peut, sachant qu'un réactant pourra relativiser ou compléter ses propos, s'engager, prendre des risques, etc.

De plus cette co-intervention permet des débriefings à chaud et en différé. En effet, des adaptations sont toujours indispensables, il est parfois difficile de s'en tenir au scénario prévu et il est important de répondre aux sollicitations pour maintenir la relation, le contact avec le groupe.

4.3 Les choix des contenus

Pour un même dispositif, nous avons choisi un ou deux contenus parmi des contenus déjà privilégiés dans le premier dispositif expérimental : la résolution de problèmes, le calcul mental, les nombres relatifs (cycle 4), la géométrie plane.

Dans cet atelier, nous nous limiterons à un exemple de dispositif, relativement emblématique de notre démarche, sur le thème de la résolution de problèmes. Le mode de travail se déclinait (globalement à la durée près) en un apport d'informations (en nous référant aux travaux de Catherine Houdement et de Gérard Vergnaud pour ce thème), l'élaboration et la passation de tests pour chaque niveau du cycle, l'analyse des productions, sur le REP Plus, globale et détaillée par problème ou par élève (étude de cas), et enfin des compléments sur les modes d'interventions possibles (en nous référant en particulier aux travaux de Aline Robert et Fabrice Vandebrouck, 2014) à partir de l'analyse des difficultés repérées.

Nous prenons en compte différentes contraintes : un diagnostic raisonnable des difficultés des élèves suffisamment porteur d'informations mais pas trop chronophage et une élaboration participative d'un support.

Lors d'un exposé introductif, nous avons ainsi rappelé la classification des problèmes susceptibles d'être fréquentés au cycle 3 selon quatre catégories :

- Les problèmes intervenant dans les situations permettant d'introduire une notion (situation fondamentale ou de référence).

- Les problèmes élémentaires qui respectent les critères suivants : l'énoncé ne doit pas poser de problème de lecture ; il existe une ou deux opérations pour le résoudre ; l'enseignement vise à la reconnaissance automatique de l'opération en jeu dans la résolution. Notre objectif est d'aider les enseignants qui rencontrent des difficultés pour déterminer quels sont les problèmes élémentaires.

- Les problèmes complexes, agglomérat de problèmes élémentaires (avec présence ou non de questions intermédiaires).

- Les problèmes pour chercher (atypiques) pour lesquels les élèves ne disposent pas de procédures expertes (cas fréquent des problèmes de rallyes mathématiques).

III - LE TRAVAIL AU COURS DE L'ATELIER

1 Les documents proposés aux participants

Les documents proposés sont les suivants :

- un exemple d'énoncés des problèmes élaborés par les professeurs d'un REP Plus pour le test à proposer aux élèves ;
- les énoncés proposés comme tests et construits sur la base des énoncés précédents (annexe 1) ;
- Des exemples de procédures d'élèves portant sur une grande catégorie de problèmes donnés : structures additives, structures multiplicatives, problèmes de comparaisons additive (annexe 2) ou multiplicative de mesures.

2 Exposé introduisant le travail de groupe

Les animateurs ont proposé dans un premier temps des exemples d'énoncés produits par les professeurs. Ils ont plus particulièrement souligné deux aspects. Les énoncés produits sont, dans certains cas, du même type et diffèrent seulement par la valeur de certaines variables : taille ou qualité des données numériques (rendant parfois le problème inutilement difficile) ou contexte mobilisé. Les professeurs rencontrent des difficultés pour cerner le niveau de complexité d'un problème donné, notamment entre ce qui doit être attendu au CM1, CM2 ou 6^{e}. De plus, ils surestiment souvent les capacités de résolution de leurs élèves, proposant des énoncés relativement complexes alors que par ailleurs ils déclarent que leurs élèves ont un très faible niveau et ils en sont conscients.

Afin d'associer les professeurs à l'élaboration du test, des compromis ont été effectués selon les REP sur les choix des problèmes. Le test final comporte deux parties avec chacune trois problèmes additifs et trois problèmes multiplicatifs, de plus, deux problèmes sont communs à deux niveaux successifs. La durée accordée et les consignes données aux élèves ont également fait l'objet de débat : ici les élèves doivent choisir, parmi six problèmes, quatre d'entre eux et les résoudre. Le but était de se renseigner également sur ce que les élèves choisissaient prioritairement et donc reconnaissaient comme problèmes plutôt faciles pour eux. Notons que cette consigne a vraiment surpris et déstabilisé certains enseignants qui ne l'ont d'ailleurs pas toujours respectée lors de la passation. Certains élèves ont ainsi résolu les quatre premiers problèmes, d'autres six problèmes.

Les animateurs présentent ensuite et commentent un tableau présentant les performances des élèves de plusieurs REP d'un département en appui sur un recueil et l'analyse de plusieurs centaines de copies. Le but de ce recueil de données est de répondre à plusieurs questions de diverses natures dont notamment : Quels sont les problèmes les plus choisis par les élèves ? Est-ce qu'il y a des régressions ou des progressions selon l'âge ? Est-ce qu'il y a des régularités ? Est-ce qu'il y a des classes atypiques ? Est-ce qu'on peut supposer qu'il y a des « impasses » (types de problèmes laissés de côté) dans l'enseignement des professeurs concernés ? Les animateurs soulignent à cette occasion les faibles performances des élèves sur certains types de problèmes notamment multiplicatifs, en particulier le très faible score obtenu de manière générale sur les problèmes de comparaison multiplicative de mesure ou de proportionnalité simple qui semble témoigner d'un déficit d'enseignement de ces notions. En revanche, sauf pour une classe, les pourcentages de réussites et d'échecs montrent de grandes régularités entre les différentes classes. Il n'apparait pas de régression d'une année sur l'autre mais en général une certaine progression. Enfin, les problèmes de composition de transformations sont mal réussis. Certains enseignants effectuent ce dépouillement avec une grande rigueur tandis que d'autres le font de façon nettement plus superficielle. Ce temps amène également les enseignants à revenir sur leurs anticipations et à prendre un peu de recul en relativisant les résultats de leurs propres élèves.

Ces rapides analyses ont aussi pour but de mieux cerner ce que l'on appelle un élève en difficulté. Les animateurs ont réinvesti un résultat de recherche (Butlen, 1991) : à un niveau donné, l'élève est en difficulté quand il échoue à un item réussi par 80% d'une classe d'âge, item portant en général sur un contenu au programme de la classe deux ans au moins auparavant. Un problème élémentaire pourrait donc être considéré comme maîtrisé quand il est réussi par au moins 80 % des élèves de la classe. Les élèves échouant sur ce problème sont alors considérés comme en difficulté sur ce contenu spécifique.

Suite à cette analyse, les professeurs de cycle 3 sont amenés à travailler sur certaines de ces productions d'élèves. Les animateurs ont proposé aux enseignants deux types de sélections de productions d'élèves. La première propose pour un problème donné 10 à 15 productions d'élèves variées (justes ou erronées) pas toujours représentatives d'un grand nombre d'élèves mais témoignant toutes d'un certain regard sur le problème choisi et sur les calculs à effectuer. La seconde sélection propose, pour un élève donné, d'un niveau donné, ses réponses aux problèmes proposés. Les formateurs ont fourni aux enseignants des éléments (grilles) de correction.

Notons que ce type d'activité se révèle assez nouveau pour les professeurs des écoles mais ils s'investissent beaucoup dans cette analyse et échangent autour des interprétations (« toi tu as « compté juste » quand l'élève répondait ça… moi pas… »), des attentes au niveau de la présentation des réponses et des hypothèses sur les erreurs. Certains professeurs des écoles ont proposé des analyses fines des données : problèmes choisis par les élèves, analyse des erreurs, émission d'hypothèses sur leur origine. D'autres se sont limités au nombre de réponses correctes. En revanche, certains professeurs de collège semblent moins motivés et investis considérant sans doute que c'est une correction de copies de plus.

IV - CONCLUSION

Cette présentation débouche ensuite sur un exposé de conclusion des animateurs de l'atelier qui présentent la stratégie qu'ils ont mise en œuvre pour exploiter les données recueillies lors de ces tests.

1 Premiers constats

Cette première année constituait une prise de contact avec les professeurs des REP Plus. De ce fait, elle se caractérise par davantage d'apports d'informations et de témoignages que de mutualisation et d'observations effectives de pratiques. Notre but était, dans un premier temps, d'accéder indirectement aux pratiques des enseignants par le biais de la conception d'activités ou de tests et des constats effectués à cette occasion mais aussi d'établir une certaine proximité et une légitimité dans le but d'avoir accès progressivement aux pratiques effectives afin de mesurer l'impact à court terme du dispositif. De plus, il s'agissait de favoriser une collaboration effective entre les différentes catégories d'enseignants (PE, PLC, référents, PDMQDC) à partir d'un projet commun suffisamment limité pour obtenir une certaine adhésion au projet.

2 Une adhésion et un travail sur le moyen terme

Nous avons constaté qu'une condition nécessaire à l'enrichissement des pratiques consistait en une rencontre effective entre projets et attentes des participants et projet de formation qui passe nécessairement par une explicitation réciproque et progressive des attentes de chacun, un investissement partagé dans un projet de production finalisé par le traitement des difficultés des élèves et devant s'inscrire dans les activités de la classe (gérable et négociable) et enfin une installation progressive de la légitimé du formateur lors de sa participation aux différents temps de travail (faire et faire faire).

Nous avons constaté un investissement immédiat ou progressif correspondant à nos attentes de formateurs mais diversifié selon les dispositifs (durée et fréquence des interventions, taille des groupes) et les publics (notamment selon la culture de la catégorie professionnelle et de sa pratique de la formation continue).

Toutefois les enseignants se sont révélés satisfaits de disposer de temps pour effectuer ce travail collectivement et de bénéficier des apports dispensés mais aussi très demandeurs d'apports théoriques leur permettant de mieux analyser les productions de leurs élèves, les difficultés diagnostiquées, les choix de stratégies d'enseignement à effectuer.

Même si certains témoignages de mise en œuvre ont été recueillis, il ne nous a pas été possible d'observer des pratiques effectives. Cependant dans une des formations, le mémoire de recherche rédigé comportait un recueil de données portant sur des observations effectives de pratiques de classes (maître de la classe et maître Plus) autour de la résolution de problèmes.

Le projet est renouvelé cette année autour de nouveaux thèmes et étendu notamment dans les départements des Hauts-de-Seine (92) et l'Essonne (91) puisqu'il concerne les cycles 1 à 3 dans le

92 et 1 à 4 dans le 91. Le projet est davantage orienté vers les cycles 1 et 2 dans les Yvelines (78). Il concerne toujours les cycles 2 et 4 dans le Val d'Oise (95).

Références

Butlen D. (2012). Questions autour de l'enseignement des mathématiques en ASH : deux exemples de recherche. Réflexions et perspectives, 126-148, In *ARDM, Actes du Séminaire National de Didactique 2012*, IREM, Paris-Diderot

Butlen D., Masselot P., Pézard M. (2004). Contributions. In Peltier-Barbier M.L., *Dur d'enseigner en ZEP*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Butlen D., & Pézard M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté : le calcul mental entre sens et technique, *Grand N n° 79*, pp 7-32, IREM Grenoble

Butlen D. (2007). *Le calcul mental, entre sens et technique. Des difficultés des élèves aux élèves en difficulté,* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Charles-Pézard M., Butlen D., Masselot P. (2012). *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La pensée Sauvage.

Charles-Pézard M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 30* (2) 197-261

Houdement C. (2015). Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes, In COPIRELEM, Actes du XXXe Colloque Besançon.

Péault et al. (sous la direction de Vergnaud G.) (2001). *Le Moniteur de Mathématique, cycle 3, Résolution de problèmes*, Paris : Nathan

Robert A., & Vandebrouck F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherches en didactique des mathématiques 34*(2), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques 10*/2-3, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Annexe 1 : Enoncés de problèmes

Enoncés CM1 :

Test 1 :

Problème 1 : Alex a 86 billes, il en gagne 12 à la récréation. Combien en-a-t-il maintenant ?

Problème 2 : Alex a 15 billes au début de la récréation. À la fin, il en a 25. Que s'est-il passé ?

Problème 3 : Pierre a mis ses billes dans des sacs : il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?

Problème 4 : Patrick veut construire des petits bateaux avec une coque et une voile. Il a le choix entre 8 formes de coques et 6 couleurs de voile. Combien de bateaux différents Patrick peut-il construire ?

Problème 5 : Trois enfants se partagent 48 bonbons. Ils en prennent tous le même nombre. Combien chacun a-t-il de bonbons ?

Problème 6 : Dans un parking, il y a 25 places occupées et 15 places vides. Combien y-a-t-il de places sur ce parking ?

Test 2 :

Problème 1 : Alex a 10 billes de moins que Sonia qui en a 28. Combien de billes à Alex ?

Problème 2 : Une fermière range 60 œufs dans des boîtes de 6 œufs. Combien de boîtes d'œufs remplit-elle ?

Problème 3 : Cette année, le père de Lucie a 35 ans et Lucie a 7 ans. Le père de Lucie est combien de fois plus âgé que sa fille ?

Problème 4 : Pour aller dans leur classe, les élèves de la classe de CM2 montent un escalier de 25 marches 4 fois par jour. Combien de marches les élèves montent-ils en 5 jours ?

Problème 5 : Un homme a 32 ans à la naissance de son fils. Quand son fils aura 28 ans, quel sera l'âge du père ?

Problème 6 : Jacques a gagné 9 billes en deux parties. Il a gagné 6 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il gagnées lors de la deuxième partie ?

Énoncés CM2 :

Test 1 :

Problème 1 : Pierre a mis ses billes dans des sacs : il a 5 sacs de 32 billes. Combien a-t-il de billes ?

Problème 2 : Pierre met douze minutes pour aller de chez lui à l'école. Zélie met trois fois moins de temps. Combien de temps met Zélie ?

Problème 3 : Alex a 15 billes au début de la récréation. À la fin, il en a 25. Que s'est-il passé ?

Problème 4 : Jean pèse 53 kilos. Il en perd 7. Combien pèse-t-il maintenant ?

Problème 5 : Le responsable d'un supermarché a commandé 3 060 œufs répartis dans des boîtes de 36 œufs. Combien de boîtes a-t-il reçues ?

Problème 6 : Dans un parking de 60 places, il y a 48 voitures stationnées. Combien y-a-t-il de places libres ?

Test 2 :

<u>Problème 1 :</u> Un père de 60 ans a un fils de 32 ans. Quel âge avait le père à la naissance de son fils ?

<u>Problème 2 :</u> Jean a eu 64 euros pour son anniversaire ; Charlotte a eu 4 fois moins. Combien Charlotte a-t-elle reçu ?

<u>Problème 3 :</u> Jacques a gagné 9 billes en deux parties. Il a perdu 6 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il gagnées lors de la deuxième partie ?

<u>Problème 4 :</u> Au supermarché, il est offert 7 euros en bons d'achat pour 10 tablettes de chocolat achetées. En achetant 60 tablettes de chocolat, combien reçoit-on en bons d'achat ?

<u>Problème 5 :</u> Pour partir en voyage, un groupe de 135 enfants se répartit équitablement dans 3 cars. Combien y a-t-il d'enfants dans chaque car ?

<u>Problème 6 :</u> Un livre a augmenté de 4 € puis il a baissé de 12 €. Son prix est maintenant de 25 €. Quel est son prix initial ?

<u>Énoncés sixième :</u>

Test 1 :

<u>Problème 1 :</u> Jean a eu 64 euros pour son anniversaire ; Charlotte en a eu 4 fois moins. Combien Charlotte a-t-elle reçu ?

<u>Problème 2 :</u> Un jeu vidéo coûte 80 €, il augmente de 12 € en juin puis baisse de 7 € en décembre. Quel est maintenant son prix ?

<u>Problème 3 :</u> Une fermière range 160 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Combien de boîtes d'œufs remplit-elle complètement ?

<u>Problème 4 :</u> Dans une salle de classe, il y a 35 tables et 8 chaises. Combien de chaises faut-il ajouter pour qu'il y ait une chaise par table ?

<u>Problème 5 :</u> Alex a perdu 7 billes le matin à la récréation. Le soir, il en a 17. Combien en avait-il avant d'arriver à l'école ?

<u>Problème 6 :</u> Un terrain de basket rectangulaire a une aire de 252 m². Sa largeur est 14 m. Quelle est la longueur du terrain ?

Test 2 :

<u>Problème 1 :</u> Avec 82 billes, combien doit-il prévoir de feuilles de bristol ?

<u>Problème 3 :</u> Un livre a augmenté de 4 € puis il a baissé de 12 €. Son prix est maintenant de 25 €. Quel est son prix initial ?

<u>Problème 4 :</u> Cette année, Jean a 14 ans, son père 43 ans. Quel âge aura son père quand Jean aura 30 ans ?

<u>Problème 5 :</u> En moyenne, un coureur automobile fait en une heure 25 tours d'un circuit de 3 km. Quelle distance a-t-il parcourue en 4 heures ?

<u>Problème 6 :</u> Jacques a perdu 9 billes en deux parties. Il a gagné 7 billes lors de la première partie. Combien en-a-t-il perdues lors de la deuxième ?

Annexe 2 : Un problème et des procédures

Productions d'élèves à un problème de comparaison de mesures relevant des structures additives

Problème 4 : Cette année, Jean a 14 ans, son père 43 ans. Quel âge aura son père quand Jean aura 30 ans ?

P1

Problème n° 4 :
QUAND AURA 30 ans SON PÈRE AURA 73 ans.
43+30=73

P2

Problème n° 4 :
43+30=73 ans. Son père aura 73 ans.

P3

Problème n° 4 :
Son père aura 59 ans quand Jean en aura 30.
30-14=16 43+16=59 V

P4

Problème n° 4 :
~~Son père quand~~
Son pere aura 73 ans.
43+14=29 14+30=44 44+29=73

P5

Problème n° 4 : 1 1
30-14=26 43+26=69
Son père aura 69 ans.

P6

Problème n° 4 :
Son père aura 59 ans quand Jean aura 30 ans
43-14=29 29+30=59 V

P7

Problème n°..4.. :

Cette annee, Jean 14 ans, son père 43 ans ~~ceul~~ Quel âge aura son ~~pee~~ père ~~quaq~~ quand Jean aura 30 ans

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 43 \\ \hline 57 \end{array}$$

Il aura 57 ans.

P8

Problème n°..4.. :

43 + 29 = 72

Réponse : Le père de Jean aura 72 ans quand il aura 30 ans.

P9

Problème n°..4.. :

(43 - 14 = 29) 30 + 29 = 59

Il aura 59 ans

P10

Problème n°..4.. :

30 - 14 = 16 16 + 43 = 59 Quand Jean aura 30 ans, son père aura 59 ans.

P11

Problème n°..4.. :

30 - 14 = 16 Il y a 16 ans d'équart pour que Jean ait 30 ans

43 + 16 = 59 Son père aura 59 ans.

P12

Problème n°..4.. :

30 + 14 = 26

43 + 26 = 69 Quand Jean aura 30 ans son père aura 69 ans

P13

Problème n°4 :
Quand Jean aura 30 ans son père aura ~~59~~ 72 ans
car ils ont 29 ans d'écart ~~29~~ 43-14=29 30+29=59
43 - 14 = 29 29+43=72

P14

Problème n°4 :

30 - 14 = 26 Il aura 30 ans

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\ 26 \\ \hline 69 \end{array}$$

P15

Problème n°1 :
Calculs : 16+14 = 30 ans ; 16+43 = 59 ans
Réponses : Quand Jean aura 30 ans son père aura 59 ans.
Ils sont 16 ans de différence.

P16

Problème n°...... :
le père de jeans aura 73 ans quand jeans aura 30 ans

16 + 14 = 30
43 + 30 = 73

At 44 : Trois appréhensions du parallélisme : un exemple de séquence pour le cycle 3

Carine Reydy

ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D ; Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

Résumé : Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3 (MEN 2015), l'enseignement de la géométrie est perçu comme un terrain propice à la transition école-collège puisqu'il permet d'aller progressivement d'une géométrie basée sur le recours aux instruments à des raisonnements déductifs qui conduiront à des démonstrations. On y trouve aussi une incitation à faire appréhender de plusieurs façons une même notion aux élèves. On se propose dans cet atelier d'apporter un éclairage sur ces préconisations dans le cas du parallélisme (Pourquoi enseigner plusieurs procédés de tracé de droites parallèles ? Dans quel ordre ? Comment justifier leur apprentissage auprès des élèves ?), puis de présenter et d'analyser à partir d'extraits vidéo une séquence qui permet d'illustrer trois appréhensions de la notion de droites parallèles et qui peut être proposée en CM1, en CM2 et en 6ème (Reydy 2017).

Mots clefs : parallèle ; géométrie ; cycle 3

Les participants présents à cet atelier sont issus de différents corps de métiers (enseignants du premier et du second degré, conseillers pédagogiques de circonscription, inspecteur de l'éducation nationale, inspecteur d'académie, formateurs d'ESPE, enseignants chercheurs en mathématiques responsables d'IREM), mais ont en commun d'être tous concernés par l'enseignement des mathématiques au cycle 3. Après l'analyse des préconisations des nouveaux programmes concernant l'enseignement de la géométrie et plus particulièrement de la notion de parallélisme au cycle 3, l'objet de cet atelier est de proposer et d'étudier une séquence d'enseignement pour le CM1, le CM2 et la 6ème qui pourra servir de support de travail en formation continue pour favoriser une réflexion et un échange sur les pratiques entre enseignants du primaire et du secondaire. Le travail présenté ici est plus largement détaillé dans (Reydy 2017).

Préambule

Figure 1 : la vieille étagère

On a retrouvé une vieille étagère (figure 1) en pièces détachées que l'on souhaite assembler, mais on a égaré la notice de montage. On dispose de toutes sortes d'éléments de fixation : équerres, vis, chevilles, croisillons, etc. Comment faire pour que les deux montants soient parallèles ? On peut fixer une étagère aux deux montants avec une équerre à chaque extrémité. On utilise alors le fait que deux droites parallèles sont deux droites perpendiculaires à une même troisième. On peut aussi fixer deux étagères à l'un des montants avec des équerres, puis fixer l'autre montant avec des vis. Dans ce cas, on utilise le fait que deux droites parallèles sont deux droites ayant un écartement constant. On peut encore fixer une étagère aux deux montants avec une équerre pour régler l'écartement puis mettre un croisillon pour assurer le parallélisme. Ici, c'est le fait que deux droites parallèles sont deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle qui est mobilisé. On peut également fixer les deux montants au mur avec un fil à plomb. On se sert alors du fait que deux droites parallèles sont deux droites ayant la même direction. Dans les quatre solutions exposées, nous avons mobilisé quatre caractérisations différentes de deux droites parallèles. Il en existe bien sûr d'autres : deux droites parallèles sont aussi deux droites portées par les côtés opposés d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré, d'un trapèze, d'un losange, deux droites passant par les milieux de deux côtés d'un triangle, deux droites ayant la même pente dans un réseau quadrillé, etc.

La géométrie dans les programmes de 2015

Le nouveau cycle 3, cycle de consolidation qui comprend désormais le CM1, le CM2 et la 6$^{\text{ème}}$, fait le lien entre l'école et le collège :

> *« À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. »* (MEN, 2015, p. 210).

On retrouve dans ces préconisations une description de l'enseignement de la géométrie de l'école au collège proposée par R. Charnay presque 20 ans plus tôt. Selon lui (Charnay 1997-98), il y a trois temps dans l'appréhension des objets géométriques par les élèves de l'école au collège : le temps de la géométrie perceptive au cycle 1 et pendant une partie du cycle 2 (les objets géométriques sont reconnus à l'œil, ce critère tenant lieu de vérité), le temps de la géométrie instrumentée à la fin du cycle 2 et au cycle 3 (pour identifier un objet géométrique ou une propriété, les élèves doivent avoir recours aux instruments) et le temps de la géométrie mathématisée au collège (c'est par déduction que l'on détermine la nature d'un objet géométrique ou que l'on énonce une propriété).

On trouve également dans les programmes de 2015 une incitation à faire appréhender de plusieurs façons un même objet ou une même propriété géométrique aux élèves :

> *« Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure. »* (MEN, 2015, p. 210).

Ces différentes appréhensions ont des domaines de validité distincts et l'on mobilisera l'une ou l'autre selon le contexte, le problème posé, les instruments à disposition.

En conclusion, nous retenons deux idées phare des programmes de 2015 pour le cycle 3 en géométrie : il faut conduire les élèves d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée qui s'appuie sur l'explicitation des propriétés en préparation d'une géométrie déductive, et il est souhaitable de proposer plusieurs caractérisations d'une même propriété ou d'un même objet.

Le parallélisme au cycle 3

Au cycle 3, les activités proposées aux élèves concernant le parallélisme relèvent essentiellement de deux types de tâches, à savoir contrôler le parallélisme de deux droites, et tracer deux droites parallèles, la distance entre ces deux droites étant donnée (ou bien tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné). Dans les programmes de 2015, ces tâches sont répertoriées dans la compétence « Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques » :

> *« Effectuer des tracés correspondant à des relations de perpendicularité ou de parallélisme de droites et de segments.*
> *Perpendicularité, parallélisme (construction de droites parallèles, lien avec la propriété reliant droites parallèles et perpendiculaires).* » (MEN 2015, p. 212)

Nous avons en début d'atelier rappelé plusieurs caractérisations de deux droites parallèles. Les participants sont invités à discuter chacune d'entre elles afin de déterminer lesquelles pourront être retenues pour aborder la notion de parallélisme en cycle 3. Les éléments suivants ressortent du débat.

La caractérisation « deux droites qui ne se coupent jamais » correspond à la définition spontanée des élèves mais ne fournit pas de procédé de tracé. De plus pour vérifier le parallélisme de deux droites, elle n'est pas toujours opératoire dans l'espace graphique. Dans les manuels de cycle 3, c'est systématiquement sur elle que l'on s'appuie en premier lieu.

La caractérisation « deux droites ayant un écartement constant » fournit un procédé de tracé et un procédé de vérification. Elle peut être introduite en remarquant que deux droites parallèles sont deux droites qui ne se rapprochent pas et qui ne s'éloigne pas l'une de l'autre. Son utilisation suppose que la notion de distance d'un point à une droite est connue, bien que l'ensemble des participants s'accordent à penser que cette dernière est très rarement travaillé dans les classes. Les élèves doivent aussi comprendre qu'il est suffisant de vérifier que l'écartement entre les deux droites est le même en deux lieux distincts. Cette caractérisation est automatiquement retrouvée dans les manuels de CM1 et de CM2 comme procédé de vérification et de construction, et moins systématiquement dans ceux de 6ème (uniquement comme procédé de construction dans ce cas). Nous notons le fait que l'utilisation de la caractérisation par écartement constant crée souvent un obstacle plus tard en générant des utilisations erronées du théorème de Thalès (figure 2), ce qui pourrait remettre en question son usage systématique en CM1 et CM2.

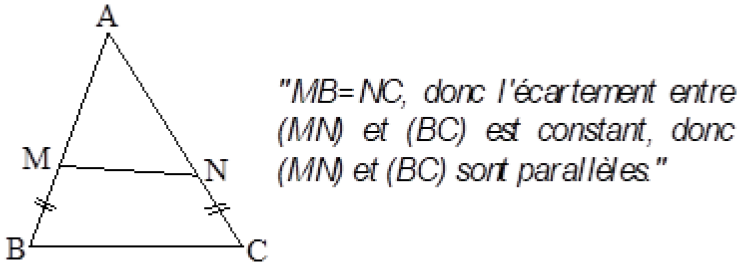


Figure 2 : raisonnement erroné d'élève

La caractérisation « deux droites perpendiculaires à une même troisième » repose sur la propriété de perpendicularité qui est étudiée dès le CE1. Elle fournit un procédé de tracé et un procédé de vérification. Elle est fréquente mais pas omniprésente dans les manuels de CM1 et de CM2 (vérification et construction) et systématique dans ceux de 6ème (vérification et construction).

La caractérisation « deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle, d'un carré, d'un parallélogramme, d'un trapèze ou d'un losange » repose sur les propriétés des quadrilatères usuels qui ont été étudiés au cycle 2. Elle fournit un procédé de tracé et un procédé de vérification, par exemple en utilisant les propriétés des diagonales. On ne la retrouve pas dans les manuels de cycle 3.

La caractérisation « deux droites ayant la même direction » ou « deux droites ayant même pente dans un réseau quadrillé » mobilise des notions qui ne sont pas travaillées avant ou en cycle 3.

La caractérisation « deux droites passant par les milieux de deux côtés d'un triangle », cas particulier du théorème de Thalès, semble également peu approprié en cycle 3.

Enfin, nous notons que dans les manuels de CM1, de CM2 et de 6ème, une justification de la validité des procédés employés n'est que très rarement entreprise auprès des élèves, ce qui peut occasionner chez eux des difficultés dans la compréhension du concept. De plus, cela ne s'inscrit pas dans la volonté sous-jacente des programmes de 2015 d'amener les élèves à passer d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée qui s'appuie sur l'explicitation de propriétés, pour aller vers une géométrie déductive. En effet, l'articulation école-collège qui réside désormais au cœur du cycle 3 est marquée par un changement de contrat vis-à-vis des moyens de preuve.

Un exemple en classe

Une anecdote de classe dans laquelle réside l'origine du questionnement de ce travail est présentée aux participants.

Une enseignante stagiaire exhibe avec ses élèves de CM2 les procédures par écartement constant et par double-perpendicularité. Un élève remarque qu'avec la double-perpendicularité, il a tracé deux angles droits et pris une mesure, alors qu'avec l'écartement constant, il a tracé deux angles droits et pris deux mesures. Dans son esprit, puisque ces deux constructions aboutissent au même résultat, c'est qu'on a fait une mesure pour rien dans la procédure par écartement constant !

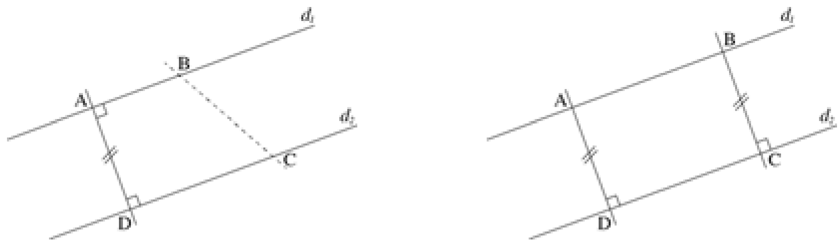


Figure 3 : tracés réalisés pour les deux procédures

Dans la procédure par double-perpendicularité, on débute le tracé d'un trapèze rectangle, alors que dans la procédure par écartement constant, on trace un rectangle. L'une des deux procédures est donc gestuellement plus économique que l'autre au sens d'Offre et al. (2006). Ce constat peut conduire les élèves à favoriser exclusivement la procédure la plus économique ou à supprimer l'une des étapes supposée inutile de la procédure la plus coûteuse. Ceci montre bien la nécessité d'expliciter les propriétés des figures en jeu dans les procédés enseignés, le lien entre ces propriétés et les instruments convoqués dans les tracés et le fait que les procédures étudiées aboutissent au même résultat mais ont des coûts différents.

Une proposition de séquence

La séquence qui est présentée aux participants et qu'on peut trouver en détail dans (Reydy, 2017) a été conçue pour répondre à différents critères :

1. elle peut être mise en place en CM1, en CM2 ou en 6ème avec différents degrés d'expertise et d'approfondissement : il s'agit de se doter de supports de travail communs pour créer des liens et des occasions d'échanges et de réflexions sur les pratiques entre enseignants du primaire et du secondaire ;
2. plusieurs procédés sont exhibés ;
3. ils s'appuient sur des propriétés connues des élèves qui en expliquent la validité ;

4. l’étude de plusieurs procédés est justifiée, lors d’un problème final, par le fait qu’on utilise l’un ou l’autre en fonction du contexte, des instruments, des contraintes, etc., même si l’un des procédés est plus économique qu’un autre.

Elle s’articule en quatre séances : dans la séance 1, la procédure par écartement constant est exhibée puis utilisée pour contrôler le parallélisme de deux droites, reproduire deux droites parallèles et construire deux droites parallèles distantes d’un écartement donné. Au cours de la séance 2, on fait émerger la procédure par double-perpendicularité lors de la résolution d’un problème dans lequel seule l’équerre est disponible et en s’appuyant sur des propriétés connues des figures usuelles. Pendant la séance 3, on étudie la procédure par les diagonales du parallélogramme que l’on exerce ensuite dans une série d’activités de vérification ou de construction de droites parallèles. Enfin lors de la séance 4, un problème de synthèse permettant de mobiliser ces trois procédures est proposé aux élèves. On illustre le fait que ce sont les contraintes matérielles de la situation qui conduiront à favoriser l’une ou l’autre de ces procédures.

Les quatre séances sont décrites aux participants.

Dans la séance 1, l’objectif est de faire émerger la procédure par écartement car elle est un corollaire de la conception initiale qu’ont les élèves du parallélisme de deux droites (*« deux droites qui ne se croisent jamais »*). On souhaite les conduire à une caractérisation plus opérationnelle, à savoir : *« deux droites parallèles sont deux droites qui ni ne se rapprochent, ni ne s’éloignent, elles gardent un écartement constant »*. Dans la première activité, on propose aux élèves de trier les droites parallèles parmi un lot de représentations graphiques de paires de droites affichées au tableau. Puisqu’elle est uniquement basée sur la discrimination visuelle, les paires de droites qui sont sécantes dans la feuille de papier ne devraient pas poser problème. En revanche, on peut supposer que celles qui ne sont pas parallèles mais qui se coupent en dehors de la feuille seront classées par plusieurs élèves dans la catégorie des droites parallèles. En effet, la représentation initiale *« deux droites parallèles sont deux droites que je ne vois pas se croiser »* est assez résistante. Lors de la mise en commun, le débat doit permettre d’éliminer ces cas de figures, quitte à prolonger les tracés des droites concernées pour faire apparaître leurs intersections. Dans la deuxième activité, on demande aux élèves de contrôler le parallélisme de deux droites à l’aide des instruments, puis dans la troisième de reproduire deux droites parallèles à l’aide des instruments. Des difficultés liées à l’utilisation correcte du double-décimètre et de l’équerre sont prévisibles. Il est nécessaire de proposer des rappels à ce sujet et un étayage de l’enseignant pour les élèves les plus en difficulté est le bienvenu. Le procédé qui permet de déterminer la distance entre un point et une droite, même s’il a fait l’objet d’une séquence antérieure, doit aussi être revu collectivement.

Dans la séance 2, c’est la procédure par double-perpendicularité qui est étudiée. Sa validité peut être comprise par les élèves grâce à leurs connaissances antérieures sur les quadrilatères. On demande quel quadrilatère connu apparaît dans la figure de la séance précédente restée au tableau (un rectangle). On liste alors les quadrilatères connus possédant deux côtés opposés parallèles et on isole ceux qui peuvent être tracés avec l’équerre seule : le rectangle et le trapèze rectangle. Les élèves doivent alors tracer une droite parallèle à une droite d déjà tracée et passant par un point A déjà placé en n’utilisant que l’équerre. Le problème consiste donc à déterminer comment, connaissant un côté et un sommet du côté opposé, finir de tracer le rectangle ou le trapèze rectangle avec l’équerre seule. Lors de la mise en commun, le procédé de tracé est exhibé. C’est le tracé du trapèze rectangle qui est mis en avant car il est plus économique pour réaliser la tâche. L’affiche commencée lors de la séance 1 est complétée par ce nouveau procédé. Puis individuellement, les élèves s'entraînent à utiliser ce nouveau procédé pour vérifier le parallélisme de deux droites et tracer deux droites parallèles ayant un écartement donné.

Dans la séance 3, on propose la procédure par les diagonales du parallélogramme. Il y a deux alternatives de mise en œuvre pour utiliser cette procédure, l'une n'utilisant que le double-décimètre et l'autre prenant appui sur l'utilisation d'une « machine à diagonales » dont le principe a été emprunté à J.-F. Grelier (2001, pp. 51-54) : elle est constituée de deux bandelettes de bristol assemblées en leur milieu par une attache parisienne. Les extrémités de ces deux bandelettes sont des « pointes » permettre de tracer quatre points qui correspondent aux sommets d'un parallélogramme. Ici, l'élève obtient un quadrilatère en plaçant ses sommets, procédé peu habituel à l'école primaire où l'on construit en général les figures en traçant leurs côtés. Or plusieurs auteurs (Duval & Godin, 2005 ; Barrier et *al.*, 2014) ont souligné le fait que si, au cycle 1 et pendant une partie du cycle 2, les élèves perçoivent spontanément les figures rencontrées dans les problèmes géométriques comme des surfaces juxtaposées ou superposées, il est nécessaire de faire évoluer le regard qu'ils portent sur ces figures car les tâches rencontrées aux cycles 3 et 4 nécessitent essentiellement de repérer des relations entre des lignes et/ou des points. C'est ce que Duval et Godin (2005) nomment la déconstruction dimensionnelle. Dans une première phase de la séance, les élèves reçoivent une fiche sur laquelle sont représentés les 6 types de quadrilatères usuels dont deux côtés peuvent porter deux droites parallèles identifiés dans la séance 2. Ils doivent tracer les diagonales de chaque quadrilatère et pour chacun, préciser si ses diagonales ont des propriétés particulières. Puis à l'issue d'une mise en commun, le troisième procédé est exhibé : pour tracer deux droites parallèles, on trace un parallélogramme par l'intermédiaire de ses diagonales, soit à l'aide de la « machine », soit avec le double décimètre. Dans une dernière phase, les élèves doivent déterminer à l'aide du nouveau procédé si des couples de droites sont parallèles et doivent tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Enfin, la séance 4 propose un problème de synthèse permettant de confronter les trois procédures exhibées lors des séances précédentes. Elle vise à montrer que ce sont les contraintes matérielles de la situation (les instruments à disposition dans le cas qui nous intéresse) qui guideront le choix du procédé à employer. L'affiche récapitulant les trois procédés est exposée au tableau et le problème suivant est posé aux élèves : chaque équipe reçoit une feuille sur laquelle sont tracées trois paires de droites. Il faut déterminer pour chaque paire si les deux droites sont parallèles ou non, mais les équipes ne disposent pas du même matériel : les équipes A n'ont le droit de n'utiliser que l'équerre, les équipes B peuvent utiliser l'équerre et le double décimètre, les équipes C ne peuvent utiliser que le double-décimètre (ou que la « machine à diagonales »). Bien entendu, l'équerre ne doit servir qu'à tracer des angles droits ou à vérifier que des angles droits et le double-décimètre sert seulement à tracer des traits ou à mesurer des longueurs. Lors de la mise en commun, le débat doit permettre de faire le lien avec les trois procédés exhibés lors des séances précédentes et avec les propriétés des figures et instruments géométriques. Les équipes A ne peuvent utiliser que la procédure par double-perpendicularité, les équipes C que la procédure par les diagonales du parallélogramme. Les équipes B peuvent utiliser n'importe laquelle des trois procédures étudiées (ou bien les procédures par écartement constant et double-perpendicularité dans le cas où la « machine à diagonales » a été utilisée pour toute la séance 3).

À la suite de la description de la séquence aux participants, plusieurs extraits vidéo filmés dans les classes de trois enseignantes de CM1, de CM2 et de 6ème dans lesquelles la séquence a été expérimentée sont visionnés et commentés. Ils permettent de faire émerger différents points. En particulier, on note un usage persistant du double-décimètre comme d'un macro-instrument (Offre et al., 2006) du CM1 à la 6ème. Des différences dans les modalités de travail utilisée en primaire et au collège sont repérées et discutées. Enfin, les échanges entre les participants portent sur les difficultés chez les élèves à formuler leur raisonnement en utilisant des tournures et un vocabulaire corrects et appropriés.

Un autre exemple de problème de synthèse

Les activités de restauration de figure (Duval et Godin 2005, Barrier et al. 2014, etc.) avec un barème attribué aux instruments à disposition me semblent constituer une source intéressante de problèmes permettant de justifier l'apprentissage de plusieurs procédés de tracés pour une même notion. C'est pourquoi pour conclure l'atelier, je propose aux participants un autre exemple de problème de synthèse que celui qui figure dans la séquence.

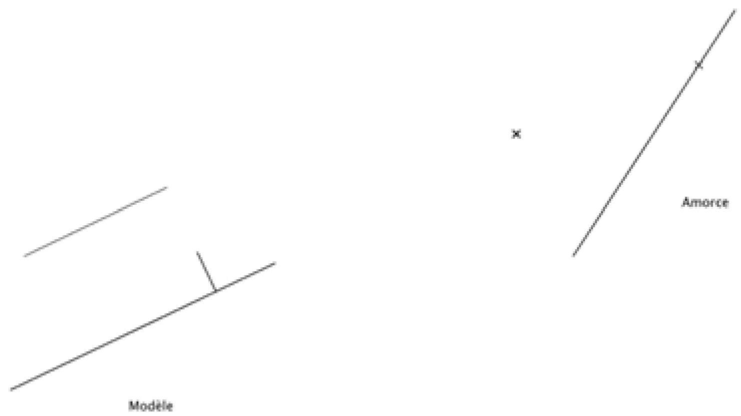


Figure 4 : modèle et amorce

Le problème peut être posé de la façon suivante à des élèves de cycle 3 : on leur distribue la figure-modèle et la figure-amorce de la figure 4 (les deux figures sont imprimées sur une même feuille, de manière à ce que l'amorce et le modèle n'ont pas la même orientation), accompagnées de l'un des trois tableaux ci-dessous (tableau 1, tableau 2 ou tableau 3). On donne la consigne suivante : « *Il faut restaurer le modèle à partir de l'amorce, c'est-à-dire compléter la figure-amorce pour qu'elle soit superposable à la figure-modèle. Pour cela, on peut utiliser les instruments qui sont cités dans le tableau des barèmes. Chaque tracé effectué sur l'amorce avec un des instruments coûte le montant indiqué dans le tableau. Toute information prise sur le modèle à l'aide des instruments cités dans le tableau est gratuite. On cherche la procédure qui sera la moins chère possible.* ». On précise aux élèves qu'un tracé correspond à un trait au crayon, aussi petit soit-il.

Lors de l'atelier, trois tableaux de barèmes différents sont distribués aux participants, chacun permettant de valoriser l'une ou l'autre des procédures.

Instrument	Coût
Équerre	1 € par trait
Règle graduée	5 € par trait
Compas	3 € par trait
Règle non-graduée	2 € par trait
Gomme	0 €

Tableau 1 : barème 1

Avec ce barème, la procédure par écartement constant coûte 9 €, celle par double-perpendicularité coûte 5 €, celle par les diagonales du rectangle 17 € et celle au compas et à la règle non-graduée coûte 13 €. C'est la procédure par double-perpendicularité qui est valorisée.

Instrument	Coût
Équerre	6 € par trait
Règle graduée	3 € par trait
Compas	5 € par trait
Règle non-graduée	2 € par trait
Gomme	0 €

Tableau 2 : barème 2

Avec ce barème, la procédure par écartement constant coûte 14 €, celle par double-perpendicularité coûte 15 €, celle par les diagonales du rectangle 17 € et celle au compas et à la règle non-graduée coûte 19 €. C'est la procédure par écartement constant qui est valorisée.

Instrument	Coût
Équerre	6 € par trait
Règle graduée	2 € par trait
Compas	3 € par trait
Règle non-graduée	1 € par trait
Gomme	0 €

Tableau 3 : barème 3

Avec ce barème, la procédure par écartement constant coûte 11 €, celle par double-perpendicularité coûte 14 €, celle par les diagonales du rectangle 10 € et celle au compas et à la règle non-graduée coûte 11 €. C'est la procédure par les diagonales du rectangle qui est valorisée.

Ce même problème peut également être proposé *via* un logiciel de géométrie dynamique. Voici un exemple dans l'environnement GeoGebra. Seuls quelques outils sont disponibles (Déplacer, Point, Intersection, Milieu ou centre, Droite, Segment, Perpendiculaire, Compas, Effacer) dans le fichier qui est proposé aux élèves.

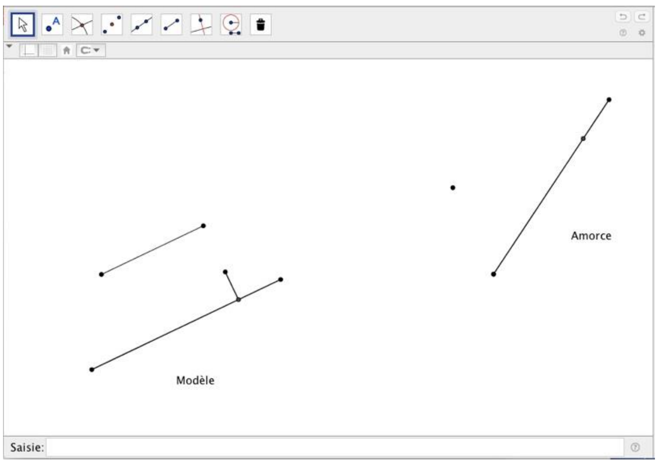


Figure 5 : le problème dans GeoGebra

Les tableaux de barèmes associés attribuent un coût à chaque outil disponible dans le fichier. Voici un exemple de trois barèmes qui permettent tour à tour de mettre en valeur la procédure par double-perpendicularité, celle par écartement constant et celle par les diagonales du rectangle.

Outil	Barème 1	Barème 2	Barème 3
Déplacer	0 €	0 €	0 €
Point	0 €	0 €	0 €
Intersection	0 €	0 €	0 €
Milieu ou centre	5 €	5 €	1 €
Droite	2 €	2 €	1 €
Segment	2 €	2 €	1 €
Perpendiculaire	1 €	4 €	5 €
Compas	3 €	3 €	3 €
Effacer	0 €	0 €	0 €

Tableau 4 : les trois barèmes dans GeoGebra

En particulier, l'univers LGD empêche les usages détournés des instruments dont nous avons constaté la persistance tout au long du cycle 3.

Conclusion

Les programmes pour l'école primaire préconisent d'enseigner au cycle 3 *« une géométrie où [les objets et leurs propriétés] sont contrôlés par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés »* pour aller ensuite vers *« une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. »* (MEN, 2015, p. 210). Afin d'aider les élèves à passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure, ils encouragent également les enseignants à faire appréhender de plusieurs façons un même objet ou une même propriété géométrique. Dans le travail présenté lors de cet atelier, j'ai tenté d'apporter des éclairages mathématiques et didactiques et de proposer une séquence qui répond à ces injonctions dans le cas du parallélisme : on y aborde trois caractérisations de la notion de parallélisme en proposant une justification de chacun des procédés exhibés qui s'appuie sur des propriétés déjà connues des élèves. Enfin, dans une ultime séance de résolution de problème, les élèves peuvent comprendre l'intérêt d'apprendre trois procédés différents au lieu de se contenter du plus économique.

Les expérimentations que j'ai menées à l'occasion de cette étude dans des classes de CM1, de CM2 et de 6ème et les échanges qui ont eu lieu lors de cet atelier ont révélé des différences notoires dans la manière dont la géométrie est enseignée à l'école primaire et au collège. En particulier pour le cas du parallélisme qui nous intéresse ici, on remarque que le procédé systématiquement enseigné en primaire est celui par écartement constant alors qu'il est placé en second plan, voire disparait du paysage à l'entrée en 6ème pour laisser la place au procédé par double-perpendicularité qui est introduit comme une propriété admise dont découlent des procédés de tracé et de vérification. Alors que seulement deux mois se sont écoulés entre la fin de l'année de la scolarité en primaire et l'entrée en 6ème, le nouveau collégien est confronté sans ménagement à un discours qui peut lui sembler radicalement différent. À mon sens, ce constat ne fait que renforcer la nécessité de proposer des formations et des espaces de dialogue communs aux enseignants de CM1, de CM2 et de 6ème en vue d'une harmonisation des pratiques.

Références

Barrier, T., Hache, C., Mathé, A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, 93, 13-37.

Charnay, R. (1997-1998). De l'école au collège : les élèves et les mathématiques, *Grand N*, 62, 35-46.

Duval, R., Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

GRELIER, J.-F. (2001). *Apprentissages géométriques aux cycles II et III*. CRDP Midi-Pyrénées.

MEN (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).* B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015, 1-40.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7-34.

Reydy C. (2017) *Trois appréhensions du parallélisme : un exemple de séquence pour le cycle 3.* Grand N, 99, 25-50.

At 45 : Quels apports de la programmation pour la reproduction d'une figure géométrique ?

Christophe Billy[1], Richard Cabassut[2], Edith Petitfour[3] Frédérick Tempier[4]

[1]ESPE de Toulouse Midi-Pyrénées, COPIRELEM; christophe.billy@univ-tlse2.fr

[2]Université de Strasbourg, LISEC EA 2310, COPIRELEM; richard.cabassut@unistra.fr

[3]ESPE de Rouen Normandie, Laboratoire de Didactique André Revuz, COPIRELEM ; edith.petitfour@univ-rouen.fr

[4] LDAR, Université de Cergy-Pontoise, ESPE de Versailles, COPIRELEM ; frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé : Les nouveaux programmes du cycle 3 (MEN 2015) associent l'enseignement de la géométrie à une initiation à la programmation. Tout comme la géométrie dynamique a apporté un point de vue nouveau sur la géométrie (Assude et Gelis, 2002), qu'en est-il de la programmation ? En nous appuyant sur des travaux de didactique de la géométrie (Perrin-Glorian & Godin, 2014, Petitfour 2015), nous interrogeons les apports et les limites de cette approche de la géométrie à travers la programmation par la comparaison de la mise en œuvre d'une tâche de reproduction d'une figure géométrique dans différents environnements.

Mots clefs : géométrie ; programmation ; scratch ; reproduction

Introduction

Les programmes de 2015 (MEN, 2015) ont introduit l'algorithmique et la programmation à travers des activités de repérage dans l'espace au cycle 2 et de repérage dans l'espace et géométrie au cycle 3. Les activités de programmation apparaissent comme un support à la construction d'apprentissages dans ces domaines (espace et géométrie) :

> *« Des activités géométriques peuvent être l'occasion d'amener les élèves à utiliser différents supports de travail : papier et crayon, mais aussi logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation ou logiciels de visualisation de cartes, de plans »* (MEN, 2015, cycle 3 p.198).

Les connaissances spatiales et géométriques concernées sont les suivantes : « **(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations** […] avec de nouvelles ressources comme […] des logiciels d'initiation à la programmation » (MEN, 2015, p.211) et « **Reconnaître et utiliser quelques connaissances géométriques[1]** [...] Exemples de matériels : papier/crayon, logiciels de géométrie dynamique, d'initiation à la programmation » (MEN, 2015, p.212). Il existe également un document d'accompagnement "initiation à la programmation" avec notamment une annexe proposant des exemples de construction de figures avec le logiciel de programmation Scratch.

Les activités spatiales et géométriques apparaissent réciproquement comme des points d'appui pour permettre une initiation à la programmation :

[1] La police en gras est le fait des auteurs.

> *« Une initiation à la programmation est faite à l'occasion notamment d'activités de repérage ou de déplacement (programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran), ou d'activités géométriques (construction de figures simples ou de figures composées de figures simples) »* (MEN, 2015, p.214).

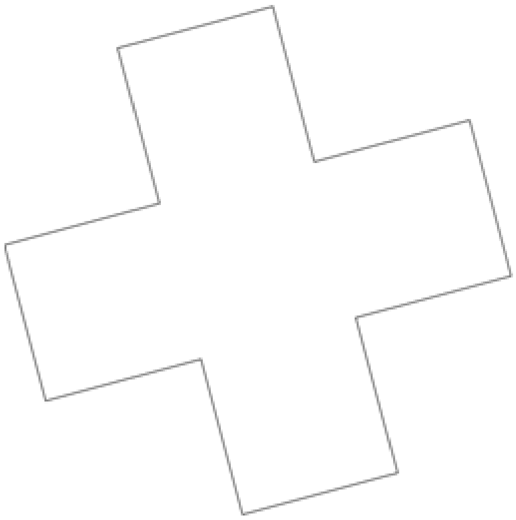
En partant de ces préconisations des programmes, le but de cet atelier est de questionner les apports et limites de l'utilisation de la programmation pour développer ou réinvestir effectivement des connaissances géométriques, dans le cas d'une activité de reproduction de figure géométrique. En effet, alors que la géométrie dynamique a apporté un point de vue nouveau sur la géométrie (Assude et Gelis, 2002), qu'en est-il de la programmation ?

Pour cela nous avons proposé aux participants de réaliser une même tâche de reproduction dans différents environnements (logiciel de programmation, logiciel de géométrie dynamique). Pour l'analyse des connaissances et compétences en jeu, nous nous appuierons sur les travaux récents en didactique de la géométrie (Perrin-Glorian et Godin, 2014 ; Petitfour, 2015) permettant de rendre compte de connaissances géométriques et compétences visuo-spatiales en jeu dans la reproduction de figures.

Nous avons choisi d'utiliser **Scratch** comme logiciel de programmation (préconisé par les programmes) et **GeoGebra** comme logiciel de géométrie dynamique. Nous avons écarté les « robots » (Probot, Thymio, …) suite à des difficultés techniques d'utilisation pour obtenir des tracés suffisamment précis, ce qui nous amène à penser que leur utilisation dans l'enseignement (tracés géométriques) n'est pas tout à fait adaptée à l'école primaire pour le moment.

Reproduction d'une figure géométrique

La figure géométrique que nous avons choisie est la suivante.



Il s'agit d'une figure pouvant être considérée comme complexe car composée de figures simples (carrés ou rectangles ou les deux). Cette figure possède certaines régularités (motifs isométriques par translation, rotation ou symétrie). Sa reproduction peut donc amener à utiliser certaines caractéristiques des logiciels choisis : des boucles dans le logiciel de programmation Scratch et des juxtapositions de carrés dans le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. L'environnement papier-ciseaux permet d'exploiter la symétrie de la figure grâce au pliage.

Lors de l'atelier, les participants ont d'abord été invités à reproduire cette figure dans l'environnement Scratch ainsi que dans un deuxième environnement parmi le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra ou l'environnement papier-ciseaux. Nous avons ensuite organisé une mise en commun des productions. Voici des exemples de constructions réalisées dans l'atelier suivies de commentaires sur leur réalisation et d'exemples de réalisations obtenues dans d'autres contextes (en classe ou en formation).

Reproductions avec Scratch

Reproduction 1 avec scratch

Production classique que l'on retrouve dans 4 groupes. Un motif a été reconnu (dans le script ci-dessus mais d'autres ont choisi) et reproduit quatre fois.

À ce stade, les problèmes suivants ont été soulevés :

- la procédure d'initialisation[2] n'est pas évidente car dépendante de l'orientation initiale du lutin qu'il faut identifier.
- la taille de la figure obtenue peut être trop petite (par exemple lorsque l'on conserve la valeur choisie par défaut pour le bloc « avancer de »). La figure sera alors en partie cachée par le lutin. Certains groupes choisissent 100 au lieu de 20 dans l'instruction "avancer de", d'autres déplacent le lutin à la fin du script et d'autres enfin changent le lutin choisi par défaut (le chat) en le remplaçant par la flèche (↓) pour visualiser également l'information sur l'orientation du lutin.
- la taille de la scène[3] est imposée et oblige à estimer un ordre de grandeur du pas à inscrire dans l'instruction "avancer de" si l'on souhaite que la figure soit entièrement visible[4].
- si la place prise par la figure sur la scène n'a pas été anticipée, le lutin peut "sortir de la scène" (il disparaît) et se pose alors le problème de le faire revenir. La seule solution trouvée dans l'atelier a été d'utiliser l'instruction "aller à x : 0 y : 0". La question s'est posée de savoir

[2] Au lancement du logiciel, le lutin est positionné par défaut sur la scène³ et possède une orientation. Les premières instructions de déplacement devront prendre en compte ces données. Certains groupes choisiront leurs propres valeurs pour ces deux paramètres.

[3] Dans Scratch, la « scène » est l'espace de l'écran permettant de visualiser les objets créés. Il s'agit d'un rectangle de 480 pixels par 360 pixels. Elle est munie d'un repère dont l'origine est le centre de ce rectangle.

[4] Tout comme dans l'environnement papier-crayon pour prévoir si la figure sera réalisable sur la feuille proposée, il faut ici anticiper sur les dimensions des côtés.

si cette situation ne pouvait pas être retenue pour donner du sens au repérage dans le plan et à l'utilisation d'un système de coordonnées de points.

- l'unité de longueur est implicite ("avancer de 100") : il s'agit du pixel (unité graphique particulière).

Une fois cette première réalisation effectuée, plusieurs groupes ont cherché à rendre leur programme plus « efficace » (moins d’instructions). Les animateurs ont également proposé de produire un script permettant d'obtenir la croix en utilisant le moins de fois possible (voire une seule fois) l'instruction "avancer".

Reproduction 2 avec scratch

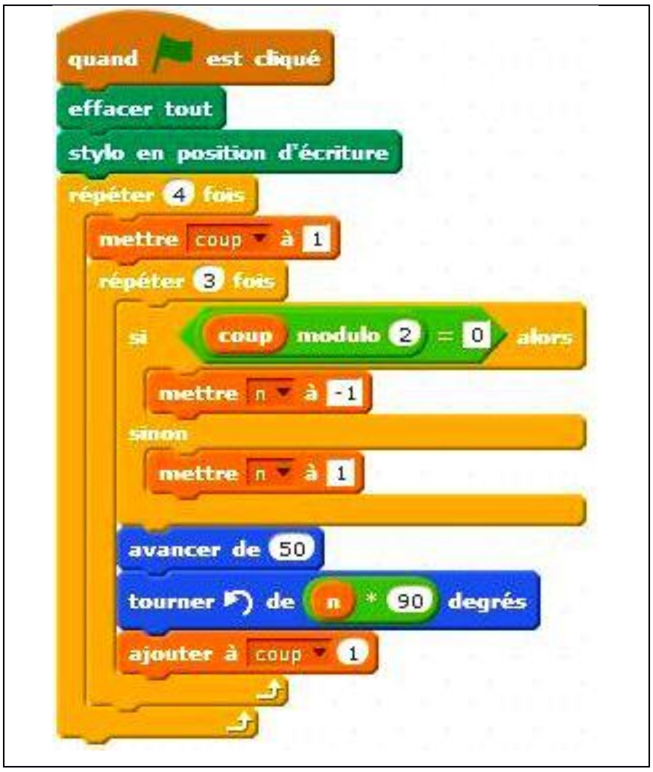
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>


</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Dans ces trois productions les groupes ont cherché à minimiser le nombre d'actions "avancer" et "tracer" en utilisant l'action "répéter" sur des motifs repérés sur la figure.</td>
</tr>
</table>

La production suivante a été réalisée par un groupe :



Dans ce dernier cas, il est intéressant de noter que la contrainte forte "n'utiliser qu'une seule fois l'instruction avancer " engage à mobiliser des connaissances mathématiques hors de portée des élèves de l'école ou du collège.

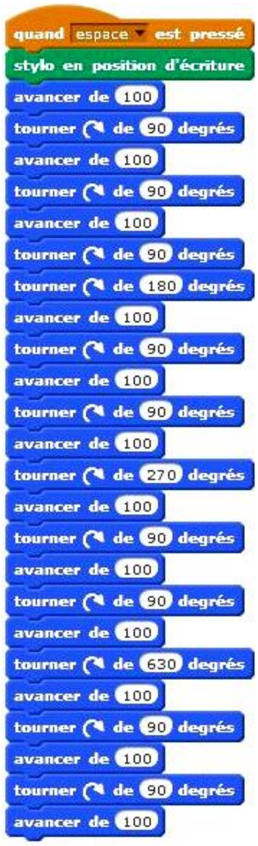
Dans cet environnement, comme dans les autres, les contraintes posées sur les outils disponibles (leur nature, le nombre d'utilisations possible, etc.) sont des variables didactiques de la situation de reproduction. Un groupe a proposé de donner un coût aux instructions plutôt que d'en limiter le nombre, le but étant de trouver une suite d'instructions permettant d'obtenir la figure au moindre coût.

Tous les groupes ont utilisé au moins une boucle ce qui traduit effectivement la reconnaissance d'un motif que l'on souhaite répéter. C'est ici un point important de l'algorithmique et de la programmation, terrain d'expression des mathématiques comme "science des modèles" (Kahane, 1995-1996). Modestement sur cette tâche, chacun a cherché à reconnaître un motif pour tirer parti de l'environnement Scratch permettant de réaliser à moindre coût la répétition dudit motif. Une analyse moins poussée aurait conduit à réaliser les tracés de segment un à un, les uns après les autres (en exprimant l'idée d'un déplacement pas à pas) comme nous avons pu l'observer dans des classes à qui nous avions proposé la même tâche de reproduction :

— le script n°1 a été obtenu dans une classe de Cm1-Cm2. On notera une utilisation erratique des mesures d'angle.

— le script n°2[5] a été obtenu en classe de quatrième et permet d'obtenir la figure comme superposition de deux rectangles.

[5] Pour des raisons de mise en page le script n°2 a été scindé en deux colonnes.



Script n°1

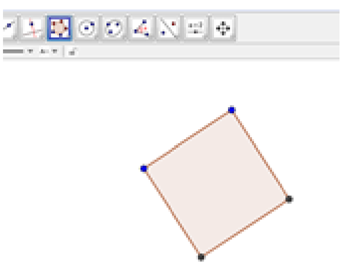
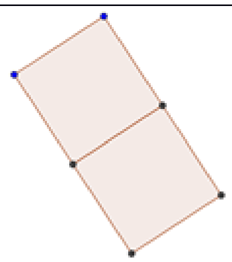
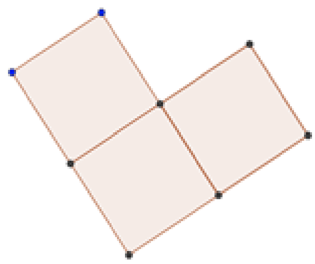
Script n°2

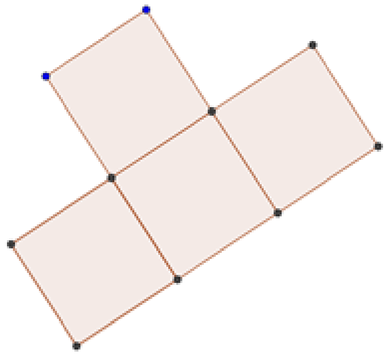
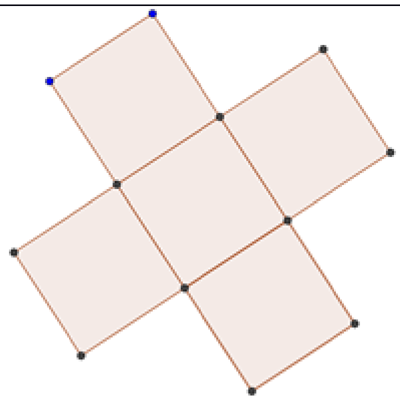
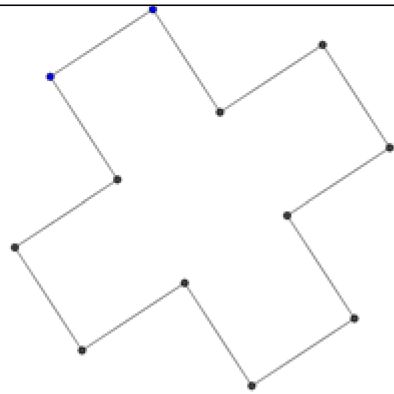
Reproductions avec GeoGebra

Reproduction 1 avec GeoGebra

Dans cette première construction (voir ci-après), le groupe a utilisé la fonction « polygone régulier à 4 côtés ». Cette fonction permet d'afficher à l'écran des carrés colorés, ce qui conduit à les appréhender comme des surfaces et la figure construite (la croix) comme un assemblage de ces surfaces juxtaposées.

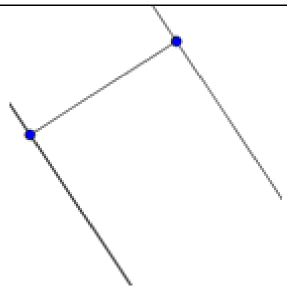
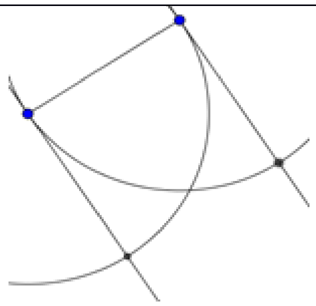
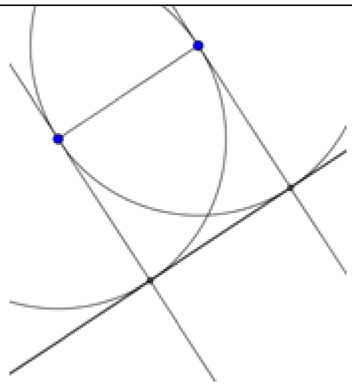
Une variante de cette construction est apparue : un groupe a utilisé les mêmes étapes de construction mais en utilisant la symétrie axiale d'axe la droite support d'un des côtés du carré, ce qui met en jeu cette connaissance géométrique supplémentaire.

1. Tracé d'un carré comme polygone régulier à 4 côtés.	2. Tracé d'un deuxième carré juxtaposé au premier en utilisant deux sommets du premier carré	3. Tracé d'un troisième carré par la même méthode
		
4. Tracé d'un quatrième carré par	5. Tracé d'un cinquième carré par	6. Tracé de segments formant les côtés de la figure et

la même méthode	la même méthode	effacement des 5 carrés intérieurs.
		

Reproduction 2 avec GeoGebra.

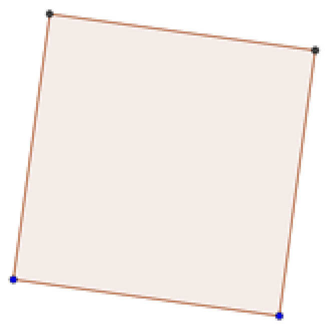
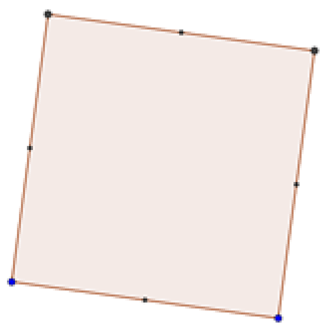
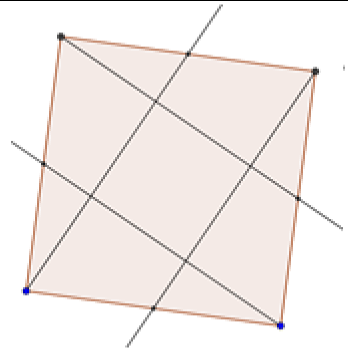
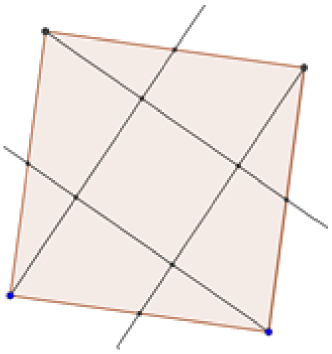
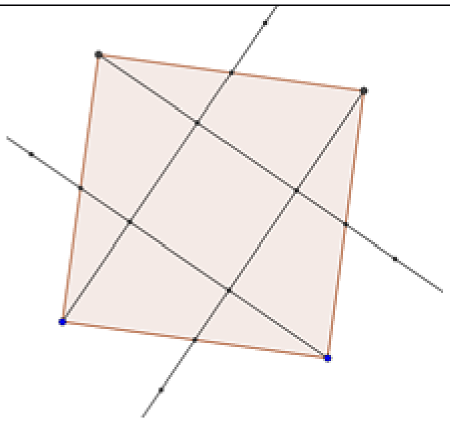
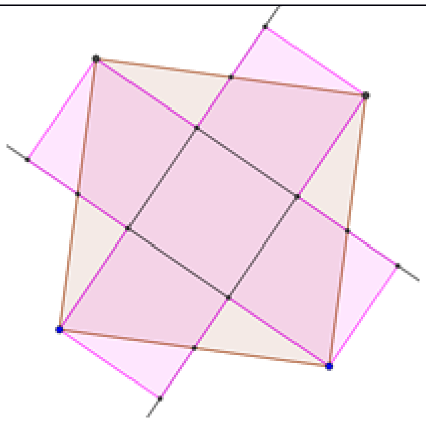
Un groupe a réalisé la construction côté par côté en utilisant la fonction « droite perpendiculaire » pour obtenir des angles droits et la fonction « cercle » pour les reports de longueurs. Cette réalisation s'appuie sur des relations entre les segments qui constituent le contour de la figure.

1. Tracé d'un segment et ses extrémités	2. Tracés de droites perpendiculaires	3. Tracés de cercles pour reporter la longueur du segment et création de points d'intersection	4. Tracé d'une droite passant par les deux points obtenus	Etc.
				…

Reproduction 3 avec GeoGebra

Le travail de ce groupe suit une analyse très fine des sous-figures et sur-figures liées à la figure initiale. La familiarité avec des figures du même type utilisées dans les sujets de concours l'a orienté vers cette production. Il est à noter que sans recours à des tracés sur un brouillon, l'analyse ci-dessous aurait été beaucoup plus compliquée.

1. Tracé d'un carré comme polygone régulier à 4 côtés	2. Placement des milieux des côtés de ce carré.	3. Tracé de demi-droites d'origine un sommet du carré et le milieu d'un côté opposé

		
4. Création des points d'intersection obtenus entre les demi-droites	5. Tracés des symétriques de ces points par rapport aux milieux des côtés du carré	6. Construction du polygone en joignant les points de la figure obtenus aux étapes précédentes.
		

Les participants des différents groupes sont assez familiers avec l'utilisation de GeoGebra, ainsi peu de problèmes ont été signalés pour la prise en main. De manière implicite, la résistance au déplacement a été prise en compte pour la reproduction de la figure.

Outils d'analyse d'une tâche de reproduction de figures

Nous présentons maintenant quelques outils d'analyse permettant de rendre compte des connaissances et compétences en jeu dans une tâche de reproduction de figures, en appui sur des travaux de recherche concernant les différentes visions sur les figures (Perrin-Glorian et Godin, 2014) et l'action instrumentée (Petitfour, 2015). Nous utiliserons ces outils dans la partie suivante pour réaliser une analyse comparée de la tâche de reproduction de la croix dans les trois environnements étudiés.

Une tâche de reproduction de figures nécessite un enchaînement d'*actions instrumentées*. Nous appelons de telles actions celles d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise corporellement des objets techniques, soit pour analyser des relations géométriques représentées graphiquement, soit pour produire des objets graphiques représentant des objets géométriques. Par exemple, la vérification d'un alignement de deux segments avec la règle (analyse d'une relation géométrique) et le tracé d'une droite avec la règle (production d'un trait droit représentant la droite) sont des actions instrumentées. Les *objets techniques*, dépendant de l'environnement de travail, sont par exemple :

- la règle, l'équerre, le compas dans l'environnement papier-crayon,
- les outils « cercle (centre-point) », « droite perpendiculaire » dans l'environnement technologique du logiciel GeoGebra,

- « avancer de 10 pas », « répéter 10 fois » dans l'environnement technologique de Scratch,
- la paire de ciseaux dans l'environnement papier-ciseaux.

Les *objets graphiques* – traces du crayon sur une feuille de papier dans l'environnement papier-crayon, traces sur un écran dans un environnement technologique, plis et traits de découpe dans l'environnement papier-ciseaux – ont des caractéristiques spatiales qui rendent compte de propriétés géométriques de la figure.

Nous distinguons les trois visions suivantes des figures (Perrin-Glorian et Godin, 2014) que nous illustrons avec la figure étudiée dans l'atelier :

- Dans une vision « surfaces », on peut voir une surface (par exemple la croix de la figure 1), des surfaces juxtaposées, comme les cinq carrés de la figure 2 ou le rectangle et les deux carrés de la figure 3. On peut voir aussi des surfaces qui se chevauchent, par exemple la croix et un carré sur la figure 2 et les deux rectangles sur la figure 3. On peut également voir des lignes mais seulement en tant que bords de surface. On peut voir par exemple le contour de la croix (figure 4).

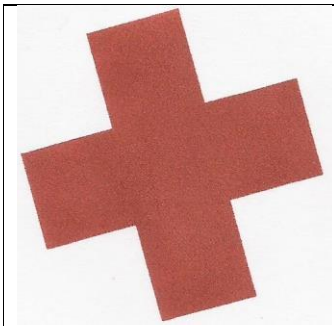


Figure 1

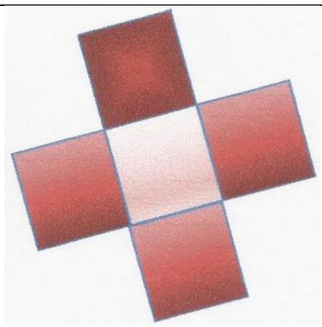


Figure 2

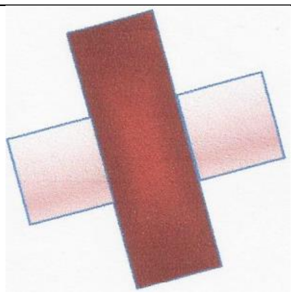


Figure 3

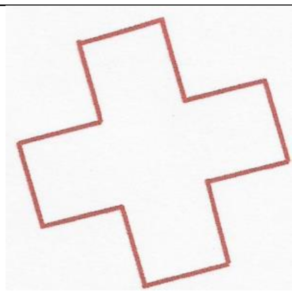


Figure 4

- Dans une vision « lignes », on peut voir la figure comme constituée de lignes pouvant se tracer à la règle et au compas (figure 5). Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de droites supports des côtés.
- Dans une vision « points », on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes (figure 6).

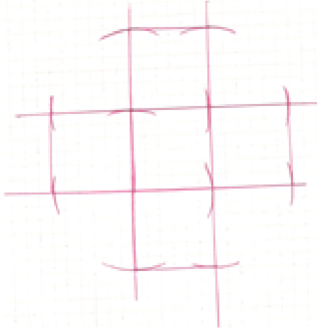


Figure 5

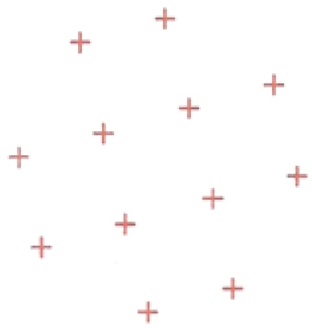
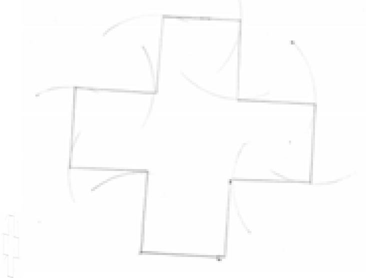
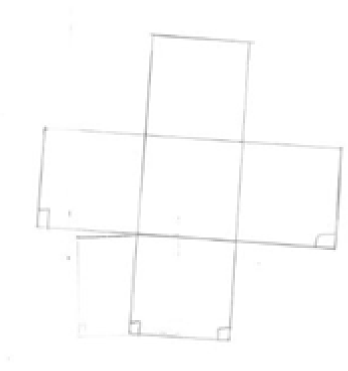


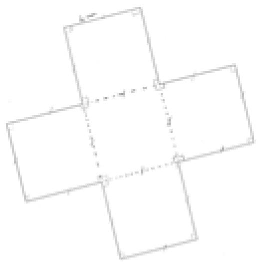
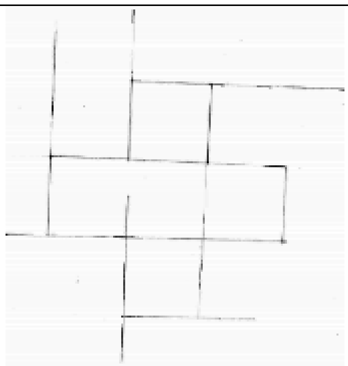
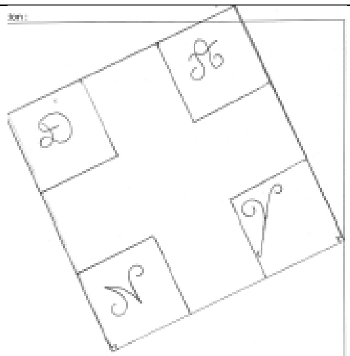
Figure 6

Les actions instrumentées mettent en jeu différents types de compétences (organisationnelles, manipulatoires, visuo-spatiales) et de connaissances (techniques, graphiques, géométriques). Nous nous intéressons ici aux connaissances géométriques et aux compétences visuo-spatiales :

- Les *connaissances géométriques* sont relatives à la définition des objets géométriques et aux relations qui peuvent exister entre eux comme l'appartenance, la perpendicularité, l'alignement, ...
- Les *compétences visuo-spatiales* concernent la capacité à réaliser une analyse visuelle pour prélever et interpréter des informations spatiales (repérage d'objets graphiques, repérage de relations spatiales entre ces objets). Elles concernent également la capacité à réaliser une déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005), à passer d'une vision « surfaces » à une vision « lignes » et « points ».

Nous illustrons la mise en jeu de ces connaissances et compétences dans une analyse de productions d'élèves de cycle 3, qui avaient la tâche de reproduire la croix dans l'environnement papier.

Productions des élèves	**Compétences visuo-spatiales sous-jacentes à la construction**	**Connaissances géométriques sous-jacentes à la construction**
 « J'ai utilisé le compas pour tracer les arcs de cercle et l'équerre pour relier les traits, le crayon à papier pour tracer les traits. »	Vision « surfaces » : tracé du contour segment par segment Repérage d'égalités de longueur des côtés du polygone Alignements de côtés et angles droits non repérés (direction des côtés prise « au jugé »)	Les points d'un arc de cercle sont équidistants de son centre. Egalité de longueurs
 « Cette figure est une croix qui se compose de deux rectangles. »	Vision « surfaces » : chevauchement de deux rectangles Repérage de la relation entre les deux rectangles	Propriétés du rectangle « Un quadrilatère ayant deux côtés de même longueur, chacun perpendiculaire à un troisième côté, est un rectangle. » Angle droit

 « La figure est composée de 5 carrés de 4 cm. »	Vision « surfaces » : juxtaposition de cinq carrés Repérage de l'organisation spatiale des carrés	Propriétés du carré « Un quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits est un carré. » Angle droit, égalité de longueur
	Vision « lignes » Repérage de demi-droites supports des côtés Repérage d'alignement de côtés, de la relation de perpendicularité	Report de longueur sur une demi-droite à partir d'un point Angle droit, égalité de longueur
	Vision « lignes » et « points » Construction d'une sur-figure par prolongement de côtés Repérage d'égalités de longueur, d'alignements et d'angles droits	Alignement, égalité de longueur, angle droit, point d'intersection

Analyse comparée des reproductions dans les deux environnements

Les participants à l'atelier ont fait une analyse comparative des compétences visuo-spatiales et connaissances géométriques mobilisées dans les procédures exposées en partie I en fonction de chaque environnement. Nous proposons ici un tableau de synthèse des analyses produites.

	Compétences visuo-spatiales	**Connaissances géométriques**
Logiciel de programmation	La vision « surfaces » avec la ligne vue comme le contour d'une surface est principalement mobilisée, soit dans sa globalité ("identifier que tous les côtés de la croix ont la même longueur"), soit en repérant "quatre fois un même parcours". Cette appréhension spatiale de la figure est associée à un point de vue « dynamique » avec les idées de déplacement, de chemin à parcourir provoquées par la nature des blocs disponibles comme "avancer de" qui permet, le stylo étant en position d'écriture,	L'égalité des longueurs, les angles droits et leur mesure sont identifiés comme connaissances géométriques mobilisées dans la tâche de reproduction. La capacité à "décomposer une figure complexe en figures élémentaires" est à mettre en relation avec la recherche d'économie dans l'écriture du programme.

	de tracer un segment. La réalisation de la tâche dans cet environnement nécessite également de "se mettre à la place du lutin (décentration et orientation) et de passer de l'espace au plan comme si on dessinait sur le sol de la cour." La scène étant de taille donnée fixe sans possibilité de zoom, la croix est à reproduire dans un espace contraint qui engage à estimer la taille possible des segments.	
Logiciel de géométrie dynamique	Les visions "lignes" et "points" sont en jeu dans les constructions utilisant les droites et cercles alors que la vision "surfaces " est en jeu dans celles utilisant un assemblage de cinq carrés. Cette dernière peut être induite dans cet environnement par la possibilité d'utiliser dans le menu l'outil "polygone régulier" qui permet de tracer à moindre coût un carré puis de compléter la figure avec quatre carrés.	Les multiples procédés de construction envisageables dans cet environnement conditionnent les connaissances mises en jeu : cercles (distances égales), symétrie centrale et axiale (conservation des distances, image du carré), propriétés du carré.

Discussion et conclusion

Que peut-on retenir comme apports et limites de cette approche de la géométrie à travers la programmation que nous avons illustrée par la mise en œuvre d'une tâche de reproduction d'une figure géométrique dans différents environnements ?

Remarquons dans un premier temps que la connaissance nouvelle (ici celle se rapportant à la programmation en environnement Scratch) peut être un obstacle à la mobilisation des autres connaissances (ici les connaissances géométriques). Nous avons vu précédemment qu'un manque de connaissances de l'environnement Scratch sur les tailles de la croix, du lutin, de la scène, du placement du lutin sur la scène ou de l'orientation du lutin peuvent poser problèmes. Nous avons indiqué également avoir écarté les robots car des connaissances techniques sur le paramétrage des robots dans les mouvements de rotation n'étaient pas accessibles au niveau de l'école primaire. Et souvent, dans l'enseignement ou la formation, les problèmes de connaissances techniques sur l'environnement dominent les problèmes didactiques ou mathématiques (Cabassut et Trestini, 2006). Il faut donc en préalable avoir anticipé ces problèmes de connaissances de l'environnement afin qu'ils ne viennent pas perturber les problèmes mathématiques à résoudre.

L'environnement « programmation avec Scratch » amène à mobiliser des compétences visuo-spatiales pour résoudre le problème proposé. C'est alors une vision « surfaces » avec la ligne vue comme le contour d'une surface qui est en jeu, avec les notions de repérage et de déplacement jouant un rôle essentiel dans la reproduction. C'est une différence importante avec les autres environnements. Certaines notions géométriques peuvent prendre un nouveau sens dans cet environnement, comme la notion d'angle, qui apparaît dans Scratch comme « angle de rotation ».

Une autre spécificité de cet environnement est aussi liée au fait d'amener à repérer des répétitions de motifs dans la figure, ce qui n'est pas essentiel dans d'autres environnements. Par exemple le bord de la figure peut être décomposé selon quatre lignes brisées superposables. La justification de ces répétitions, perçues dans un premier temps, mobilise des connaissances géométriques. Les élèves se contenteront-ils d'une validation perceptive ou mobiliseront-ils une validation géométrique ? Dans ce cas il faut repérer le risque de dévalorisation de la validation géométrique que fait courir l'environnement de programmation s'il se contente d'une validation perceptive ou pragmatique (c'est vrai parce que je le vois ou parce que l'action a réussi).

Ces compétences visuo-spatiales (éventuellement en lien avec des connaissances géométriques) ont permis de mettre en œuvre des compétences de programmation : apports de la géométrie au domaine « algorithmique et programmation ».

La première connaissance porte sur la notion de programme. Certes les élèves ont pu être exercés dans les activités de reproduction ou de construction d'une figure dans l'environnement papier-crayon à la rédaction d'un programme de construction. De même avec un logiciel de géométrie dynamique, ils ont pu choisir dans des menus déroulants des actions qui, de manière cachée, étaient traduites en programmes adressées à l'ordinateur qui les exécutait. Ici l'élève produit un programme en langage Scratch, en s'initiant à la syntaxe rigoureuse des différentes instructions de ce langage, aux caractéristiques de linéarité des séquences d'instructions et d'écriture par blocs. Le type d'activité de reproduction semble bien se prêter à cette initiation à la programmation.

La seconde connaissance porte sur l'instruction de répétition. Elle nécessite le repérage d'un modèle (en anglais pattern, qu'on peut traduire aussi par motif). Ici la connaissance en algorithmique et programmation apporte à la connaissance géométrique un nouveau regard : celui qui repère les modèles (motifs ou pattern). Le concept d'invariant est fondamental en géométrie pour classer les différents objets et les caractériser : l'invariance de la longueur, de l'angle, etc. Le rôle de la symétrie dans l'analyse de la figure à reproduire a été déterminant pour plusieurs productions présentées précédemment. La répétition peut apparaître en mathématiques : elle est même formalisée dans le raisonnement par récurrence. Mais elle apparaît moins naturellement qu'en algorithmique et programmation, car ce concept de modèle (pattern) dépasse le cadre de la géométrie et se retrouvera plus tard dans les calculs itératifs, puis récursifs jusque dans les structures algébriques. Et c'est ce repérage d'un modèle dans l'objet considéré qui apporte un nouveau regard sur la géométrie et sur les mathématiques.

Nous avons vu se dessiner une progression classique dans l'apprentissage d'un nouveau domaine « algorithmique et programmation » : apprendre ce domaine avec les mathématiques connues (par exemple apprendre sur les tailles de la croix, du lutin, de la scène, du placement du lutin sur la scène ou de l'orientation du lutin à partir d'activités mathématiques), apprendre des nouvelles mathématiques à partir de la programmation en Scratch (par exemple repérer des modèles dans un objet géométrique ou un objet mathématique) puis apprendre de manière intégrée des mathématiques et de la programmation en Scratch. Il s'agit de détailler cette progression dans des parcours d'étude et de recherche intégrant mathématiques, algorithmique et programmation. Pour cela Trouche (2014) invite à concevoir des « orchestrations instrumentales [qui] sont les dispositifs que le maître doit construire dans la classe pour guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle » (p.190). Mais ce travail doit rassembler une équipe pluri-disciplinaire :

> *« Concevoir des orchestrations instrumentales et plus généralement des scénarios d'exploitation didactique, est une nécessité dans les environnements technologiques complexes. Mais cela ne peut pas être du ressort d'un seul professeur. L'ingénierie didactique est un travail complexe, qui devrait reposer sur la recherche d'équipes pluridisciplinaires, associant des informaticiens, des didacticiens, des mathématiciens et des professeurs »* (Trouche (2014, p.190).

Tout un programme !

Références

ASSUDE T. & GELIS J.M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école élémentaire*, Educational Studies in Mathematics,* 50, 259-287.

CABASSUT R. & TRESTINI M. (2006) Les TIC dans la formation et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, en collaboration avec Riemlinger P. et Trestini M.*, Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 5-53.

KAHANE, J.-P. (1995 - 1996) Mathématiques et formation. *Petit x*, 40, 5-14.

MEN (Ministère de l'Education Nationale) (2015) Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).

PERRIN-GLORIAN M.-J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.

PETITFOUR E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris 7.

TROUCHE, L. (2004) Environnements informatisés et mathématiques, quels usages pour quels apprentissages ?, *Educational Studies in Mathematics,* 55, 181-197.

Mathématiques au Cycle 3

Actes du Colloque du Plan Nationale de Formation
Poitiers (86) – les 8 et 9 Juin 2017

Coordonnée par

Jean-François Cerisier, Thierry Chevalarias, Lalina Coulange, Ghislaine Gueudet, Julien Michel, Fréédérick Tempier

Sous la direction de

Fabrice Vandebrouck & Bertrand Lebot

Avec les contributions de :

Maha Abboud, Sylvie Alayrangues, Francine Athias, Christophe Billy, Isabelle Bois, Denis Butlen, Richard Cabassut, Pierre Campet, Christine Chambris, Renaud Chorlay, Catherine Desnavres, Chantal Fourrest, Matthieu Gaud, Alexis Gautreau, Marie Gervais, Mariam Haspekian, Dominique Hguiaphal, Françoise Hérault, Maelle Jouran, Cécile Kerboul, Philippe Le Borgne, Pascale Masselot, Isabelle Melon, Frédéric Métin, Marc Moyon, Nathalie Pasquet-Fortune, Nicolas Pelay, Samuel Peltier, Marie Jeanne Perrin-Glorian, Edith Petitfour, Frédérique Plantevin, Caroline Poisard, Cyril Redondo, Isabelle Renault, Carine Reydy, Aurélie Roux, Bruno Rozanes, Laurent Signac, David Somdecoste, Gregory Train, Hélène Zucchetta

Parce qu'il concerne à la fois les professeurs des écoles et les professeurs de mathématiques au collège, la mise en place du nouveau cycle 3 renouvelle des questions liées à la formation et aux pratiques enseignantes. Comment collaborent ces enseignants de profils différents dans la mise en place de l'enseignement des mathématiques au cycle 3 ? Avec quels systèmes d'outils et de ressources (documentaires, numériques…) communs ou non ? De quelle manière ce changement se traduit-il dans les dispositifs d'enseignement, en lien avec des aspects au cœur du projet de refondation de l'École, tels que l'évaluation, la différenciation ou l'interdisciplinarité ? Quelle est la progressivité des apprentissages mathématiques envisagée du CM1 à la Sixième ? Comment sont construits les savoirs mathématiques liés à des thèmes comme les nombres et le calcul, les grandeurs et la mesure ou la géométrie ? Quelles sont les continuités ou les discontinuités sous-jacentes au cycle 3 ?

Ce colloque s'ait proposé d'offrir un espace et un temps de partages d'expérience, de travail collectif et de réflexion entre les acteurs de différents profils, enseignants et/ou formateurs (académiques, en ESPE, etc.) qui participent à la mise en place de l'enseignement des mathématiques dans le cadre du cycle de consolidation. Il s'agissait de saisir cette opportunité pour réfléchir sur les pratiques d'enseignement et de formation en vue de les renouveler et de les rendre plus efficaces au regard des nouveaux enjeux du cycle 3.

Mots clés : Mathématiques, Cycles 3, liaison école/collège, formation

2018 - IREM de Poitiers
Bâtiment de mathématiques H3,
Téléport 2 BP 30179,
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL Cedex
Tél : (+33) 05 49 45 38 77
Mél : secrirem@math.univ-poitiers.fr
Site : http://irem2.univ-poitiers.ftportail/

ISBN 978-2-85954-096-8 / EAN 9782859540968

9 782859 540968