At 15 : Construire des nouveaux nombres en cycle 3 : fractions et décimaux

Bernard Anselmo[1], Bruno Rozanès[2], Hélène Zucchetta[3],

[1]ESPE de Lyon bernard.anselmo@univ-lyon1.fr,
[2]Collège P Sénard Caluire (69) bruno.rozanes@ac-lyon.fr,
[3]ESPE de Lyon, helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé : Suite à la création du nouveau cycle 3, le groupe Collège de l'IREM de Lyon a revu et complété la brochure « La sixième entre fractions et nombres décimaux » (Irem-1999) pour proposer une progression de situations sur l'ensemble du cycle 3. Ce travail a donné lieu à un ouvrage qui devrait prochainement paraître chez CANOPÉ.

Après un bref questionnement sur les difficultés des élèves et sur les besoins de formation des enseignants pour enseigner les notions de fraction et de nombre décimal, nous avons proposé aux participants de l'atelier d'étudier quelques-unes de ces situations autour du thème « fractions et décimaux » à l'articulation école-collège. Ces situations reposent sur l'activité de l'élève, et prennent appui sur la manipulation pour donner du sens aux nouveaux nombres ainsi qu'aux opérations et aider à leur représentation. Elles cherchent à baliser la progression sur le cycle 3 en permettant aux élèves de s'approprier, par la résolution de problèmes, les différentes significations attachées à la fraction ou au nombre décimal. Leur étude devrait permettre aux enseignants de réinterroger leurs pratiques d'apprentissage des fractions et décimaux en s'intéressant aux différents aspects du concept à aborder.

Mots clefs : fractions et décimaux ; articulation école-collège ; résolution de problèmes ; manipulations et activités

I Introduction

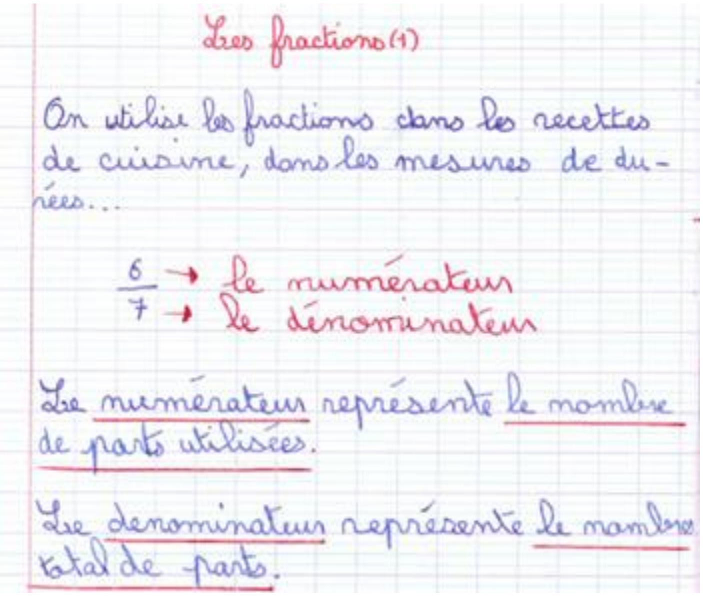
A l'IREM de Lyon, il y a une vingtaine d'années, une équipe d'enseignants de collège et de formateurs a mené une réflexion sur l'enseignement des fractions et des nombres décimaux. Elle a conduit à une première publication en 1999 : « La sixième entre fractions et décimaux » qui apportait quelques éléments théoriques et proposait une progression de situations pour la classe de sixième.

A l'annonce de la création du nouveau cycle 3, une nouvelle équipe a repris la réflexion et l'a étendue à tout le cycle 3, du CM1 jusqu'à la sixième. Les situations de l'ancienne brochure IREM ont été revisitées et déclinées à différents niveaux de classe, de nouvelles ont été créées, expérimentées, filmées. Ce travail a abouti à une nouvelle publication à l'intention des équipes d'enseignants inter-degrés qui devrait prochainement paraître chez CANOPé. Cette nouvelle ressource se veut être un support d'échanges pour ces équipes et les aider à envisager et conduire des progressions communes à l'articulation école-collège.

Le travail engagé par ce groupe IREM se prolonge dans des actions de Formation Continue sur l'académie de Lyon : stages ou animation à destination des enseignants, création d'un parcours M@gistère (par Bernard Anselmo).

II Contexte du travail

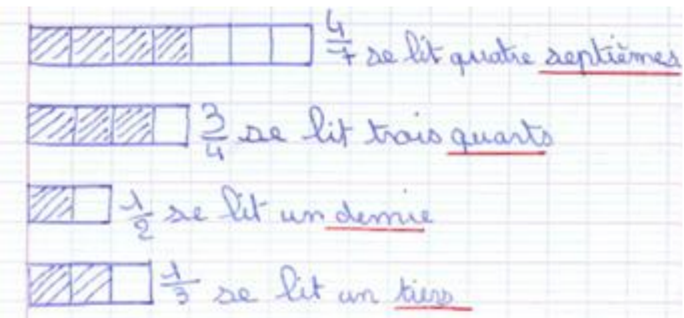
Les difficultés rencontrées par nos élèves montrent que les questions posées par l'enseignement des fractions et décimaux sont nombreuses et complexes. Les pratiques des professeurs de collège et d'école montrent aussi un déficit de formation dans ce domaine en particulier autour de la compréhension des différents aspects et significations des fractions et des nombres décimaux. Les réponses spontanées d'enseignants à la définition d'un nombre décimal font, par exemple, encore très souvent intervenir l'écriture à virgule et non pas la fraction décimale. L'étude des traces à retenir sur certains cahiers d'élèves montre aussi que le lien entre fraction décimale et nombre décimal n'est pas toujours fait. Il n'est pas rare d'observer dans les classes de CM des conversions de mesures utilisant des nombres décimaux (avec l'enseignement de règles du type « décaler la virgule »), proposées bien en amont de l'abord de la notion de fraction. Dans les cahiers des élèves, la première leçon sur les fractions définit souvent du vocabulaire comme numérateur et dénominateur sans qu'une référence à une unité clairement explicitée pour le partage soit clairement faite comme le montre, par exemple, l'illustration suivante issue d'un cahier d'élève :



Remarque :

On peut se demander comment sera interprétée la représentation suivante :

Est-ce $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ qui est représenté ? et de quelle unité ?



Que dire de l'illustration qui suit la définition précédente ?

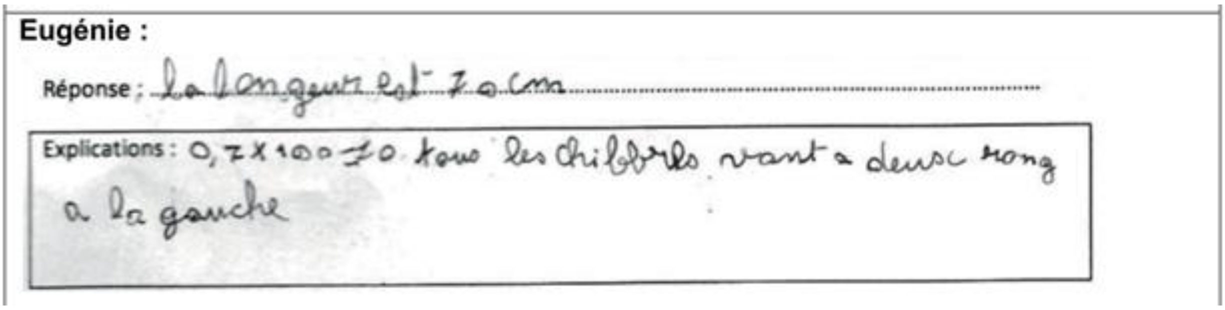
$\frac{1}{n}$ est toujours représenté par un carreau, quelque soit n ?

Figure 1 : extrait d'un cahier outil d'une classe de CM2

Malheureusement, le temps de formation initiale des enseignants est souvent trop restreint pour leur permettre de remettre en cause leurs conceptions des fractions et des nombres décimaux (parfois fausses) et d'appréhender l'enseignement de ces savoirs dans une approche globale liée à la mise en place du cycle 3.

Ainsi, un enseignement succinct et sans signification de règles apprises, comme celles de la multiplication par 10, 100, …, empêche une compréhension plus profonde du fonctionnement global du système de numération décimale. Cette compréhension est nécessaire pour permettre de montrer que ce n'est pas un décalage de la virgule qui est en jeu dans ces opérations, mais un changement de valeur des chiffres dans l'écriture du nombre multiplié.

Dans un des sujets de concours du CRPE de la session 2017, une question portait sur ce sujet et très peu de candidats ont réussi à y répondre : *Formuler précisément la procédure utilisée par Eugénie et en donner une justification mathématique.*

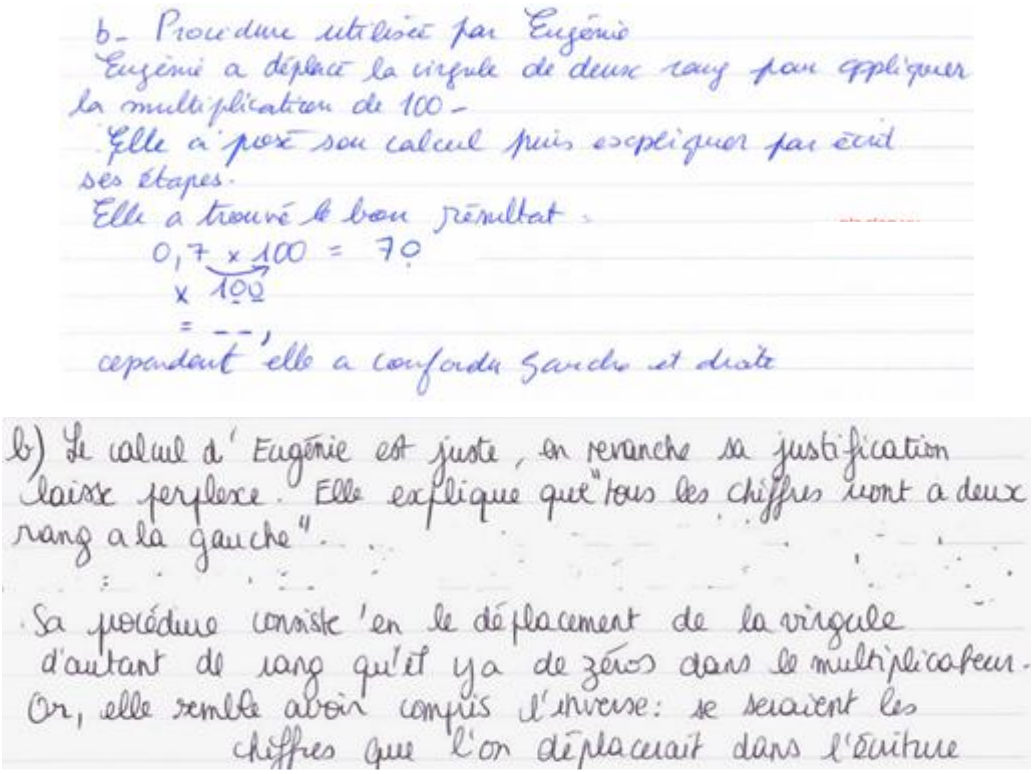


Eugénie :

Réponse : la longueur est 70 cm

Explications : 0,7x100=70 tous les chiffres vont a deux rang a la gauche

En voici deux réponses montrant deux candidats qui s'appuient maladroitement sur une règle à appliquer et expliquent la réponse de l'élève par une confusion de gauche et de droite. Ils sont incapables de donner une justification mathématique de la procédure formulée par l'élève (pourtant le deuxième candidat a obtenu une note de 35,5/40 sur l'épreuve de mathématiques) :



b- Procédure utilisée par Eugénie
Eugénie a déplacé la virgule de deux rang pour appliquer la multiplication de 100-
Elle a posé son calcul puis expliquer par écrit ses étapes.
Elle a trouvé le bon résultat.
0,7 x 100 = 70
x 100
= --,
cependant elle a confondu gauche et droite

b) Le calcul d'Eugénie est juste, en revanche sa justification laisse perplexe. Elle explique que "tous les chiffres vont a deux rang a la gauche".
Sa procédure consiste en le déplacement de la virgule d'autant de rang qu'il y a de zéros dans le multiplicateur.
Or, elle semble avoir compris l'inverse : se seraient les chiffres que l'on déplacerait dans l'écriture

Figure 2 : deux réponses de candidats pour expliquer le calcul d'Eugénie

Les aides apportées par les manuels scolaires ne suffisent pas toujours à combler ses lacunes. Dans ceux de sixième par exemple, même encore récemment, l'étude des nombres décimaux précèdent la plupart du temps celle des fractions : souvent les écritures décimales sont présentées au premier chapitre (comme conventions d'écriture de fraction décimales), la fraction apparait ensuite, en milieu d'années, en tant que quotient de deux entiers sans que le lien avec une signification partage soit toujours établi.

III Différents aspects et significations de la fraction et du nombre décimal

La définition théorique d'une fraction en tant que quotient de deux entiers a et b (avec b non nul) ne recouvre pas tous les aspects sous lesquels on peut envisager la fraction. Cette définition en tant que fraction-quotient n'apparaît dans les repères de progressivité du cycle 3 que dans la classe de 6$^{\text{ème}}$.

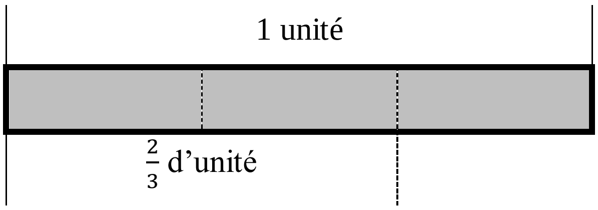
Différents aspects de la fraction

La notion de fraction peut être considérée sous bien des points de vue qu'il est utile de prendre en compte pour concevoir et programmer son enseignement.

A. Le point de vue des grandeurs

1. Mesurage et partage de l'unité

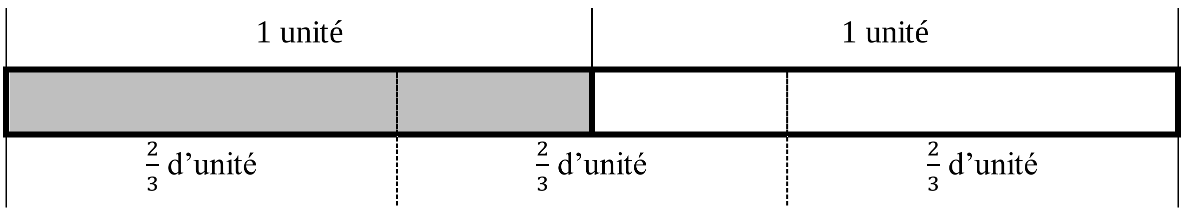
Il conduit à considérer la fraction $\frac{2}{3}$ d'unité comme étant 2 fois $\frac{1}{3}$ d'unité. L'unité est partagée en trois parts égales, et deux de ces parts sont ensuite prises en compte.



C'est le partage de l'unité qui est premier dans cette procédure de représentation concrète de la fraction

2. Un partage de plusieurs unités

La fraction $\frac{2}{3}$ d'unité apparait comme étant le $\frac{1}{3}$ de deux unités. Deux unités sont à partager en trois parts égales. Pour ce faire, les deux unités sont réunies en une seule quantité qui est ensuite partagée en trois parts égales.



Dans cette représentation, c'est la constitution d'une quantité de plusieurs unités qui précède le partage.

3. Un repérage d'une position

Sur une demi-droite graduée, la fraction $\frac{2}{3}$ permet de repérer la position d'un point. Elle devient l'abscisse d'un point dans un repère donné. Elle apparait comme étant la position de l'extrémité d'un segment de mesure $\frac{2}{3}$ d'unité dont l'autre extrémité est l'origine de la demi-droite. Sa signification reste fortement liée à la notion de partage évoquée plus haut, dans un contexte de mesure de longueur, mais on la note sans l'accompagner d'une unité de mesure et ceci contribue à lui conférer un premier statut de nombre.

B. Le point de vue des nombres

4. La fraction quotient

Dans un contexte purement numérique, la fraction apparait comme la solution d'une équation de type $ax = b$ avec $a \neq 0$ et où a et b sont entiers. La fraction $\frac{2}{3}$ est alors le nombre qui multiplié par 3 donne 2, c'est à dire le résultat exact de la division 2 par 3.

Ce résultat peut être validé par la multiplication[1] de $\frac{2}{3}$ par 3 en référence à l'addition réitérée

$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

5. Coefficient scalaire, un coefficient de proportionnalité

Des problèmes de proportionnalité peuvent amener à rechercher un coefficient multiplicatif qui permet de passer d'un nombre à un autre. Il peut s'agir de trouver un nombre qui lie deux mesures d'une même grandeur ou d'un nombre qui permet de passer d'une grandeur à une autre. Dans les deux cas l'aspect quotient de la fraction est sollicité.

Ces premiers points de vue sont travaillés tout au long du cycle 3 avec le point de vue des nombres plutôt réservé à la classe de 6$^{\text{ème}}$. Un dernier point de vue est travaillé au cycle 4 :

C. Le point de vue des proportions

De ce point de vue, 2 est à 3 ce que 20 est à 30 et la fraction $\frac{2}{3}$ permet d'exprimer, par exemple, la proportion d'élèves filles dans une classe de trente élèves où il y a 20 filles.

Elle devient alors un objet qu'on peut modifier par équivalences en utilisant la proportionnalité :

les égalités $\frac{2}{3} = \frac{20}{30} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ se lisent dans le tableau de proportionnalité

2	20	4	6
3	30	6	9

Sa signification n'est plus basée sur une notion de partage équitable, mais sur une répartition d'éléments que l'on a dénombrés. En termes de proportion, $\frac{2}{3}$ ne se lit pas deux tiers mais deux sur trois.

[1] $\frac{2}{3} \times 3$ se lit indifféremment « $\frac{2}{3}$ fois 3 » ou « $\frac{2}{3}$ multiplié par 3 » mais selon la lecture la signification donnée à la multiplication n'est plus la même « $\frac{2}{3}$ multiplié par 3 » renvoie à $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ tandis que « $\frac{2}{3}$ fois 3 » renvoie plutôt à $\frac{2}{3}$ de 3 ;

Différents aspects d'un nombre décimal

1. Fractions décimales

Un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale : $\frac{a}{10^n}$ a et n étant des nombres entiers naturels. A ce titre $\frac{13}{5}$ et $\frac{15}{4}$, qui peuvent s'écrire respectivement $\frac{26}{10}$ et $\frac{375}{100}$, sont des nombres décimaux. Cet aspect est celui présent dans les programmes de 2015 du cycle 3 : le nombre décimal est introduit comme codage d'une fraction décimale.

D'après cette définition un décimal est un rationnel particulier dont, lorsqu'il est non entier, l'écriture fractionnaire irréductible comporte un dénominateur qui peut s'écrire sous la forme d'un produit de puissances de 2 ou de 5. Cet aspect n'est pas abordé au cycle 3 mais les élèves vont rencontrer des exemples simples de telles fractions décimales, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \ldots$

2. Nombres « à virgule »

Tout nombre décimal admet une écriture « à virgule » finie. Ainsi $\frac{13}{5}$ peut s'écrire 2,6 et $\frac{15}{4}$ peut s'écrire 3,75.

Dans cette écriture décimale, la valeur d'un chiffre est fonction de sa position (à un rang donné, sa valeur est dix fois plus grande que celle du chiffre écrit au rang immédiatement à sa droite) et peut être lue en se référant à la décomposition canonique du nombre suivant les puissances de 10. Ainsi dans $3{,}75 = 3 + 7 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$, le 3 a pour valeur trois unités, le 7 : sept dixièmes d'unité et le 5 : cinq centièmes d'unité. Il est important de travailler cet aspect et la lecture se fera en donnant les rangs « 3 unités 7 dixièmes et 5 centièmes » par exemple et non « 3 virgule 75 ».

3. Des nombres qui prolongent les entiers et permettent d'approcher d'autres nombres.

Tous les entiers naturels sont aussi des nombres décimaux : ainsi 3 est un décimal. Tout décimal non entier peut être encadré par deux entiers successifs et s'écrire sous la forme d'une somme d'un entier et d'un décimal inférieur à 1 : $3 < 3{,}75 < 4$ et $3{,}75 = 3 + \frac{75}{100}$ avec $\frac{75}{100} < 1$.

Entre deux nombres entiers, entre deux nombres décimaux, il existe une infinité de nombres décimaux.

Pour ce qui concerne les nombres non décimaux, la propriété mathématique de densité de l'ensemble des décimaux dans l'ensemble des réels montre que ces derniers peuvent être approchés avec autant de précision que voulue par un nombre décimal : ainsi 0,67 est une valeur approchée au centième près par excès de $\frac{2}{3}$ ou 3,14 une approximation de π.

4. Recodage, avec une seule unité, d'une mesure exprimée avec deux unités

Le nombre décimal peut être considéré comme un nombre à virgule constitué de deux parties : deux entiers accolés séparés par une virgule.

C'est le cas quand on le perçoit comme une mesure de grandeur exprimée avec deux unités, une première unité et une autre sous-multiple de celle-ci. Un lien est alors possible avec les unités de numération.

Cet aspect est source d'erreurs sur les nombres décimaux chez de nombreux élèves et par conséquent n'est pas à introduire trop tôt. Il est important que les relations entre unités de mesure et celles entre unités de numération soient aussi mises en lien.

5. Recodage dans une autre unité

Le nombre décimal peut être aussi perçu comme le recodage d'une mesure entière d'une grandeur exprimée dans une unité donnée, dans une autre unité multiple de la première.

Ainsi 1,624 (m ou kg) est l'expression de 1 624 (mm ou g) dans une unité mille fois plus grande et est donc mille fois plus petite en m ou kg qu'en mm ou g.

III Déroulement de l'atelier

Après une présentation du contexte du travail, autour des besoins de formation ressentis, et des propositions de formation, l'activité du groupe Collège de l'IREM de Lyon est décrite rapidement.

Ensuite une première activité est proposée aux participants afin de les mettre en en questionnement sur la signification et la représentation d'un nombre décimal. Il leur est demandé de construire un segment de 1,3 u à partir d'une bande-unité distribuée préalablement.

Dans un second temps, les documents en annexe sont distribués avec la consigne suivante :

Voici des propositions d'activités pour la classe
Étudiez-en deux plus particulièrement pour pouvoir ensuite présenter vos réflexions aux autres.

- *Que peuvent faire les élèves ?*
- *Comment pourrait-on exploiter leurs réponses ?*
- *A quel(s) moment(s) du cycle serait-il intéressant de les proposer ?*
- *Dans quel(s) objectif(s) ?*

Lors de cet atelier, nous avons fait le choix de présenter quelques situations « phares » centrées sur l'étude des différents aspects de la fraction vus au cycle 3 et sur le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale d'une fraction décimale. La résolution des problèmes proposés donne lieu à des situations de classe dans lesquelles l'élève agit. Elles servent de références.
La manipulation effective du matériel est préférée à l'utilisation de représentations schématisées (qu'en tout cas elle précède). Elle aide à la construction des nombres et des opérations travaillées et permettent de leur donner un sens.

À une désignation du nombre, l'élève pourra ensuite associer une image mentale :

- l'image d'une quantité en groupements d'unités
- l'image d'une mesure d'une grandeur, une unité étant donnée
- l'image d'une position sur une droite graduée.

Pendant l'atelier, le temps imparti pour une mise en commun des analyses a manqué mais les discussions au sein des groupes de travail ont montré l'intérêt et l'originalité des nouvelles activités. Elles ont aussi permis de revisiter ou de faire connaitre d'autres situations « classiques » (inspiré d'ERMEL) comme les activités d'échanges de messages « le facteur » qui permettent d'introduire la notion de fraction-partage à partir d'une bande unité.

La situation « Règles graduées » a suscité beaucoup d'intérêt surtout par la réflexion de ce que peuvent produire des élèves comme illustré ci-dessous :

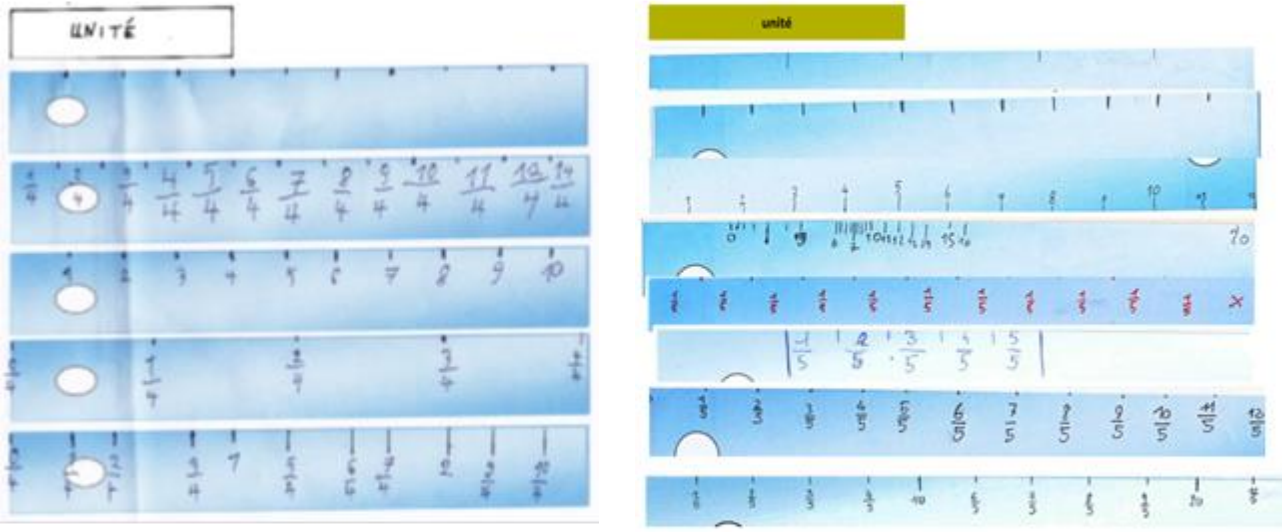


Figure 3 : exemples de règles graduées produites par des élèves dans le cas de graduations en quart et en cinquièmes d'unité

La situation « L'Apprenti comptable » (où il s'agit de calculer comme en 1500 – avant l'introduction de l'écriture décimale) a été illustrée sur des productions d'élèves. Elle est aussi utilisée, un peu transformée, en tant qu'activité de formation pour les étudiants de Master MEFF Professeur des écoles à l'ESPE de Lyon.

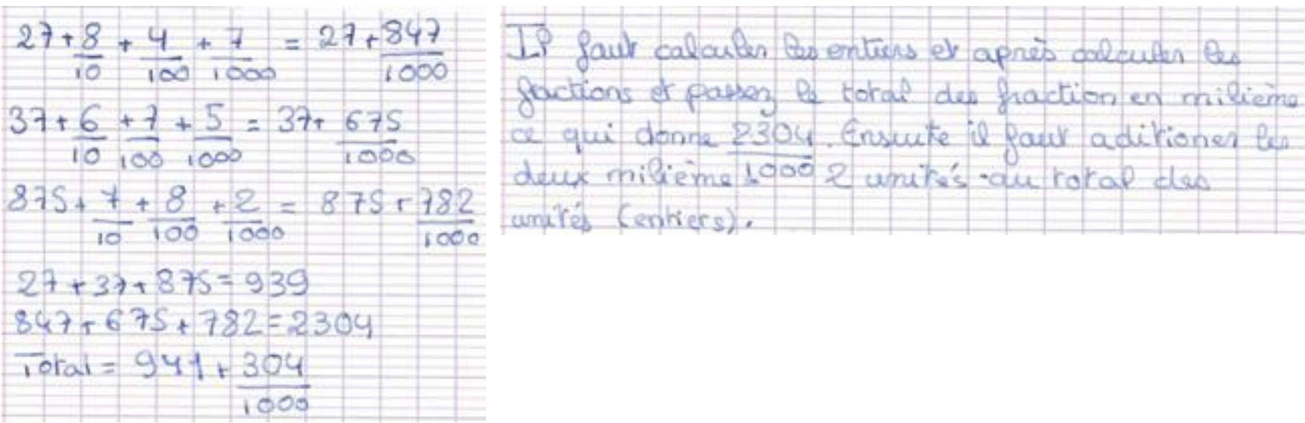


Figure 4 : réponse d'un élève de 6ème

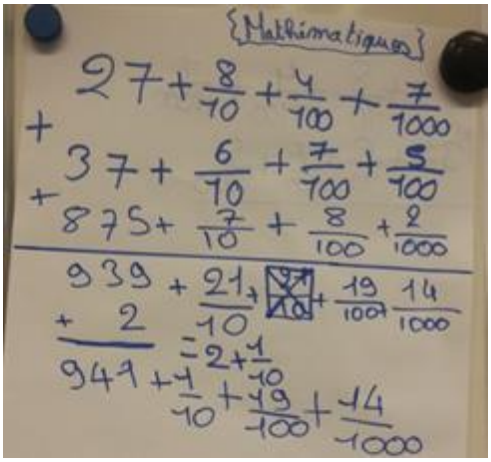


Figure 5 : réponses de deux groupes d'élèves de CM2

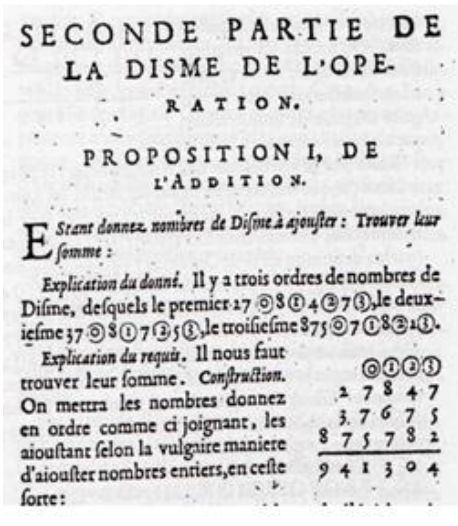
Les questions posées aux étudiants doivent leur permettre de s'apercevoir que l'écriture décimale est récente (et qu'elle a évolué au cours du temps jusqu'à l'écriture à virgule en France ou avec un point chez les anglo-saxons). L'énoncé est le même que celui donné aux élèves de CM2 ou de 6ème accompagné par les questions suivantes :

a) Pour quelle raison l'énoncé précise-t-il que nous sommes en 1500 Ap. JC ?
b) Quelles sont les connaissances nécessaires que les apprentis doivent avoir pour pouvoir effectuer correctement cette opération ?
c) Donner une explication que l'élève peut donner à l'apprenti moins expérimenté.

Analyser la réponse ci-contre (la réponse de l'élève 2 ci-dessus)

Cette analyse est ensuite prolongée par l'étude de la page correspondante de la Disme de Simon Stevin avec une question perturbant en général les étudiants :

Quel est le nombre qui précède 12 ⓪ 3 ① 7 ② 4 ③ ?



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

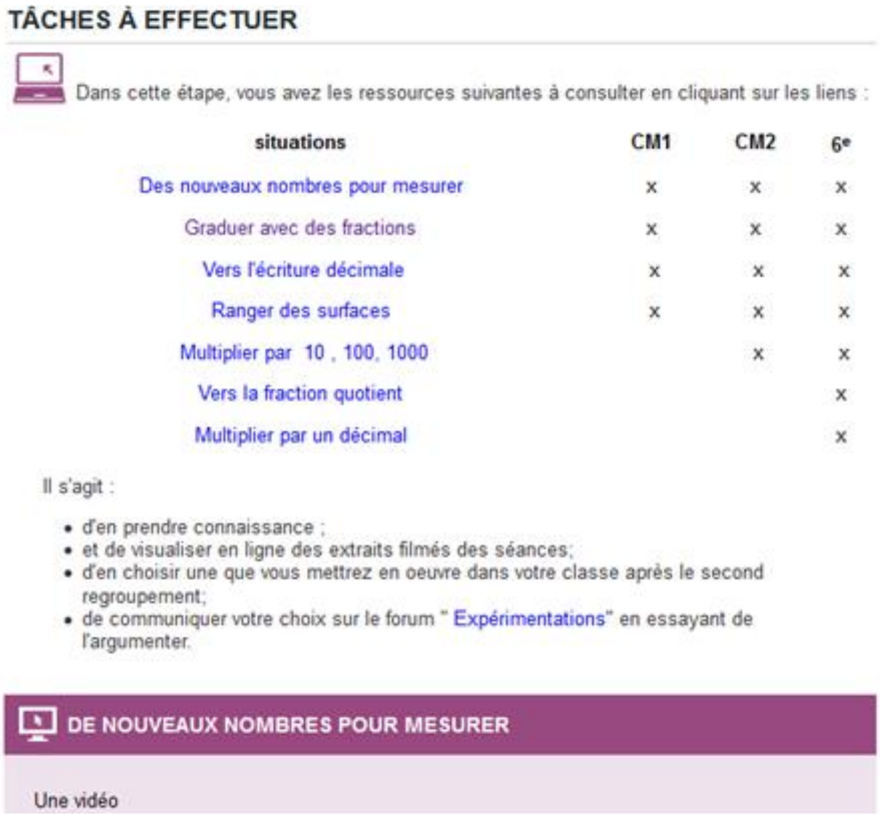
Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪8 ①4 ②7 ③, le deuxiesme 37 ⓪6 ①7 ②5 ③, le troisiesme 875 ⓪7 ①8 ②2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte :

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Figure 6 : Activité pour les étudiants PE M1 MEEF

Des extraits de films, montés pour le parcours M@gistère, ont pu être en partie montrés en fin d'atelier pour illustrer la mise en place des situations. Dans ce parcours, ces courtes vidéos peuvent être visionnées. Elles permettent aux participants de se faire une idée des diverses situations proposées pour qu'ils en choisissent une à expérimenter avec leurs élèves et en faire ensuite un retour en présentiel.


TÂCHES À EFFECTUER

Dans cette étape, vous avez les ressources suivantes à consulter en cliquant sur les liens :

situations	CM1	CM2	6e
Des nouveaux nombres pour mesurer	x	x	x
Graduer avec des fractions	x	x	x
Vers l'écriture décimale	x	x	x
Ranger des surfaces	x	x	x
Multiplier par 10 , 100, 1000		x	x
Vers la fraction quotient			x
Multiplier par un décimal			x

Il s'agit :

- d'en prendre connaissance ;
- et de visualiser en ligne des extraits filmés des séances;
- d'en choisir une que vous mettrez en oeuvre dans votre classe après le second regroupement;
- de communiquer votre choix sur le forum " Expérimentations" en essayant de l'argumenter.

DE NOUVEAUX NOMBRES POUR MESURER

Une vidéo

Figure 6 : une page du parcours M@gistère permettant d'avoir accès aux vidéos et donnant la consigne de travail à distance

IV Conclusion

Lors de l'atelier, nous espérons avoir montré que l'apprentissage des fractions et les nombres décimaux nécessitent du temps et que l'articulation entre fractions et décimaux doit être travaillée tout au long du cycle 3 et continuée au cycle 4.

Si l'on veut que l'enseignement de ces nouveaux nombres ne se cantonne pas à des règles dénuées de sens, et permette d'installer durablement des connaissances solides, il est nécessaire que les enseignants de cycle 3 soient formés à cette réflexion et œuvrent de concert tout au long du cycle, par exemple, par la mise en place de progressions communes.

Le travail mené par l'équipe de l'IREM de Lyon va dans ce sens. L'ouvrage en voie de publication se veut être une aide aux équipes inter-degrés et aux formateurs qui voudraient s'engager dans cette réflexion.

Le parcours M@gistère qu'elle a élaboré, s'inscrit dans cette même logique de formation et d'accompagnement. Il peut constituer un outil pour les équipes de formateurs en général et en particulier pour les conseillers pédagogiques non spécialistes de la discipline.

Références

Référence institutionnelle

Programme pour le cycle 3, « Cycle 3. Mathématiques », *Bulletin officiel spécial n°* 11 du 26 novembre 2015, consultable sur eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/pid23199/ecole-elementaire-et-college.html*

Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques, *coll. « Ressources pour faire la classe »*, 2012, Chasseneuil-du-Poitou, Scérén/CNDP-CRDP.

Fractions et nombres décimaux au cycle 3 : eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html*

Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres décimaux : eduscol.education.fr *http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle-4.html*

Livres et articles

Anselmo B., Bonnet M., Colonna A., Combier G., Latour J. Planchette P. (1999) *La sixième entre fractions et décimaux* IREM de Lyon

Anselmo B., Zucchetta H. (sous la direction de) *Construire des nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux* Publication à paraître à CANOPé de Lyon

ERMEL, (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours moyen première année,* Hatier, 1997.

ERMEL, (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, *Cours moyen deuxième année*, Hatier, 1999.

Grisvard C. et Léonard F., (1981) *Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs*, in Bulletin vert n°327, APMEP, 1981, p. 47-60.

Perrin-Glorian Marie-Jeanne, (1985) *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège*, IREM Paris VII, 1985.

Roditi Eric, (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique,* Paris, L'Harmattan, 2005.

Stevin Simon, (1585) *La Disme,* Reproduction de textes anciens, IREM Université Paris Diderot Paris 7, consultable à l'adresse : www.irem.univ-paris-diderot.fr ; chemin : moteur de recherche (écrire la disme) – Mise en ligne des publications du groupe M:ATH – Reproduction de textes anciens - Ancienne série - n°1.

ANNEXE 1

Quelle progression est proposée dans l'ouvrage que le groupe Collège de l'IREM de Lyon a écrit et expérimenté ?

En s'appuyant sur les différents aspects de la fraction et sur l'introduction d'un nombre décimal comme fraction décimale, le groupe Collège de l'IREM de Lyon a rédigé un ouvrage où une progression en quatre temps est proposée à travers différentes situations pour tout le cycle 3.

Les situations proposées à l'analyse lors de l'atelier se trouvent en annexe et sont repérées par leur nom dans le bref descriptif ci-dessous[2].

Les quatre temps de la progression proposée.

A. <u>Débuter avec les fractions</u>

Ces quatre premières situations se déroulent dans le contexte des longueurs. Elles sont accessibles dès le CM1 mais des aménagements sont proposés pour qu'elles puissent être mises en œuvre ou reprises plus tard dans le cycle.

1. Des fractions pour mesurer : « Le facteur »

Cette première situation permet de montrer l'insuffisance des nombres entiers dans la mesure d'une longueur. Elle présente la fraction à partir du partage par pliage de l'unité et permet d'introduire l'écriture fractionnaire. Elle propose un travail autour de fractions simples, inférieures ou supérieures à l'unité, et fait déjà apparaître que des écritures différentes peuvent désigner une même mesure. C'est une situation « émetteur-récepteur » avec des échanges de messages qui seront repris par l'enseignant.

2. Un nouvel outil pour partager : le « guide-âne »

Le pliage impose des dénominateurs qui sont des multiples simples de 2 voire de 3, le guide-âne permet de partager l'unité sans la plier et ainsi de travailler avec des dénominateurs quelconques. La situation amène à découvrir cet outil et à l'utiliser pour construire des segments dont la longueur est une fraction de l'unité inférieure ou supérieure à 1.

3. Fractions et graduations : « Règles graduées »

Dans cette situation, il s'agit tout d'abord de construire des outils plus pratiques et plus précis pour mesurer des longueurs et tracer des segments : ce sont des règles graduées. Elles sont ensuite utilisées pour installer la notion de droite graduée sur laquelle on peut placer des points. La fraction prend un nouveau statut, celui de nombre permettant de repérer un point sur une droite et de le situer par rapport à des entiers.

---

[2] Une version plus complète est mise en annexe.

4. Écritures équivalentes

Des écritures équivalentes ont déjà été rencontrées et utilisées dans les situations précédentes. Il s'agit maintenant de dégager des règles, pour produire et reconnaître de telles écritures.

B. Construire le nombre décimal

Cette partie vise à introduire l'écriture décimale et à interroger sa signification dans la construction de techniques opératoires sur les nombres décimaux. Les deux premières peuvent être proposées en CM1 ou plus tard dans le cycle avec des aménagements prévus. Les deux suivantes sont plus adaptées à des élèves de CM2 ou de 6ème.

5. Fractions décimales

Les élèves ont déjà rencontré les dixièmes dans les situations précédentes. Il s'agit maintenant de découvrir d'autres fractions décimales et de comprendre les liens qui lient entre elles. C'est aussi l'occasion de les décomposer sous la forme de sommes d'entiers et de fractions inférieures à 1 et de commencer à les comparer.

6. Écriture décimale : « Des bandes accolées » et « L'apprenti comptable »

En partant du cas particulier des fractions décimales et en s'appuyant sur les écritures équivalentes cette sixième situation est déclinée en deux versions :

- une version qui a pour but d'introduire l'écriture décimale en début de cycle 3,
- une autre version pour des élèves qui ont déjà rencontré l'écriture décimale, permet de revenir sur cette signification en s'appuyant sur « la Disme » de Simon Stevin.

A cette occasion, on découvrira ou on réinterrogera les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction avec des nombres en écriture décimale.

7. Fractions de surface : « Ranger des surfaces »

La notion de fraction partage de l'unité est réinvestie dans un autre contexte que celui des longueurs, celui des aires, pour réinterroger les liens entre fraction et nombre décimal. Ce nouveau support est utilisé pour réinvestir les techniques opératoires rencontrées dans la situation précédente et illustrer les règles de comparaison et de rangement de nombres en écriture décimale.

8. Multiplication d'un décimal par un entier : « Des rectangles à foison »

Les techniques opératoires sur les nombres en écriture décimale sont en grande partie similaires à celles mises en œuvre sur les entiers. Cette situation propose de fonder ou de redécouvrir les techniques dans le cas de la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1000, en référence à la signification des écritures, à partir de manipulations sur des axes graduées ou sur des surfaces.

C. Découvrir la fraction quotient

Ces trois situations portent sur les relations entre multiplication, division et fractions. Elles ont été conçues pour être proposées en fin de cycle 3.

9. Division et multiplication

Cette situation vise à instaurer une meilleure maîtrise du sens de la division en prenant appui sur la connaissance qu'ont les élèves de la multiplication. Elle cherche à mettre en défaut la conception erronée comme quoi on ne peut diviser qu'un nombre par un autre plus petit et à établir le lien entre multiplication et division.

10. Vers la fraction quotient : « Les Bonbons rubans »

La situation a pour but d'enrichir la notion de fraction avant de l'envisager en tant que quotient de deux entiers. Elle amène à la découvrir, dans un contexte de longueur, en tant que valeur d'une part dans un partage de plusieurs unités, puis de nombre, coefficient scalaire, par lequel on peut multiplier une longueur pour en obtenir une autre.

11. Fraction quotient

Il s'agit d'introduire une notion nouvelle : la fraction comme <u>nombre</u> solution de l'équation $ax = b$ ou comme quotient de deux entiers $a : b$. Pour cela la situation pose la question de la valeur du quotient de deux entiers dans un contexte purement numérique. C'est l'occasion de différencier quotient exact et quotient approché et de l'illustrer dans des problèmes de division.

D. <u>Enrichir la multiplication</u>

Ces situations visent à donner un nouveau sens à la multiplication autre que celui de l'addition réitérée. Elles sont proposées dans des contextes de grandeurs différentes et sont conçues pour la fin du cycle.

12. Multiplication et longueur

Cette situation amène les élèves à calculer des fractions de longueurs pour construire des segments. Elle vise à mettre en lien la notion de fraction opérateur, coefficient scalaire permettant de passer d'une fraction à une autre, avec l'opération multiplication et le symbole « × », puis à l'étendre au cas des fractions décimales.

13. Multiplication et proportionnalité

Après avoir défini ou revu, dans un contexte de proportionnalité, la multiplication d'un décimal par une fraction, on présente le cas particulier du produit d'un décimal par une fraction décimale, autrement dit de deux décimaux. On se demande ensuite comment poser la multiplication pour effectuer de tels produits en écriture décimale.

14. Multiplication et aire

Il s'agit d'étendre la formule de calcul de l'aire d'un rectangle au cas des dimensions décimales et de donner ainsi un autre sens à la multiplication de deux décimaux.

ANNEXE 2 Une sélection d'activités proposées à l'analyse lors de l'atelier

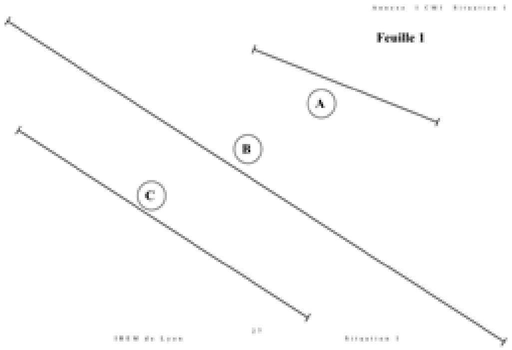
LE FACTEUR [3]

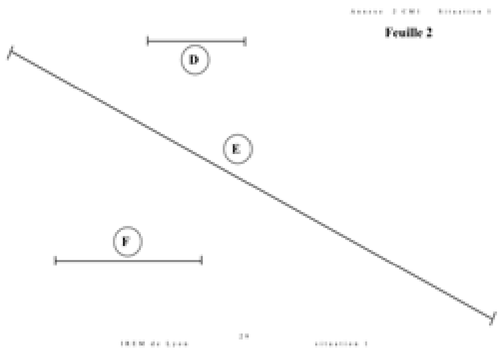
DESCRIPTION RAPIDE

- Les élèves disposent d'une feuille où sont tracés des segments. Ils doivent écrire des messages qui permettront à ceux qui les recevront de construire des segments de même longueur que ceux donnés. Ils travaillent en groupe. Les échanges de message se font par l'intermédiaire de l'enseignant qui joue le rôle de facteur.
- La règle graduée est interdite mais les élèves ont à leur disposition des bandes « unités ». les ciseaux sont interdits également.

MATÉRIEL : Pour chaque élève :

- des bandes-unités de 10,5 cm de longueur ;





- une feuille numérotée 1 ou 2 où sont tracés les segments que les élèves doivent arriver à faire reproduire
- une fiche-navette sur laquelle se font les échanges : tracés, confirmation ou invalidation, demandes d'informations supplémentaires

CONSIGNES

1. A l'aide de la bande unité, vous allez devoir mesurer un segment donné puis construire un segment de longueur donnée. Les groupes 1 et 2 n'ont pas les mêmes segments tracés sur leur feuille. La règle graduée et les ciseaux sont interdits.
2. Choisissez un des trois segments déjà tracés sur votre feuille. Mettez-vous d'accord sur un message que vous écrirez sur la fiche-navette. Ce message doit permettre au groupe auquel vous êtes associés de tracer un segment de la même longueur que celui que vous avez choisi. Je transmettrai le message à l'autre groupe. Le message ne doit pas comporter de dessin.
3. Lorsque vous recevez le message de l'autre groupe, vous coloriez sur la ligne droite déjà tracée un segment de la longueur indiquée. Vous pouvez aussi utiliser la fiche-navette pour demander des informations supplémentaires.
4. Vous envoyez à l'autre groupe le segment que vous avez colorié afin qu'il vérifie sa longueur. Si elle est juste, le groupe vous donne un autre segment à colorier. Si elle est fausse, il vous en informe et complète les explications.

[3] D'après « Construire les nouveaux nombres » (Canopé Editions)

REGLES GRADUEES [4]

DESCRIPTION RAPIDE

Les élèves disposent d'une bande unité et d'une règle à graduer. Ils sont invités à construire des « règles » graduées pour pouvoir ensuite tracer et mesurer des segments dont la longueur est exprimée par une fraction d'unité.

MATÉRIEL : Pour chaque élève :

- des bandes-unités de 10,5 cm de longueur ;
- un rectangle de papier de couleur à transformer en règle graduée (on peut massicoter des rectangles dans la longueur d'une feuille A4)

CONSIGNES

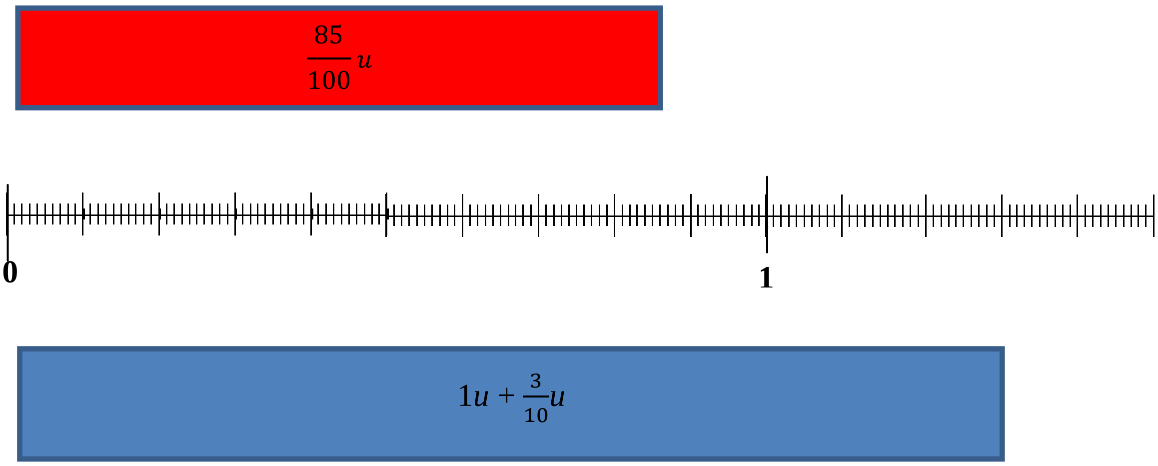
1. Cette règle n'est pas encore graduée. On veut pouvoir l'utiliser pour tracer des segments dont la longueur est exprimée en quarts de bande-unité. A toi de la graduer convenablement …
2. Compare ta règle avec celles de tes camarades. Lesquelles te paraissent être les mieux graduées ? Pour quelles raisons ?
3. Comment utiliser ces règles pour tracer un segment de longueur $\frac{9}{4}$ u ?
   Un segment de longueur $\frac{17}{4}$ u ?

[4] D'après « Construire les nouveaux nombres » (Canopé Editions)

BANDES ACCOLEES[5]

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures….

MATERIEL :



- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur 1u + $\frac{3}{10}$u et $\frac{85}{100}$ u à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.
2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de 1u + 3/10 u et de 85/100 u. (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettrez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

[5] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3» - Canopé (à paraitre)

L'APPRENTI COMPTABLE [6]

DESCRIPTION RAPIDE :

- Dans cette activité, les élèves se retrouvent dans un 1er temps plongés en l'an 1500. Ils disposent uniquement des écritures sous forme d'entiers, de fractions décimales ou de sommes de ceux-ci.

  Ils doivent trouver comment faire pour additionner des nombres écrits à l'aide de fractions décimales, puis écrire un court texte pour expliquer leur démarche.
- Dans un 2ème temps, après qu'ils se sont rendus compte que la majorité des méthodes proposées sont fastidieuses, la découverte de Stevin, « les nombres de Disme », leur est alors exposée : elle permet de calculer avec ces nombres « selon la vulgaire manière [...] des nombres entiers ».

MATERIEL : l'énoncé !

> Nous sommes en l'an 1500 ap. J.C.
>
> A cette époque, les seuls nombres connus sont : les entiers, les fractions, les fractions décimales, et les sommes d'un entier et de fractions décimales.
>
> Tu apprends le métier de comptable.
>
> Pour ta formation, le comptable qui t'emploie t'a chargé, aujourd'hui, d'effectuer une addition. Ensuite, lorsque tu sauras faire, tu devras transmettre ton savoir-faire à un apprenti encore moins expérimenté que toi.
>
> Tu dois effectuer la somme des trois quantités écrites dans les cadres ci-dessous :
>
> $\boxed{27u + \frac{8}{10}u + \frac{4}{100}u + \frac{7}{1000}u}$ $\boxed{37u + \frac{6}{10}u + \frac{7}{100}u + \frac{5}{1000}u}$ $\boxed{875u + \frac{7}{10}u + \frac{8}{100}u + \frac{2}{1000}u}$

Pour chaque élève :
- L'énoncé

Pour les groupes :
- Une affiche ou tout support pouvant être projeté.

Pour le professeur :
- Le diaporama « la Disme »

CONSIGNES

1. Travaille seul. Lorsque tu auras terminé, écris une explication pour ton apprenti, sans attendre que tes camarades aient fini.
2. Mettez-vous d'accord, par groupe, sur une façon de procéder et rédiger un mode d'emploi.
3. Quelle impression te font toutes ces méthodes utilisées dans la classe ?

[6] Adapté de « Construire les nouveaux nombres du Cm1 à la sixième» - Canopé (à paraitre)

RANGER DES SURFACES[7]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves en binôme, ont à comparer des surfaces dont la mesure de l'aire leur est donnée en écriture décimale. Pour avoir un appui sur lequel fonder leur raisonnement, ils construisent d'abord une de ces surfaces, à l'aide de pièces dont les aires sont des fractions décimales de celle d'un rectangle unité donné.

PREREQUIS : Pour aborder cette activité, les élèves doivent avoir été familiarisés :

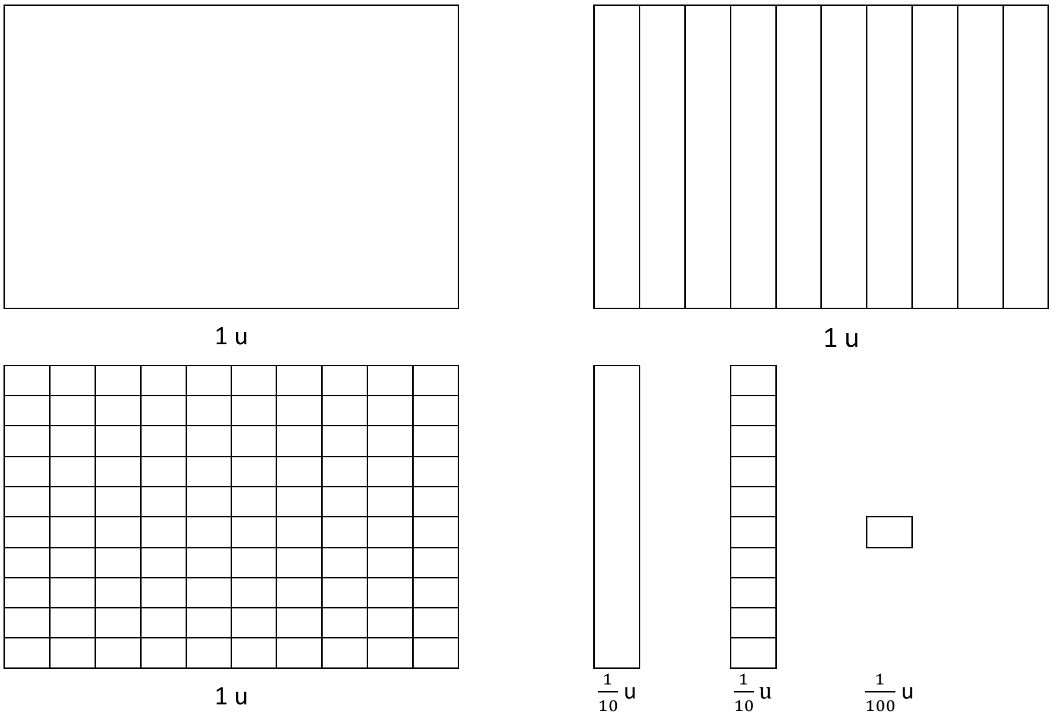
- Avec la notion d'aire
- Avec la notion de fraction décimale (dixième, centième)
- Avec la notion d'écriture décimale (en lien avec l'écriture fractionnaire d'un décimal)

MATERIEL : par binôme

- Une fiche « énoncé » donnant les indications suivantes :

surface	a	b	c	d	e	f
aire	5,05 u	10,24 u	2,7 u	5,5 u	2,12 u	2,08 u

- Des surfaces à découper, telles que celles présentées ci-dessous, en quantité suffisante :



Pour les mises en commun :

Des « surfaces à découper » en grand modèle manipulables au tableau, ou représentées sur TBI pour pouvoir être dupliquées.

CONSIGNES

1. Avec le matériel que je vous ai distribué, vous ne devez construire qu'une seule surface : celle qui correspond à la lettre que je vous ai indiquée (vous pouvez utiliser des ciseaux pour effectuer des découpages et votre colle pour coller votre surface réponse sur la feuille).
2. Ensuite, quand vous aurez terminé, vous rangerez toutes les surfaces, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, mais sans en construire de nouvelles, juste en regardant les nombres et en utilisant ce qu'ils veulent dire, vous écrirez votre rangement au dos de la feuille.

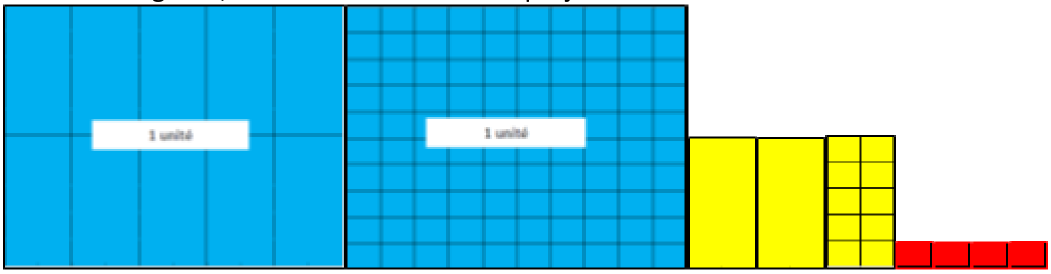
[7] Adapté de Capmaths- CM1 Hatier 2010

DES RECTANGLES A FOISON [8]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves manipulent des rectangles unités concrètement ou mentalement, pour déterminer l'aire d'une surface obtenue en les dupliquant un certain nombre de fois.

MATERIEL : Pour l'enseignant

- Des « rectangles », comme ceux-ci-dessous projetés au tableau



- Ces mêmes rectangles en grand modèle découpés (ou représentées sur TBI pour pouvoir être dupliqués) qui pourront être manipulés et échangés lors des mises en commun (au moins 23 bleus, 40 jaunes, et 10 rouges)
- Un tableau de numération « dynamique » dans lequel on peut faire coulisser (et grouper) des étiquettes chiffres, comme dans le tableau ci-dessous.

0	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0
						,				
millions	cent mille	dix mille	mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix millièmes

CONSIGNES

1. Déterminer la mesure en unités u de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 10 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge
2. Déterminer la mesure en unités u de l'aire totale de la surface obtenue en prenant 100 fois chacune des surfaces colorées en bleu, jaune et rouge

[8] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3»- Canopé (à paraitre)

LES BONBONS RUBANS [9]

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves disposent de deux « bonbons » rubans : un ruban A qui mesure 3 unités, un ruban B qui en mesure 8. Ils doivent trouver combien de fois la longueur du ruban A est contenue dans celle du ruban B.

MATÉRIEL :

Bonbon ruban B

Unité

Bonbon ruban A

Pour le professeur :

- une bande unité ;
- quelques exemplaires du ruban A de longueur 3 unités et du ruban B de longueur 8 unités.

Pour chaque élève :

- des bandes longues comme le ruban A ;
- une feuille A4 sur laquelle construire le ruban B.

CONSIGNES

1. Le ruban A mesure 3 unités, le ruban B mesure 8 unités. A votre avis, le ruban B est long comme combien de fois le ruban A ?
2. Comment construire un segment de longueur 8 unités à partir du ruban A sans utiliser de règle graduée ?
3. Avez-vous changé d'avis ?

[9] Adapté de « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 » - Canopé (à paraitre)