At 21 : Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3
Quelles perspectives ?

Lalina Coulange[1], Grégory Train[2]

[12]Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux;

lalina.coulange@espe-aquitaine.fr gregory.train@espe-aquitaine.fr

Résumé : Dans cette contribution, nous abordons des questions didactiques relatives à différentes acceptions possibles des fractions (partage de l'unité, partage d'une grandeur, commensuration et quotient) potentiellement rencontrées au cycle 3. Nous faisons état d'une part, de résultats liés à une recherche collaborative avec des enseignants illustrant des potentialités et des limites de la « fraction partage » (en début de cycle 3) et d'autre part, de perspectives en lien avec une acception relativement oubliée au sein de l'institution, celle de la « fraction commensuration » (Brousseau et Brousseau, 1987) que nous considérons comme propices à aborder la « fraction quotient » et certaines de ses potentialités. Ces perspectives nous ont notamment conduits à élaborer et à « pré-expérimenter » une ressource destinée à des élèves de fin de cycle 3, qui a été présentée à l'occasion de ce colloque.

Mots clefs : fractions, partage, commensuration, quotient

Introduction

Notre étude concerne l'enseignement de l'objet « fraction » dans la transition primaire-secondaire inscrit depuis 2016 au sein d'une nouvelle organisation institutionnelle reposant sur un unique cycle 3. Les écueils que pose l'enseignement de cet objet de savoir dans cette transition sont largement documentés (voir la conférence de C. Chambris dans les actes du colloque[1]). Au-delà de ces constats, et compte tenu de la volonté institutionnelle, récemment renouvelée, de maintenir cet objet d'enseignement au cœur du nouveau cycle 3, nous adoptons une perspective différente à plusieurs égards. Il s'agit d'examiner les potentialités que recouvre l'étude de l'objet fraction dans cette transition, d'examiner les possibilités qu'offre l'étude, dans l'une et l'autre des institutions, des différentes acceptions de la notion de fraction. Cette posture nous amène à reconsidérer une acception quelque peu oubliée des fractions - l'aspect *commensuration* – et à en examiner son étude comme élément possiblement fédérateur.

Les réflexions développées dans ce texte prennent appui largement et s'inscrivent dans un projet plus large d'observations et d'analyses des pratiques enseignantes au sein d'un Lieu d'Education Associé aquitain (le LéA Ecole élémentaire d'application Carle Vernet accueillant des élèves situé dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux[2]).

[1] Conférence : Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle , p 12
[2] Pour plus d'informations, voir sur le site des LéA de l'IFE (Institut Français d'Education) : http://ife.ens-lyon.fr/lea

Les différentes acceptions de la notion de *fraction*

Deux acceptions institutionnelles : la fraction "partage" et la fraction "quotient"

Dès 1996, les programmes de la classe de sixième présentent le point de vue nouveau à construire concernant la fraction $\frac{a}{b}$

A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :

- *le quotient* $\frac{a}{b}$ *est un nombre,*
- *le produit de* $\frac{a}{b}$ *par b est égal à a.*

Ceci permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ *comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre. Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités* (programmes de la classe de 6^{e} de 1996[3], p. 6)

Cette nouveauté est réaffirmée dans les nouveaux programmes de 2016 ainsi que dans les documents ressources associés. Dans le même temps, ces mêmes programmes proposent une réorganisation du cycle 3 (CM1-CM2-Sixième). Ils positionnent en conséquence l'étude de cette nouvelle acception de la fraction $\frac{a}{b}$ comme *quotient* (décrite ci-avant) en aval d'une acception plus anciennement installée, la fraction $\frac{a}{b}$ vue dans son aspect *partage*[4], au cœur même de ce cycle.

Du CM1 à la 6e, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6e (programmes de 2016[5])

Il s'agit donc, dans ce passage d'une fraction *partage* à une fraction *quotient*, ancré traditionnellement dans le passage de l'école au collège, de poursuivre les objectifs communs de construction du statut de nombre à attribuer à $\frac{a}{b}$ (sur lesquels les élèves seront par la suite amenés à *opérer* – addition, soustraction, multiplication, division) tout en pensant l'aménagement d'une progressivité au sein de ce cycle.

Des constats sur la *fraction partage*

Un premier constat est que *les élèves arrivent à l'école avec des « connaissances familières » ou des « concepts quotidiens » du fractionnement de l'unité* et que ces connaissances jouent un rôle important dans les situations visant l'enseignement de la fraction « partage de l'unité ».

Une ressource unique, visant à introduire les fractions en lien avec la mesure de longueurs a été utilisée par trois enseignantes du LéA, dans les séances observées au sein de trois classes de double niveau (2 classes de CM1-CM2 et 1 classe de CE2-CM1), comportant des groupes d'élèves de CM1 (d'effectif : de six à environ dix élèves par classe). L'enjeu de ces situations[6] est d'introduire le fractionnement de l'unité pour mesurer des longueurs de segments avec une bande unité (qui sert d'étalon de longueurs). Les segments sont choisis de manière à ce que leurs mesures fassent intervenir des demis, des quarts et des huitièmes de l'unité. Le procédé attendu repose sur des

---

[3] Ce programme est disponible sur : *www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_N.php?num=61&rang=10 (voire la page 118, pour l'extrait cité dans le texte).*

[4] « Lorsqu'on coupe une unité en un nombre entier de parts égale et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction. » (p. 1 du document ressource du programme de 2016, disponible sur : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fractions_et_decimaux/60/1/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_V2_681601.pdf)

[5] Accessibles sur http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94708)

[6] Ces situations sont tirées de l'ouvrage ERMEL *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* CM1 (2005) – elles sont inspirées d'une ingénierie didactique (Douady et Perrin 1986)

pliages en deux successifs de bande qui permettent de matérialiser des fractions de l'unité et de mesurer/communiquer la mesure des segments donnés initialement aux élèves, dans un dispositif d'émission et de réception de messages entre pairs. A l'occasion des séances observées, nous avons constaté que peu d'élèves ont mis en œuvre des pliages en deux de la bande unité de façon spontanée. Les élèves ont reconnu perceptivement des demis, voire des quarts de l'unité. Le milieu matériel de la situation ne contraint pas *a priori* de stratégies liées au pliage dans la production du « quart » ou de la « moitié », qui s'avèreront pourtant nécessaires pour la production du huitième de l'unité (non reconnaissable de manière perceptive). On peut d'ailleurs s'interroger sur le sens donné à ce « quart » ou à cette « moitié » par les élèves : par exemple envisagent-ils le quart comme un partage équitable en quatre de l'unité, ou en deux de deux de l'unité ? Quoiqu'il en soit, lors de nos observations, les enseignantes ont été contraintes de négocier l'introduction du procédé de pliage en deux : en le faisant apparaître comme un moyen de valider qu'il s'agit bien d'un demi ou d'un quart de l'unité – en lien avec le caractère superposable prouvant l'égalité des nouvelles longueurs produites. L'extrait de transcription ci-dessous atteste du type d'interactions entre élèves et enseignantes permettant d'officialiser l'introduction du procédé de pliage.

E1 : ça c'est un quart [cf. geste ci-contre] ENS : Comment tu sais ? Comment tu peux être sûr ? [E hausse les épaules] ENS : Comment tu peux être sûr ? E1 : C'est environ vers là ENS : Oui mais si on veut pas dire environ vers là ? Comment on fait ? ça veut dire quoi un quart de l'unité E1 : C'est la moitié… c'est moins que la moitié L : La moitié ça veut dire quoi pour toi la moitié ? E1 : La moitié c'est là [en montrant le milieu de la bande unité] ENS : Comment tu sais que c'est la moitié ? E1 : Ben parce que – il y a le mi [lieu ?] // il y a le même espace des deux côtés / ENS : Pour être sûr comment tu fais ? Pour être sûr de ça ? E1 : [prenant un stylo] je vais mesurer avec ça ENS : On n'a pas le droit de mesurer avec ça [léger rire de ENS – E1 : pourquoi] parce que il faut juste / parce que/ tu te sers de la bande unité /// comment tu peux être sûr ? / que là c'est la moitié comme tu dis ? E1 : On peut mesurer avec notre doigt / E2 : On plie ENS : Comment ? Comment E2 ? E2 : On le plie / ENS : On le plie comment ? E2 : Comme [E2 prend la bande unité et la plie en deux] E2 : Les CM2 ils ont fait comme ça la dernière fois ENS [en prenant la bande unité pliée] : ça c'est quoi alors ? [en la dépliant et en pointant une partie correspondant à une moitié] si vous faites ça c'est quoi là ? E1 et E2 : La moitié / ENS : La moitié – un demi d'accord d'une unité // [en remontrant le message] sauf que lui il veut/ eux / ils vous parlent de quart ? / E1 : Donc il faut encore le plier ENS : Pourquoi ? [E replie en deux la bande unité déjà pliée en deux] Pourquoi tu le plies encore ? / E : Pour faire un quart ENS : Pourquoi ? ça veut dire quoi un quart pour toi ? E1 : Celui qui a fait ça // un quart / ENS : Pourquoi ? c'est quoi un quart pour toi ? ça [en reprenant la bande pliée en 4 - dépliée] ça veut dire que tu as fait quoi pour obtenir un quart ? E2 : C'est plié / ENS : En combien / E2 : En quatre ENS : Alors il est où le quart [E2 montre une part] D'accord	E1, E2 : binôme d'élèves ENS : enseignante  *L'élève a reconnu perceptivement un quart de l'unité (sans doute comme « moitié de la moitié »).* *Il fait de même pour « la moitié » en réponse à la question de la maîtresse – le caractère d'égalité de longueurs est mis en avant.* *L'enseignante pointe la nécessité d'un moyen de valider ce caractère d'égalité pour faire émerger le pliage en deux.* *Déplacement de signification en lien avec le pliage : la moitié de l'unité est obtenue par un pliage en deux.* *Prolongement du procédé du pliage et extension de signification au quart de l'unité* *Le « plié en quatre » est énoncé pour réduire la distance entre l'action de pliage et le résultat de l'action – l'obtention de 4 parts*

Figure 1 : Négociation liée au procédé de pliage d'une bande unité

Cet extrait illustre également d'un deuxième constat, fait sur la base de nos observations dans les classes : il s'agit *de tensions récurrentes entre les actions des élèves et les résultats de ces actions*. En effet dans les situations de classe observée, les institutionnalisations se centrent moins les actions (de pliage, de partage…) des élèves, que sur l'analyse des résultats de ces actions. Ainsi dans la situation évoquée ci-avant, le huitième de l'unité est obtenu par un pliage en deux du quart de l'unité – lui-même obtenue par un pliage en deux de la moitié de l'unité, etc. Notons que dans une des trois classes, les élèves (ne disposant pas d'une dénomination « familière ») le qualifient d'ailleurs de « moitié du quart » ou de « demi-quart ». Ce n'est que par le biais d'une intervention enseignante, que le lien sera fait entre ce « demi-quart » et un partage en huit qui conduit à (re)définir le huitième de l'unité.

E : un demi quart ENS : un demi quart – je le plie en deux ? ENS : Ah génial un demi quart [L écrit à la suite de « 2u + » -« $\frac{1}{2}$- » puis se reprend – efface] alors je vais l'écrire comme ça un demi quart [un demi $\frac{1}{4}$-]. Est-ce que quelqu'un a trouvé autre chose qu'un demi-quart ? Personne n'a trouvé autre chose que un demi quart ? C'est très intéressant ce que vous avez trouvé / alors on va voir avec une bande unité / ici j'ai ma bande unité d'accord ? (…) Comment je fais pour trouver un demi quart ? Je commence par faire quoi ? [E : plié en deux] Je le plie en deux / là j'ai des [E : demi] demi / d'accord / E : tu continues tu replies et tu replies encore une fois ENS : et je le replie encore ? / E : en deux ENS : parce que là j'ai des quarts et tu m'as dit un demi quart / je le replie en deux ? / E : en deux parts égales / ENS : Oui / merci en deux parts égales / Es (en chœur) : et ça fait un demi quart	E : élève ENS : enseignante *L'enseignante prend en compte la formulation des élèves, l'évalue et rend publique la désignation « demi-quart ». Elle la stabilise provisoirement en l'écrivant au tableau et en mélangeant après hésitation, des écritures alphabétique et numérique.*
ENS : Alors regardez je viens de faire un demi quart / un demi quart // [ENS déplie la bande unité] Regardez / qu'est-ce que vous voyez / [E : ça fait beaucoup] oui / regardez combien il y en a ? Regardez combien de parts il y a ? E : un deux trois quatre cinq six sept huit ENS : oui huit / un demi quart on pourrait l'appeler autrement alors ? E : un huitième / ENS : Pourquoi ? Pourquoi BE dit un huitième E : Parce qu'il y en a huit / parce qu'il y a huit parts égales ENS : on a partagé en / t'as vu CH // c'était très intéressant de dire un demi quart / Bon un demi quart on se rend compte que finalement c'est un deux trois quatre cinq six sept huit / donc on est en huitième	*L'enseignante négocie un changement de point de vue sur le résultat de l'action – en faisant « le demi du quart » de l'unité on a partagé l'unité en huit* *Désignation dans un genre de discours premier par un élève du « huitième » et mise en relation avec le nombre de parts égales de l'unité*

Figure 2 : Du demi-quart au huitième de l'unité

Notons que c'est bien le résultat de l'action (un partage en huit de l'unité) qui sera institutionnalisé que ce soit dans un affichage associée à la situation (faisant apparaître la bande unité pliée en huit dépliée, faisant ainsi apparaître des huitièmes de l'unité) ou dans les sommes d'écritures fractionnaires symboliques associées ($\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$ ou $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$). L'écriture symbolique $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}(\frac{1}{4})$ n'a pas le « droit de cité » dans les classes observées (alors qu'elle est plus proche de l'action de production du huitième de l'unité[7]) pour des raisons que l'on comprend d'ailleurs assez bien : la multiplication de fractions n'est pas au programme à ce niveau scolaire alors que cette écriture y renvoie potentiellement du point de vue des enseignantes.

Pourtant nous faisons un autre constat en lien avec celui qui vient d'être évoqué. Dans les situations observées, liées à l'enseignement de la fraction dite partage de l'unité dans des classes de CM1, *des partages (en deux) des fractions de l'unité interviennent de manière récurrente.* Ainsi nous constatons qu'un quart est d'abord défini comme la moitié d'un demi, un huitième comme la moitié

[7] Une telle écriture était pourtant envisagée dans l'ingénierie originale (Douady et Perrin 1986), mais n'est pas reprise dans les ressources Ermel (2005).

d'un quart, mais également lors d'une des séances observées, un sixième de l'unité est construit comme la moitié d'un tiers de l'unité.

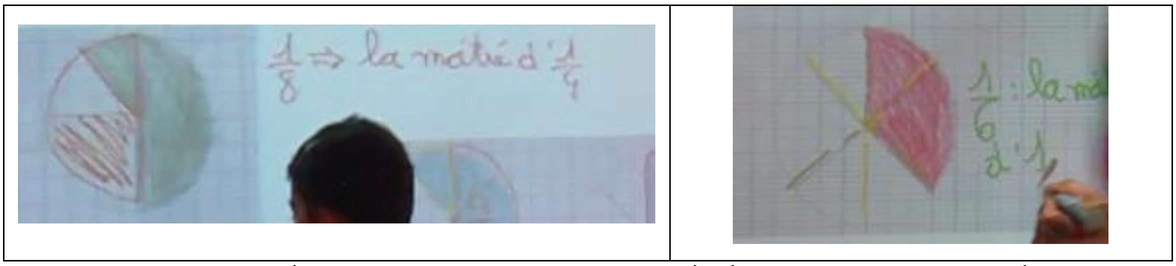


Figure 3 : $\frac{1}{4}$ définie comme la moitié de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ comme la moitié de $\frac{1}{3}$

C'est donc un opérateur partage « plus large » que le seul partage de l'unité qui est convoqué. Nous constatons par ailleurs que *cet opérateur partage d'une unité mais aussi de $\frac{1}{n}$-ièmes d'une unité supporte des raisonnements associés à la production d'équivalences d'écritures fractionnaires qui constituent une potentialité de la « fraction-partage ».* Lors d'une des séances observées, une enseignante a demandé à ses élèves de CM1 de produire des écritures équivalentes à 1/2 (le plus possible). Des élèves ont produit une première proposition erronée sur la base d'une mauvaise interprétation de leur schéma : $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}$. L'intervention d'un autre élève de la classe sollicitée par l'enseignante permet d'invalider cette proposition et de l'amender – en précisant que ce qui était considéré comme $\frac{1}{8}$ de l'unité était en fait $\frac{1}{6}$ puisque correspondant à la moitié de $\frac{1}{3}$ de l'unité, ce qui permet de produire l'équivalence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

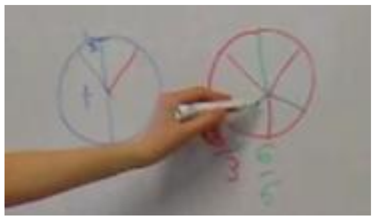
vous êtes d'accord ? *ENS montre chaque part* un deux trois quatre / cinq / six donc on a six sixièmes *l'élève écrit à côté de* $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$ *en vert/ donc ici vous avez quoi toujours un tiers- ENS reprend l'exemple sur la deuxième figure retrace le contour et zèbre l'espace d'un tiers en vert et pointe* $\frac{1}{3}$*- sur les deux figures* plus // ENS écrit $\frac{1}{6}$ // tu es d'accord E ? tout le monde est d'accord donc un demi égale un tiers plus un sixième *ENS écrit au tableau à la suite de* $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	

Figure 4 : de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

Notons qu'un tel raisonnement se fait toujours *via* la relation entre des actions de partage de l'unité ou de fractions de l'unité (la moitié d'un tiers) et les résultats de ces actions en référence à l'unité (on en obtient six parts, soit des sixièmes de l'unité). Toujours au sein de la même classe, c'est aussi une généralisation de ce type de raisonnements qui va être formulée –en référence à l'opérateur partage. En effet les élèves ayant constaté à travers différents exemples qu'une écriture fractionnaire avec un dénominateur double du numérateur paraît toujours équivalente à $\frac{1}{2}$, l'enseignante généralise cette « trouvaille », en la recontextualisant dans l'univers du partage d'unités.

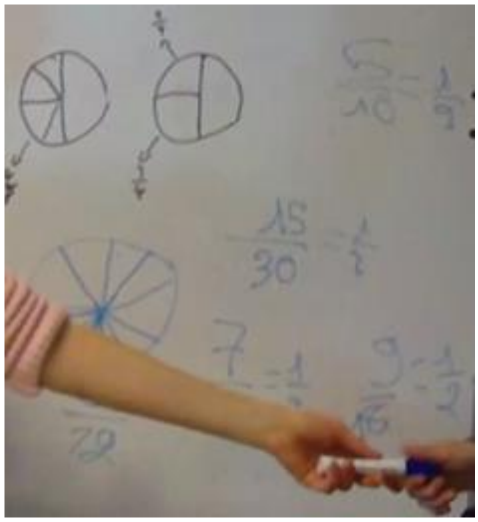
ENS : alors c'est quoi c'est quoi voilà égale un demi L'élève écrit $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ est-ce que vous en avez trouvé d'autres ? E : sept quatorzièmes *E écrit* $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ENS : tu peux leur prouver que sept quatorzièmes c'est bien un demi ? oh oh je vous parle est-ce que vous pouvez leur prouver que sept quatorzièmes c'est bien un demi les deux élèves échangent entre eux *E trace un disque* non mais sans le dessin leur prouver alors (…) est-ce que sept c'est bien la moitié de quatorze ? (…) donc si je partage quatorze et que je prends sept parts tu es d'accord E ou pas ? est-ce que sept quatorzième ça fait bien un demi si je partage en quatorze et que je prends sept parts est-ce que j'ai bien la moitié (…) ah les dixièmes *E écrit* $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ // tout le monde est d'accord ou pas bon donc du coup pour trouver les équivalences à un demi quelqu'un a une technique ? /// comment on fait pour trouver des équivalences à un demi ? (…) E : un centième un centième ! et la moitié c'est cinquante	

Figure 5 : la généralisation d'un raisonnement permettant la production d'écritures fractionnaires équivalentes à $\frac{1}{2}$

Des constats sur la fraction « quotient »

Penser cette nouvelle acception quotient de $\frac{1}{2}$passe par l'examen de ses potentialités, en termes de possibilités offertes dans la réorganisation de savoirs anciens et aussi, en termes de prises d'appui possibles dans la construction de savoirs nouveaux. Nous dressons un certain nombre de constats dans ce sens, ci-dessous.

Si l'écriture à virgule des nombres décimaux est classiquement présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale (ou d'une somme de fractions décimales), regardée sous son aspect *partage*, la relation entre écriture à virgule et *quotient* peut relever d'une nouveauté. De ce point de vue, *36,45 peut (doit) être alors (re)vu comme le nombre (unique) qui multiplié par 100 donne 3645*. C'est une *définition* nouvelle d'un nombre décimal qui peut alors s'installer : « *un nombre décimal est un nombre qui multiplié par 1, 10, 100… donne un nombre entier* ». Cette définition actée, une justification du produit de deux décimaux peut être donnée en lien direct avec l'algorithme de la multiplication posée de deux entiers :

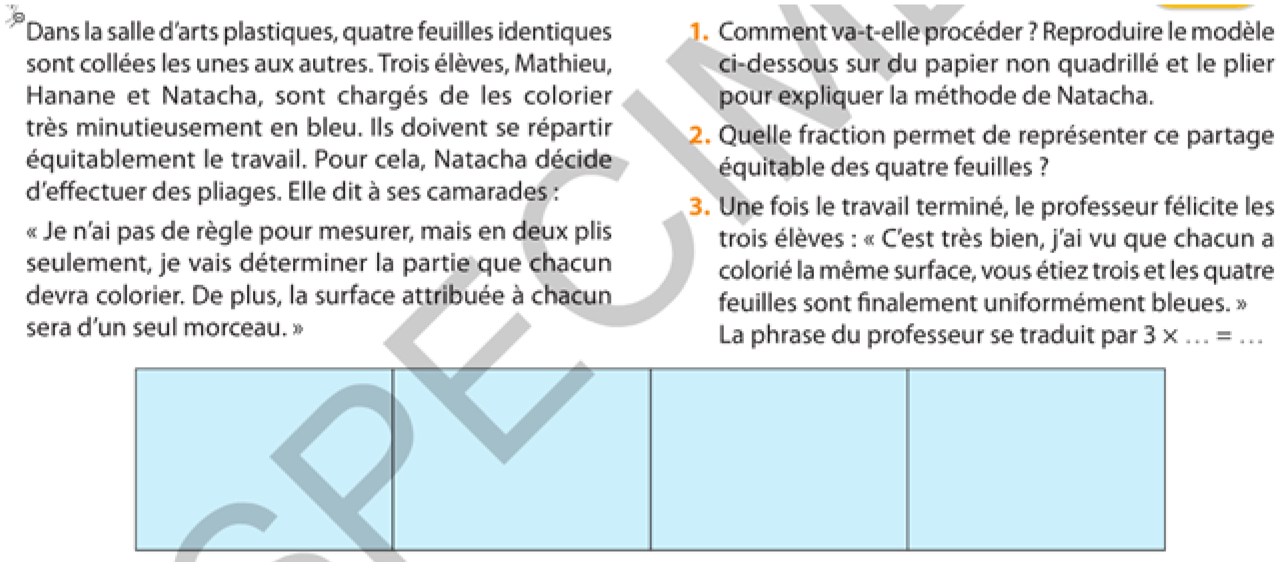
si l'on s'intéresse au produit P = $3{,}7 \times 5{,}3$ *on a* $3{,}7 \times 10 = 37$ *et* $5{,}3 \times 10 = 53$ *; puis* $37 \times 53 = (3{,}7 \times 10) \times (5{,}3 \times 10) = 3{,}7 \times 5{,}3 \times 100 = P \times 100$. *P est donc le nombre qui multiplié par 100 donne* 37×53*…*

Plus généralement, le produit de deux décimaux est le nombre qui multiplié par 1, 10, 100… donne le produit de deux entiers.

Si $\frac{7}{4}$ peut toujours s'appréhender dans son double aspect « *partage* » et « *quotient* », il en est autrement de $\frac{7}{-4}$ Comment envisager le partage de 7 en -4 ? En revanche, à partir du produit de deux décimaux relatifs préalablement installé à la partir de l'aspect quotient, *on peut rapprocher*$\frac{7}{-4}$ *du nombre unique qui multiplié par -4 donne 7 à* $(-4) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 7$ *pour conclure à l'égalité*$\frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$.
Plus généralement, il est possible d'établir ainsi que $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Ces quelques constats n'épuisent[8] pas la liste des potentialités qu'ouvre l'aspect *quotient* de $\frac{b}{a}$

Toutefois, la question de l'articulation entre les deux aspects *partage* et *quotient* des fractions est délicate et reste entière. Des tentatives d'articulation sont présentes dans différents manuels scolaires (de Sixième) mais elles témoignent souvent du caractère délicat de cette entreprise.



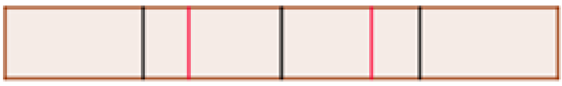
Dans la salle d'arts plastiques, quatre feuilles identiques sont collées les unes aux autres. Trois élèves, Mathieu, Hanane et Natacha, sont chargés de les colorier très minutieusement en bleu. Ils doivent se répartir équitablement le travail. Pour cela, Natacha décide d'effectuer des pliages. Elle dit à ses camarades :

« Je n'ai pas de règle pour mesurer, mais en deux plis seulement, je vais déterminer la partie que chacun devra colorier. De plus, la surface attribuée à chacun sera d'un seul morceau. »

1. Comment va-t-elle procéder ? Reproduire le modèle ci-dessous sur du papier non quadrillé et le plier pour expliquer la méthode de Natacha.
2. Quelle fraction permet de représenter ce partage équitable des quatre feuilles ?
3. Une fois le travail terminé, le professeur félicite les trois élèves : « C'est très bien, j'ai vu que chacun a colorié la même surface, vous étiez trois et les quatre feuilles sont finalement uniformément bleues. » La phrase du professeur se traduit par 3 × … = …

Figure 6 : Fraction quotient – extrait du manuel Mission Indigo 6e

Dans l'extrait ci-dessus, il s'agit de prendre appui sur le pliage en trois de quatre feuilles pour aménager ce passage de la fraction *partage* à la fraction *quotient*. Notons d'abord que le pliage en 3 envisagé semble aller de soi pour les élèves. Aussi, le fait d'accoler les quatre feuilles les unes aux autres apparaît comme seule garantie pour détourner le regard des élèves du partage « d'une unité feuille » au partage « de quatre unités feuilles ». Pourtant à ce stade de l'activité, les élèves disposent d'un modèle faisant co-exister le pliage en trois et la référence à l'unité « feuille ».



Le caractère problématique s'exprime peut-être plus fortement dans la dernière question de cette ressource. Interrogés sur les actions qu'ils viennent de conduire, au mieux, les élèves pourront-ils dire qu'ils ont obtenu « un tiers » de quatre feuilles, mais le projet est tout autre et on ne voit pas bien comment le passage envisagé à « $3 \times \frac{4}{3} = 4$ » ne pourrait se faire sans une action forte de l'enseignant.

L'extrait de manuel cité ci-dessous partage le même projet. Toutefois, le caractère problématique semble s'exprimer, de manière peut-être plus appuyée encore, dans les différentes grandeurs « unités » en jeu dans le scénario et les rôles qui leurs sont assignés dans les différents raisonnements à conduire. La présence d'un quadrillage est au cœur de cette difficulté. Ainsi, dans la première question, si le rectangle rouge est d'emblée déclaré comme rectangle unité, c'est à ce stade, le carreau *unité* du quadrillage qui est seul point d'appui pour apprécier la fraction représentée par le rectangle vert. Les questions suivantes entretiennent la même confusion. La reproduction du rectangle violet (question 2) mais également son partage en trois rectangles

[8] Le lecteur pourra par exemple penser à la justification de la somme, du produit, etc. de deux quotients.

identiques (question 3) convoquent fortement le carreau *unité*, alors que le projet, semble-t-il, est de s'en défaire. En tout état de cause, la dernière question apparaît assez éloignée de ce que les élèves auront effectivement réalisé. Au mieux, auront-ils remarqué que *« 4 rectangles rouges = 3 rectangles verts »*, entretenant une distance certaine avec l'égalité à compléter.

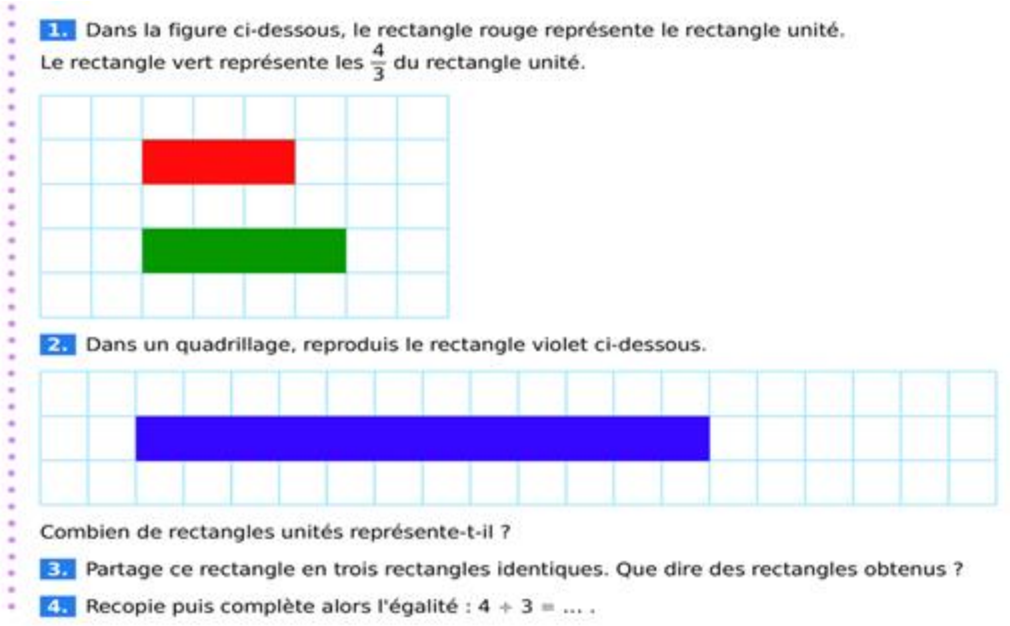


Figure 7 : Fraction quotient – extrait du manuel Sésamaths 6e

Vers une autre acception de la fraction $\frac{a}{b}$ dans le contexte des grandeurs : extension d'un opérateur de partage ?

Le contexte particulier de la grandeur longueur est classiquement évoqué pour illustrer les différences entre l'aspect *partage* et l'aspect *quotient* de la fraction.

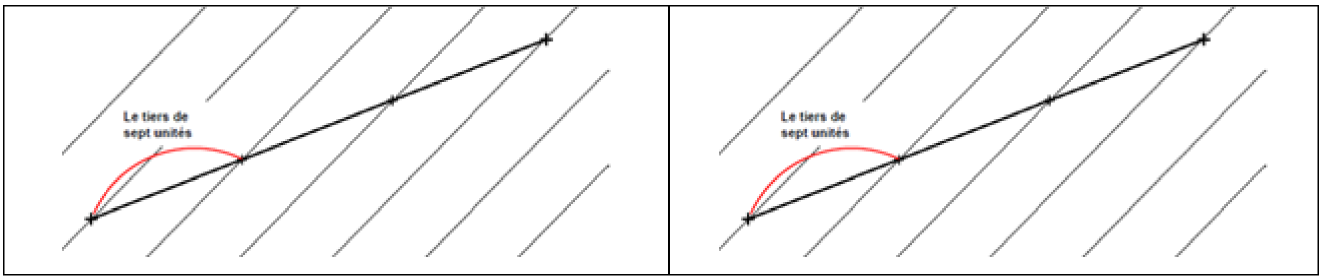


Figure 8 : Grandeur longueur et Fraction partage – Fraction quotient

Dans ce contexte, la construction d'un segment de longueur $\frac{7}{3}$ cm prenant appui sur l'aspect *partage* renvoie aux actions suivantes (outillées par un instrument particulier : le « guide-âne », un réseau de droites parallèles permettant le partage d'un segment de longueur donnée en segments de longueurs égales) : un segment de longueur 1 cm partagé en 3 segments de même longueur, puis le report de ce segment de longueur « un tiers de cm » qui permet d'obtenir un segment de longueur $\frac{7}{3}$ cm (7 fois $\frac{1}{3}$ cm). Du côté de l'aspect quotient, la même construction s'organise ainsi : un segment de longueur 7 cm que l'on partage en 3 segments de même longueur (le $\frac{1}{3}$ de 7 cm).

Si ce contexte des longueurs illustre bien les différences entre *partage* et *quotient*, l'idée de *partage* d'une grandeur apparaît également comme un dénominateur commun des deux constructions envisagées. De ce point de vue, la construction *quotient* vise étendre l'action de partage à une grandeur autre que la grandeur *unité* (pour les fractions unaires, les constructions *partage* et *quotient* se superposent.). Ce geste de partage d'une grandeur autre que la grandeur *unité* est par ailleurs un geste mathématique potentiellement rencontré en amont par les élèves, comme l'illustrent les exemples développés ci-avant sur le *partage* de subdivisions de l'unité. Ainsi le tiers de 7 unités, c'est bien partager en en trois « 7 unités », comme on a partagé « une unité » en trois, mais également « $\frac{1}{3}$ d'unité » en deux, etc.

Ceci étant dit, se pose la question d'une prise d'appui sur cet opérateur de *partage étendu* (c'est-à-dire non restreint au partage « d'une unité ») dans le contexte de la mesure pour investir l'étude de nouveaux savoirs concernant l'objet fraction.

Considérons en premier lieu, la double égalité $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = \frac{c}{b} \times a$. Son examen dévoile une certaine complexité, liée aux rôles assignés aux différents « nombres grandeurs » potentiellement impliqués dans cette égalité. En considérant $13 \times \frac{5}{7} = \frac{13 \times 5}{7} = \frac{13}{7} \times 5$ sans faire abstraction des grandeurs, on peut considérer que « 13 fois le septième de 5 unités » est égal au « septième de 13 fois 5 unités ». Mais comment établir dès lors la dernière égalité, à savoir le fait que ces deux « expressions » sont également équivalentes à « 5 fois le septième de 13 unités » ?

Certes, cette équivalence (des deux premiers membres de l'égalité $13 \times \frac{5}{7} = \frac{13 \times 5}{7}$; $\frac{13 \times 5}{7}$ et le suivant $\frac{13}{7} \times 5$) est vraie mais du point de vue des « nombres grandeurs », le rôle assigné à 13 auparavant change radicalement : d'opérateur (« 13 fois »), il devient une grandeur (« 13 unités »). Notons par ailleurs que même débarrassée des grandeurs, cette difficulté ressurgit sous une autre forme, non moins délicate, au niveau des structures en jeu dans le calcul : pour effectuer le produit d'un nombre et d'un quotient, il s'agit de calculer le produit d'un autre quotient par un autre nombre ($13 \times \frac{5}{7} = \frac{13}{7} \times 5$)

Une autre acception possible dans le contexte des grandeurs : la fraction *commensuration*

Ces premiers constats conduisent à s'interroger sur une autre acception possible (que liée à l'opérateur partage d'une unité ou de plusieurs unités) de la fraction quelque peu oubliée dans le curriculum : la fraction *commensuration.* Dans ce point de vue, $\frac{a}{b}$ est interprété comme le rapport de deux grandeurs tel que *b* fois la première donne *a* fois la seconde.

Une expérimentation déjà ancienne menée par Brousseau et Brousseau (1987) au sein de l'école Michelet (élèves de CM) propose une approche de la fraction *commensuration*. La situation proposée consiste à déterminer l'épaisseur d'une feuille de papier en évaluant la hauteur d'un tas de feuilles empilées. La mesure de l'épaisseur $\frac{a}{b}$ de cette feuille (que l'on peut considérer comme la grandeur « millimètre par feuille ») est alors définie par le fait que *b* feuilles *mesurent a* millimètres.

Cette définition, dans le cadre des grandeurs, partage une proximité forte avec la caractérisation de $\frac{a}{b}$ comme le nombre qui multiplié par *b* donne *a* : si $\frac{a}{b}$ est l'épaisseur d'une feuille, c'est bien que b feuilles d'épaisseur $\frac{a}{b}$ *mesurent a* millimètres.

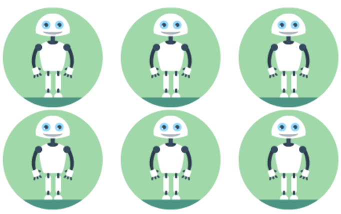
Dans le même temps, la fraction *commensuration* s'écarte volontairement de l'idée de *partage* (y compris étendu à plusieurs unités). Choisir un objet à mesurer (la feuille de papier) beaucoup plus petit que l'unité (le mm) engage à augmenter le nombre de feuilles *b* mais dans une direction éloignée de celle de partage : le rôle joué ici par b se distingue fortement de celui qu'il joue dans les autres acceptions de la fraction, étudiées préalablement. Si l'idée de partage existe, elle est celle du partage du millimètre, précisément *trop petit* pour être effectivement partagé : $\frac{a}{b}$ apparaît alors comme un résultat que l'on ne peut pas *effectuer* mais qui caractérise bien un résultat : la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier.

Les travaux sur l'aspect *commensuration* de la fraction semblent s'être taris par la suite. Une exception réside toutefois dans la situation dite des « automates » ou des « robots » (Ermel 1982, Cerquetti-Aberkane[9] 1992, Neyret 1995, Pressiat[10] 2009) qui a pu être exploitée de façon très isolée et dans des contextes parfois très différents (enseignement des fractions à l'école, formation des enseignants du primaire, remédiation au collège). Notons que le rôle de cette situation en lien avec l'aspect *commensuration* a été mis en avant par Neyret (1995).

Les robots, des situations liées à la *fraction commensuration*

En prise d'appui sur ces différents travaux, un scénario de classe a été construit visant à rapprocher la situation des « robots » de celle des « feuilles de papier » en vue de travailler l'aspect *commensuration* de la fraction. Nous ne rentrons pas ici dans le détail des aménagements ainsi apportés dans la conception de ce scénario. Il est toutefois un aménagement important : si la situation telle que conçue à l'origine, nécessitait l'utilisation d'un guide-âne, nous avons choisi de ne plus l'utiliser dans ce nouveau scénario car d'après nous, cet instrument pouvait induire un point de vue *partage* (étendu à plusieurs unités) à même de brouiller le point de vue *commensuration* de la fraction visé. Nous avons développé des ressources, en partie numériques (voire annexes téléchargeables sur le site du colloque[11]), dans le cadre d'un projet plus large d'étude des usages des tablettes tactiles en classe de mathématique (Projet e-FRAN, Perseverons – Université de Bordeaux[12]). Des expérimentations dans différentes classes sont actuellement en cours.

Le scénario général s'articule autour de l'étude du déplacement de robots sur une droite graduée. Il s'agit d'étudier et caractériser la longueur des sauts de robots pour pouvoir les distinguer. Le travail capitalisé autour de la caractérisation des longueurs des sauts des robots permet d'introduire une caractérisation fractionnaire de ces mêmes longueurs de sauts : *une longueur de saut de "5 unités en 3 sauts" sera noté* $\frac{5}{3}$. $\frac{5}{3}$ *désigne alors la longueur d'un saut (ou le nombre d'unités par saut).*



[9] La situation est reprise par cette auteure et M-C. Marilier sur le site TFM : http://tfl.roll-descartes.fr/
[10] http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html
[11] http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017
[12] http://www.espe-aquitaine.fr/les-projets

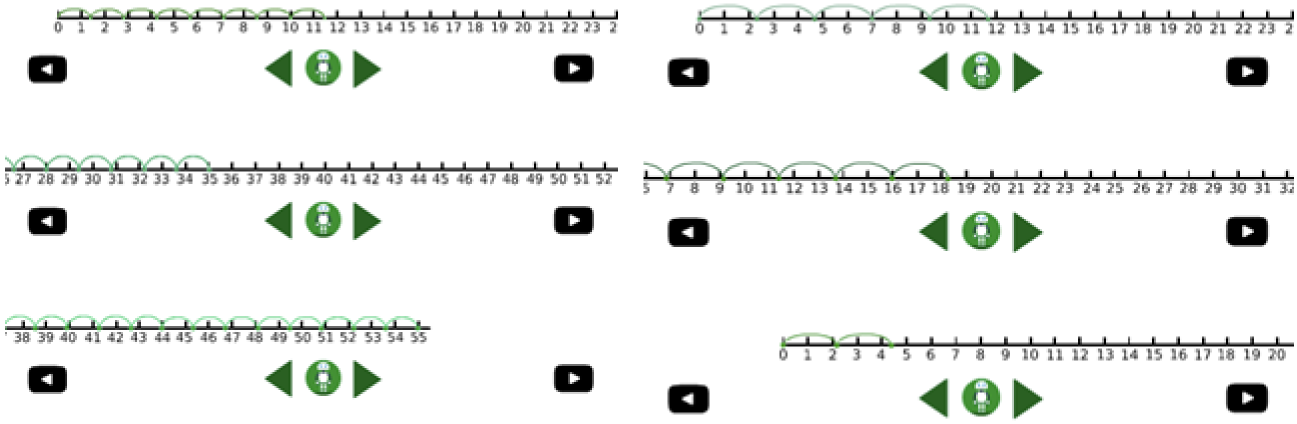


Figure 9 : Copies d'écrans - Extrait de la ressource « robots » (développée sous Scratch)

Le scénario détaillé des séances est également donné dans les annexes téléchargeables de ce texte. Dans cette section de notre texte, est fait état d'une pré-expérimentation du scénario conduite dans un contexte particulier : une élève de CM1 ayant par ailleurs débuté un apprentissage des fractions, conforme au curriculum actuel (l'aspect partage de l'unité) a expérimenté une partie de la ressource. Les transcriptions à l'étude ci-après sont extraites de cette pré-expérimentation. Nos analyses montrent globalement que cette élève n'identifie pas que la situation expérimentée relève du contexte déjà étudié de la fraction *partage* (elle ne fera mention des fractions à aucun moment) : ceci tend à prouver que ce sont deux aspects conceptuels distincts de la fraction qui sont en jeu et que leur mise en relation n'est pas évidente *a priori*. Dans le même temps, cette pré-expérimentation montre également que les tâches dans lesquelles des élèves de cycle 3 (à l'instar de cette élève de CM) peuvent être engagés et les réponses qu'ils formulent sont potentiellement une prise d'appui avérée pour la construction de connaissances attachées à l'objet *fraction commensuration, voire quotient*.

Un code commun de désignation d'un robot ayant été précédemment acté (« atteindre 3 unités en 4 sauts »), dans le scénario envisagé, les élèves sont engagés dans l'examen de la situation suivante : *si un robot atteint a unités en b sauts, il atteint c unités en d sauts,* (a ; b ; c ; d) étant des entiers, dont l'un d'entre eux est à déterminer. L'extrait de transcription suivant porte sur le nombre atteint en 25 sauts pour un robot atteignant *7 unités en 5 sauts*. L'analyse de cet extrait montre l'installation rapide d'une expertise dans le traitement reposant sur le caractère proportionnel de la situation : *pour un même robot, s'il fait cinq fois plus de sauts, il ira cinq fois plus loin.*

E : cinq fois cinq c'est égal à vingt-cinq […]
E : en faisant 5 sauts, j'arrive à 7 […]
E : cinq fois sept […]
E : je crois que le résultat, c'est trente-cinq.

Figure 10 : Le robot qui atteint 7 en 5 sauts, atteint … en 25 sauts

A partir de cette première expertise, la comparaison de robots est envisagée : *est-il possible qu'un même robot atteigne a unités en b sauts et c unités en d sauts ?* L'extrait suivant traite du cas de 15 unités en 4 sauts et 30 unités en 9 sauts.

E : le robot B quand… c'est ici
ENS : alors comment fonctionne ce robot B ?
E : il atteint 15 unités en 4 sauts. Donc il fait « un, deux, trois, quatre »
E : et l'autre il atteint 30 en 9 sauts

E : ce n'est pas possible, c'est pas possible que ce soit les mêmes. E : parce que si c'était le robot qui atteint 15 en 4 sauts, il atteindrait 30 unités en 8 sauts. Et pas en 9. E : comme là on double 15 et 30, alors on double aussi 4 et ça ne marche pas. Ça ne fait pas 9, ça fait 8

Figure 11 : Des robots identiques ?

Le raisonnement déployé dans l'extrait ci-dessus s'appuie conjointement : sur la production d'une désignation équivalente d'un robot donné (15 unités en 4 sauts équivalent à 30 unités en 8 sauts) dans le but d'une comparaison avec un autre robot (30 unité en 9 sauts) et sur le fait que pour deux robots différents, à une même distance parcourue correspondent des nombres de sauts différents. Dans un registre plus symbolique - qui n'a pour l'heure pas été institué – les techniques à l'œuvre renvoient à la mise au même *numérateur* de fractions pour les comparer, la plus grande étant celle disposant du plus petit *dénominateur*.

Dans l'extrait cité ci-dessous, une tâche proche est proposée. Il s'agit de comparer deux robots, l'un atteignant 19 unités en 3 sauts et l'autre 20 unités en 4 sauts. Dans un premier temps de l'échange, l'élève identifie des régularités numériques qui la conduisent à produire une réponse erronée.

E : là ils ont rajouté 1, une unité, celui-là en 3 sauts, celui-là en 4 sauts. Donc c'est le même. ENS : Alors ré-explique moi, je n'ai pas bien compris E : là on a rajouté 1 à 19 pour faire 20 et là ils ont rajouté 1 à 3 pour faire 4

Figure 12 : $\frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$?

Dans un second temps, la prise d'appui sur une représentation schématique des déplacements des deux robots permet de clôturer le problème. Autrement dit, dans le registre symbolique, les élèves sont confrontés à la comparaison de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b+1}$. La situation organise alors un espace qui permet d'éprouver des premières régularités numériques pour mieux les dépasser.

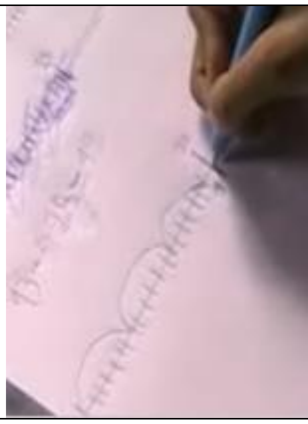
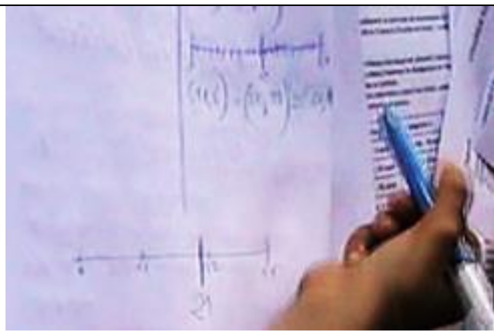
E : là, c'est zéro, là c'est 20 et là c'est 19, les autres on en a pas besoin. E : il atteint en 3 sauts : « un », « deux », « trois » *L'élève représente schématiquement le déplacement du premier robot* E : et l'autre il atteint…. Ben non, c'est pas bon. E : c'est pas le même robot, parce qu'il devrait faire les mêmes sauts si c'était les mêmes robots. E : Parce que si je fais « un, deux, trois, quatre », il arriverait à peu près là *L'élève représente schématiquement le déplacement du second robot*	

Figure 13 : $\frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+1}$?

Un dernier extrait cité ci-après est centré sur l'étude de (11 ; 5) et (21 ; 15). A ce stade, une nouvelle représentation des robots a été préalablement installée : (a ; b) désignant le robot qui atteint *a* unités en *b* sauts. Un premier échange non transcrit ici a été l'occasion de revenir sur les différentes désignations du robot B (11 ; 5). L'élève semble apporter très rapidement une réponse au problème. L'extrait étudié se centre sur la justification apportée. Dans un premier temps, l'élève désigne (21 ; 15) comme se positionnant entre (11 ; 5) et (22 ; 10), laissant ainsi provisoirement un doute sur la conduite de son raisonnement. Ce dernier est levé par les demandes de précisions de l'enseignant. L'élève formule deux types de justification qui portent pour l'une sur le nombre de sauts, pour l'autre sur le nombre d'unités atteint. Dans un registre symbolique (non construit ici), les deux techniques observées renvoient dans une tache de comparaison de fraction. Il s'agit pour l'une, d'une technique correspondant à une mise au même dénominateur (en comparant les numérateurs ou nombres d'unité atteint pour un même nombre de sauts). L'autre se rapproche d'une mise au même numérateur (l'élève comparant des « dénominateurs différents » avec un écart de 5 sauts, pour des « numérateurs proches » avec un écart de 1 unité).

ENS : donc ça c'est le robot B et il faut le comparer au robot C.
E : et bien, celui-là il est entre les deux…
E : enfin, c'est celui-là *(en désignant le robot C (21 ; 15))* qui a le plus grand saut… non le plus petit saut.
ENS : alors pourquoi ?
E : parce que là, il est entre ces deux-là et il n'y a qu'un saut.
(l'élève désigne (21 ; 15) entre (11 ; 5) et (22 ;10))
E : donc du coup, il fait des sauts plus petits
ENS : je n'ai pas bien compris…
E : il tombe entre le 11 unités qui fait 5 sauts et le 22 unités qui fait 10 sauts.

ENS : en fait, ce que je ne comprends pas bien dans ce que tu me dis, c'est que « est-ce que ça et ça, c'est le même robot ? »
E : oui
ENS : donc est-ce que ça et ça, c'est la même longueur de saut ?
E : oui
E : donc si ce robot fait par exemple ces sauts là (en pointant (11 ; 5)) il marque un trait il fait 5 sauts et il marque un trait.
E : et après, il fait 10 sauts et il marque un autre trait
E : ce robot-là sera entre les deux traits…parce que ce nombre-là est plus petit que celui-là alors que ce nombre-là est plus petit que celui-là.
ENS : donc tu me dis : j'ai ce robot, il atteint 11 en 5 sauts, et il atteint 22 en 10 sauts.
E : oui, il marque un trait aux deux.
E : et celui-ci, il est là.
ENS : il atteint quoi ?
E : 21 en 15 sauts
E : et lui il fait 10 sauts
E : et 33 en 15 sauts.
E : donc il fait 15 sauts et celui-là fait 15 sauts, donc c'est celui-là qui est le plus petit qui fait des sauts plus petits.
E : en fait, il y a le nombre d'unités qu'il atteint en 15 sauts alors que lui, c'est en 10 sauts. Il y plus de sauts.
E : ou alors on prend 15 là c'est 10, il est entre ces deux là en sauts
E : donc il est toujours là mais en sauts, c'est 15 et là il y a plus.
E : celui-là, c'est 33 alors que là, c'est 22



Sur l'image ci-dessus, au-dessous de la droite graduée, on peut lire :
(11 ; 5) = (22 ; 10) = (33 ; 15)
L'élève positionne « géographiquement » (21 ;15) entre (11 ;5) et (22 ; 10) très tôt dans l'échange et statue que le robot (21 ;15) a la plus petite longueur de saut.

Ce n'est qu'à la fin de l'extrait (au cours duquel elle aura aussi placé (21 ; 15) entre (22 ; 10) et (33 ; 15)) qu'elle explicite son raisonnement.

Son raisonnement pour comparer la longueur du saut de deux robots est de deux ordres : d'une part, pour un même nombre de sauts (15), le robot qui aura la longueur de saut la plus petite sera celui qui atteindra le plus petit nombre (21 au lieu de 33), d'autre part, pour un même nombre atteint ou presque (21 et 22, deux nombres proches), le robot qui aura la longueur de saut la plus petite sera celui qui aura réalisé le plus de sauts (15 au lieu de 10).

Figure 11 : deux techniques pour comparer des fractions

En guise de conclusion …

Cette contribution visait à faire le point sur différentes acceptions des fractions, notion au cœur du cycle 3 et à mettre en lumière les potentialités et limites de chacune de ces acceptions. La *fraction commensuration* quelque peu oubliée actuellement paraît intéressante à reconsidérer dans ses relations potentiellement fortes avec la *fraction quotient* dans le cadre d'un travail sur les grandeurs. Dans ce contexte, la *fraction quotient* était considérée davantage en lien avec l'extension d'un opérateur *partage d'une grandeur* (déjà introduit et travaillé avec la *fraction partage*) et avait visiblement des potentialités parfois mal identifiées par la suite.

La ressource « les robots » présentée lors du colloque semble un point d'appui possible pour travailler la *fraction commensuration* et faire vivre ces relations avec la *fraction quotient* en fin de cycle 3. Nous espérons qu'elle sera utile à des enseignants et formateurs intéressés par ces questions : http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/fichiers/Atelier_21/

N'hésitez pas à nous faire part d'éventuels retours sur des expérimentations « faisant vivre » cette ressource dans les classes…

Références

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM : Bordeaux.

Téléchargeable sur : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/file/Rationnels_et_dA_cimaux_1987.pdf

Brousseau G. et Brousseau N. (2008*).* Atelier d'ingénierie et d'analyse des processus didactiques Rationnels et décimaux dans l'enseignement obligatoire. In Rouchier A. & Bloch I. (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (cédérom), La Pensée Sauvage, Grenoble.

Téléchargeable sur : http://guy-brousseau.com/2159/atelier-d%e2%80%99analyse-des-processus-didactiques-2008/

Cerquetti-Aberkane F. (1992), *Enseigner les mathématiques à l'école,* Hachette, Paris.

Cerquetti-Aberkane F., Marilier M-C. (2005). *Un exemple de progression pour des cours moyens ou des sixièmes : la situation des robots.*

Téléchargeable sur : http://tfl.roll-descartes.fr/ressource/6435/detail

Douady R., Perrin M-J. (1986). *Liaison école collège. Nombres décimaux,* IREM de Paris 7, Paris.

Téléchargeable sur : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_brochures_de_lirem_de_paris/

Ermel (1982). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CM),* SERMAP-Hatier, Paris.

Ermel (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CM1),* Hatier, Paris.

Neyret R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les IUFM,* Université Joseph Fourier, Grenoble.

Pressiat A. (2002). *Quotients, proportionnalité, grandeurs.*

Téléchargeable sur : https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/confpressiat/Quotients.pdf

Pressiat A. (2009). Une reprise de l'étude des nombres rationnels et décimaux : la situation des automates. Téléchargeable sur **http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html**