Questions sur l’enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3

Christine Chambris, IREM de Paris
Laboratoire de didactique André Revuz,
Université de Cergy-Pontoise

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Sciences expérimentales

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

IREM PARIS

Un certain nombre d'élèves se présentent donc à l'entrée au collège comme des "experts apparents" (Roche et Clarke, 2006), pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres), mais cette réussite opérationnelle masque une conceptualisation déficiente des nombres décimaux (…), voire des nombres entiers. (…) Nous suggérons donc qu'il est urgent de répondre à un certain nombre de questions, institutionnelles (Comment et quand introduire les nombres décimaux ? (…)), et didactiques (sur les changements de registres, sur la demi-droite graduée, (…)). (Chesné & Fischer, 2015, p.41)

L'écriture positionnelle pour les nombres non entiers (décimaux) (Stevin, 1585 et avant)

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{12}=\frac{6\times 1}{6\times 2}+\frac{4\times 2}{4\times 3}+\frac{5}{12}=\frac{6+8+5}{12}$$

$$=\frac{19}{12}=1+\frac{5}{12}$$

$$\begin{array}{rrrr} & {}^{1} & & \\ & 0, & 5 & \\ + & 0, & 6 & 7 \end{array}$$

1,58

1 et 58 centièmes

15 dixièmes et 8 centièmes

158 centièmes

1 et 5dixièmes et 8 centièmes

- Pour permettre le transfert, aux décimaux, des techniques de calcul sur les entiers.

Les connaissances des élèves : des entiers aux décimaux

- 23x10 (90%)   35,2x100 (moins de 50%)
- Le transfert ne va pas de soi.

Plan

- L’entrée dans les décimaux
- Les fractions
- Les nombres entiers
- L’extension des techniques des entiers aux décimaux

L’entrée dans les décimaux

Recommandation conférence de consensus

- R12 – L’étude des fractions précède celle des nombres décimaux, mais doit se limiter aux fractions simples (demi, tiers, quart…) et aux fractions décimales (dixièmes, centièmes…) dans le cas du fractionnement de l’unité.
- ***Commentaires :*** Des travaux de recherche en didactique et en psychologie des apprentissages montrent l’utilité de s’appuyer sur les fractions pour donner du sens aux nombres décimaux, mais aussi que le traitement et la compréhension des fractions sont particulièrement difficiles pour les élèves. Dès lors, cet apprentissage ne doit pas être trop ambitieux à l’école primaire. Il sera limité à une maîtrise du fractionnement de l’unité en parts égales sur les fractions simples puis sur les fractions décimales (dixième, centième, …) permettant la compréhension de la signification des chiffres dans l’écriture à virgule.

Des tensions dans les constructions des décimaux qui sous-tendent l’enseignement

- Lebesgue, La mesure des grandeurs (Chapitre 1, 1931)
- Construction des réels comme suite illimitée d’entiers : suite d’unités de longueur de dix en dix fois plus petites, encadrement (à 1 près) d’une longueur *L* par deux entiers : $523u_0 \leq L < 524u_0$; $5236u_1 \leq L < 5237u_1$; $52368u_2 \leq L < 52369u_2$ … sans fraction mais avec fractionnement de l’unité.
- « Mais parlerait-on encore des fractions dans l’enseignement primaire, dans les classes de 6^{me} et de 5^{me} de l’enseignement secondaire ? Non, puisque cela n’est pas indispensable à la théorie et ne sert à rien pratiquement ; car on sera bien, je pense, d’accord avec moi pour déclarer que marier des $22^{ièmes}$ et des $37^{ièmes}$ est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d’utilité comme circonstance atténuante. (…)
- Sans doute *a* divisé par *b*, *a* sur *b*, se lit encore *a b*-ièmes quand *a* et *b* sont entiers, mais cette locution n’oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n’oblige à traiter de la numération à base vingt. »

Des tensions dans les constructions des décimaux qui sous-tendent l’enseignement

1945 : décimal comme réécriture d’une mesure dans le système métrique. 5,64 m c’est 5 m 64 cm, la virgule marque l’unité

1970 :

- En primaire, tentative de construction décimaux à partir des entiers, sans fractionnement de grandeurs ! 1,850 millier = 1850 (inconsistant)
- Au secondaire (travaux de Bronner): construction des réels à partir des suites illimitées d’entiers (« ressemblance » avec le primaire mais consistant)
- Semble inspiré de la construction des réels par Lebesgue à partir de la mesure des GRANDEURS, mais ici sans grandeurs !

Il s’agit donc de construire les décimaux sans passer par les fractions.

Des tensions dans les constructions des décimaux qui sous-tendent l’enseignement

- Propositions didactiques, années 1980, élaboration par la recherche en didactique des mathématiques de construction de D+, à partir de la mesure des grandeurs.
- Propositions assez peu connues
- Sans passer par les fractions (mais en fractionnant une longueur) : travail de Colmez à partir de la graduation d’une droite. Peut-être influence dans les programmes de 1980, mais disparition ensuite.
- Proposition très récente du CREM (Belgique), à partir de la droite graduée et de la calculatrice.

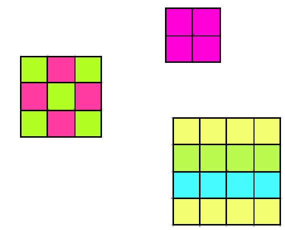
Appréhender la densité

- Spécificité des décimaux (et des fractions) par rapport aux entiers : la densité.
- **Approximation** :
- Un nombre peut être approché d'aussi près qu'on veut par un décimal (ou une fraction)
- **Ordre** :
- Un décimal n'a pas de successeur
- Entre deux décimaux (fractions), il y a toujours un décimal : tâches d'intercalation entre 0,2 et 0,3 : 0,25 ; entre 0,25 et 0,3 : 0,26, etc.
- Limite bien connue de l'approche par le système métrique : décimaux assimilés à des entiers. Toute longueur est un nombre entier de millimètres !
- Quelles situations pour appréhender la densité ?

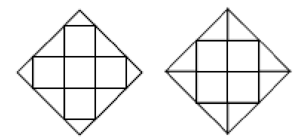
Revisiter la question de la densité

en appui sur la mesure des grandeurs et la calculatrice (CREM)

- **Construire 3 carrés de tailles différentes :**
  - Périmètre et aire ?
  - Relation générale : longueur côté - aire

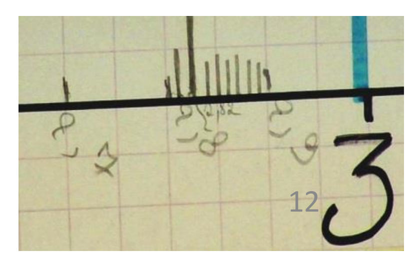


- **Construire un carré avec 8 carrés (aire 8)**



(a) (b)

- **Chercher la mesure du côté du carré.**
  - ?x?=8… 2 trop petit, 3 trop grand.
- **La calculatrice** :
  - 2 et demi ? 2 virgule 5 : 2,5x2,5=6,25. Trop petit, on essaie 2,6 : 2,6x2,6… 2,7… 2,8… 2,9 ? Trop grand !
  - 2 virgule 8 et demi… : 2,8,5…
  - Approximation décimale de la longueur
- **Construction de cette longueur sur une droite graduée.**



La progression « à partir des fractions »

- Forte influence des constructions « à partir des fractions » comme mesures de grandeurs. Suggéré dans les programmes de 1980, sous-tend les programmes à partir de 2002 :
- fractions simples, équivalence de fractions simples $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, décomposition en entier + rompu $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$, addition de fractions simples $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- fractions décimales comme cas particuliers de fractions,
- Équivalences : $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, $\frac{10}{10}=1$, $\frac{20}{100}=\frac{2}{10}$, etc.
- décomposition en entier + rompu : $\frac{423}{100}=4+\frac{23}{100}$
- addition : $\frac{23}{100}=\frac{20}{100}+\frac{3}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$, etc.
- puis somme de fractions décimales (réduites), réécrite « positionnellement » $4+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ = 4,23

La progression dans les pratiques des enseignants

- 4 MF au CM, Allard 2015 :
- Progression : 3 oui, 1 non

Exemple : un point délicat

- Procédures élèves pour $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$
  - Report de bande unité et comptage simultané : $\frac{3}{3}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{9}{3}$; $\frac{12}{3}$; $\frac{15}{3}$; $\frac{18}{3}$, puis comptage des reports : $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$
  - Calcul en appui sur $1 = \frac{3}{3}$, $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$
- Généralisation du raisonnement avec la division euclidienne : pas fait. Dans $\frac{17}{3}$ combien de fois $\frac{3}{3}$? En 17 combien de fois 3 ? Sans doute assez difficile. Nécessaire pour les fractions décimales ?
- Equivalence de fractions : visible sur « fractions simples ». Généralisation difficile, au début du C3. A programmer à la fin du C3, en amont des règles algébriques ?

La progression sous-jacente, en résumé

- Etude des fractions simples : découverte, équivalence, entier + rompu, addition
- Généralisation aux fractions décimales
- Introduction de l'écriture positionnelle **et** « disparition » des fractions

- Progression couteuse en termes « d'équipement » sur les fractions, et sans doute difficile. Retour sur investissement ?
- Progression peu lisible dans les textes institutionnels :
  - Assez explicite en 2002
  - Décomposition en entiers + rompu, **au CM2** seulement, en 2008, mais décimaux au CM1 !
  - Aucun élément explicite dans les programmes du collège en 2008 (les fractions viennent après les décimaux)
  - Absence de l'addition en 2016, au C3.

Des points sensibles pour la mise en œuvre de la progression ?

- La connaissance et la compréhension de la logique de la progression sous-jacente
- La difficulté pour l'enseigner :
  - l'équivalence des fractions
  - la décomposition en entier + rompu
- Les débouchés des fractions

- Quel est l'enseignement effectivement dispensé pour l'entrée dans les décimaux ?

Les fractions

Les connaissances des élèves : des fractions aux décimaux « $\frac{1}{4} = ?$ »

- $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (environ 27% de réussite fin de CM2, début de 6^{e})
- Qu'est-ce qui est difficile ?
- Écriture fractionnaire, écriture à virgule :
  - deux systèmes de représentation des nombres
  - apprentissage de chacun débute au CM1
- Quelles connaissances permettent de réussir ?

La tâche « $\frac{1}{4} = ?$ »

- Appui sur des connaissances mémorisées impliquant le langage courant :
  - Savoir par cœur : « et demi », c’est « virgule 5 » ; « et quart », c’est « virgule 25 » et… « virgule 75 »… (passage « automatique » d’un système de signe à l’autre)
- Appui sur le calcul d’un quotient :
  - « Interpréter » $\frac{1}{4}$ comme 1 : 4 et calculer « 1 divisé par 4 » (à la main en posant la division ou à la calculatrice)
- Appui sur l’équivalence des fractions :
  - Interpréter 0,25 comme une fraction $\frac{25}{100}$ (ou 25 centièmes) et comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$

La tâche « $\frac{1}{4} = ?$ »

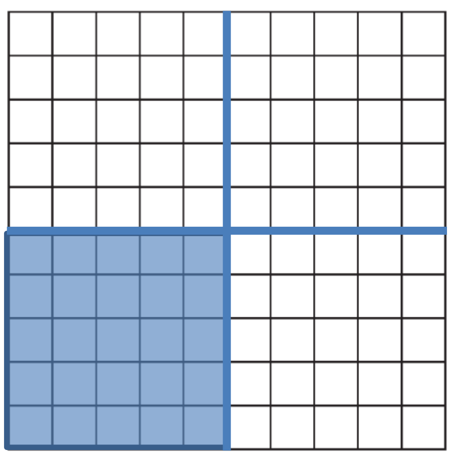
Comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$. Comment ?

- $\frac{25}{100} = \frac{25 \times 1}{25 \times 4} = \frac{1}{4}$
  - savoir qu'un « facteur commun » permet d'obtenir des fractions équivalentes, simplification des fractions
  - savoir trouver ce facteur commun (4x25 = 100)
  - cette technique algébrique n'est pas au programme de l'école (ni du cycle 3)

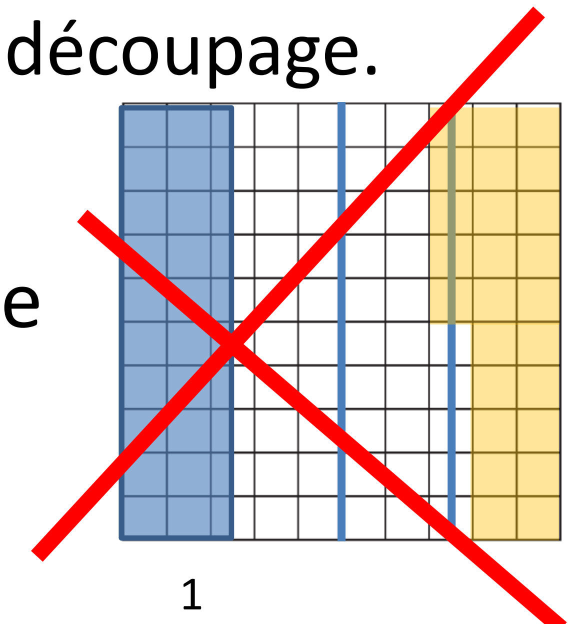
La tâche « $\frac{1}{4} =?$ »

Comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$. Comment ?

- Appui sur : 4 quarts, c'est aussi 100 centièmes, c'est aussi une unité.
- A partir d'une représentation, appui sur
  4 x 25=100 ou trouver un **bon** découpage.



- $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$ sont la mesure d'une même grandeur dans la même unité.



La tâche « $\frac{1}{4} = ?$ »

- A partir d'une fraction opérateur sur un nombre :
- Raisonner dans un cas particulier, par exemple en prenant le nombre 100 :
  - Interpréter la multiplication par 0,25 comme $\frac{25}{100}$ de 100 (25 centièmes de 100), puis appliquer une formule : (25 x 100) : 100 = 2500 : 100 = 25
  - $\frac{1}{4}$ de 100 (le quart de 100). Appliquer une formule : (1 x 100) : 4 = 100 : 4 = 25
  - Déduire de l'égalité des « résultats », l'égalité des opérateurs.
- Raisonner dans le cas général : Multiplier par $\frac{1}{4}$ c'est diviser par 4.

  Multiplier par 0,25 (donc $\frac{25}{100}$) c'est multiplier par 25 et diviser par 100 mais comme 100 = 4x25, cela revient à diviser par 4.

La tâche « $\frac{1}{4} = ?$ »

- Au programme de l'école ?
  - Multiplication par 0,25 : non
  - Simplification algébrique des fractions : non
  - Connaissance mémorisée : peut-être… connaissance sociale…
  - Équivalence des fractions à partir de la mesure des grandeurs : oui mais complexe car « grand nombre »
  - Interpréter $\frac{1}{4}$ comme 1:4 : ?
  - Finalement : égalité complexe derrière simplicité apparente ?

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

- Depuis 1996, « répartition » dans les programmes :
  - à l'école : fraction partage, $\frac{a}{b}$ c'est a $b^{\text{ièmes}}$ c'est-à-dire a fois 1 $b^{\text{ième}}$
  - au collège : fraction comme quotient de l'entier *a* par l'entier *b* (solution de l'équation $b \times x = a$), le nombre qui multiplié par *b* donne *a*.
- Comment la liaison peut-elle être opérationnalisée ?
  - Du partage au quotient, un texte de l'IGEN et aussi J.F. Chesné http://maths.ac-creteil.fr/spip.php?article39
  - « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 » (IGEN, 2004, p. 3)

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

- Plus explicite : lier partage et quotient

il reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce dernier quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales ; chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise 7 fois, donne le dividende 1. Mais, 4 est égal à 1 plus 1 plus 1 plus 1 ; on obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le *septième* de 1 ; de sorte que *le septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un.*

Notes de Reynaud sur l'arithmétique de Bezout, 1821
§14 – Origine et numération des fractions. (extrait)

$$4:7 = (1+1+1+1):7 = (1:7)+(1:7)+(1:7)+(1:7)$$

$$\text{or } 1:7 = \frac{1}{7} \text{donc } \ 4:7 = \frac{1}{7} \times 4 \text{ et } 4 \times \frac{1}{7} = 4:7 = \frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7}$$

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

- Du côté des pratiques ?

Elise est professeur de mathématique en 6e. Elle est interviewée par un **chercheur**.

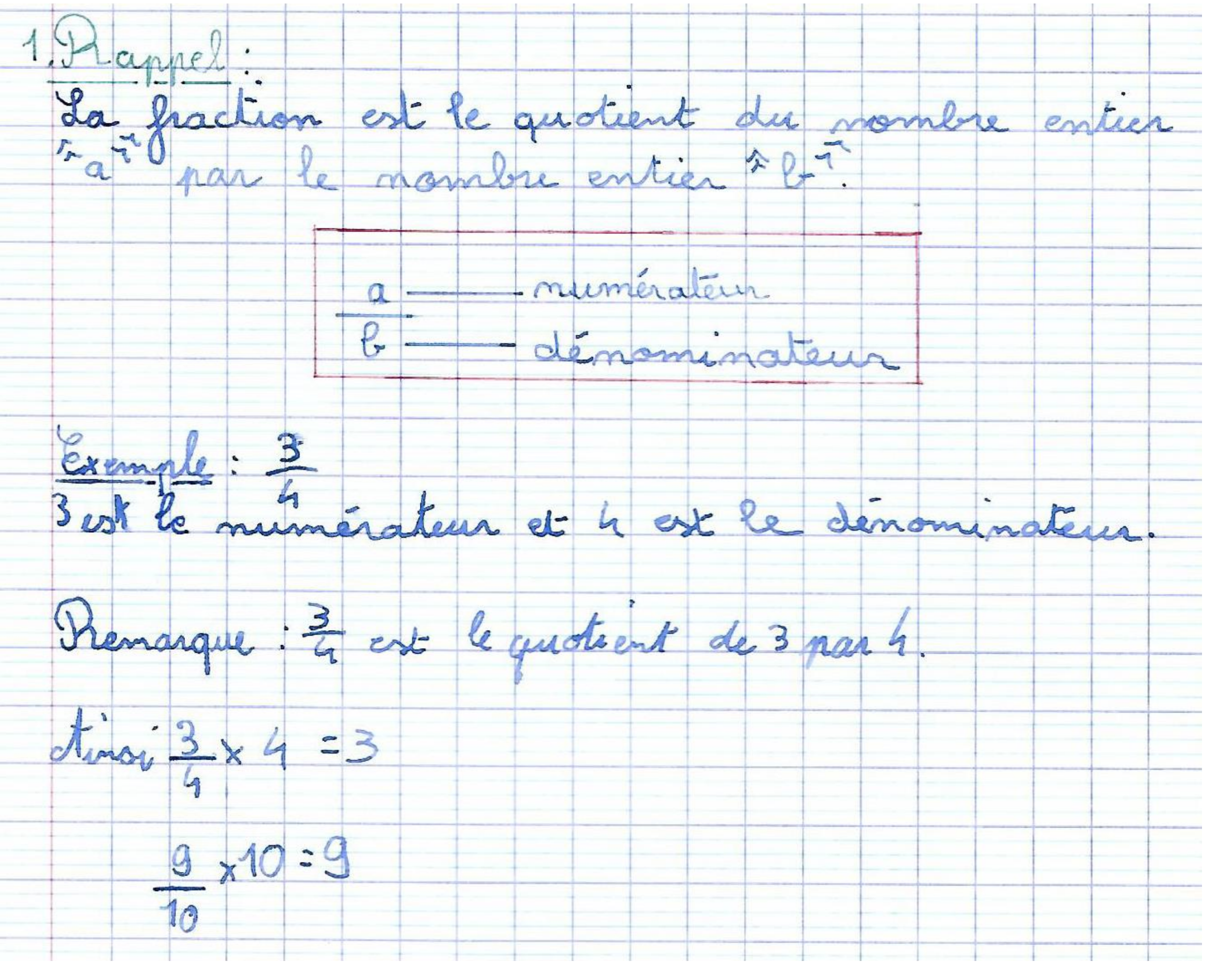
- **Ch.** : Est-ce que la fraction vue comme quotient est abordée en CM2 ?
- **Elise** : moi cette année, je pense que 90 pour cent de mes élèves sont arrivés en me parlant de quotient, de division et cette année beaucoup plus clairement que l'an dernier
- **Ch.** : et ça ce n'est pas vraiment au programme de primaire
- **Elise** : et moi cette année, pour beaucoup d'élèves c'était une évidence. Ou au moins, ils l'avaient déjà vu.
- **Ch.** : les enseignants de mon étude eux, introduisent les fractions avec des bandes pour aller vers la droite graduée

  Les deux filles de mon étude travaillent beaucoup sur les équivalences des écritures comme passer de trois quarts à six huitièmes
- **Elise** : mais ça absolument pas !!
- **Ch.** : Mince…
- **Elise** : c'est dingue cette différence.

(étude en cours, Allard)

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

- Du côté des pratiques ?



1. Rappel :

La fraction est le quotient du nombre entier « a » par le nombre entier « b ».

$$\boxed{\begin{array}{l} a \text{ — numérateur} \\ \hline b \text{ — dénominateur} \end{array}}$$

Exemple : $\frac{3}{4}$

3 est le numérateur et 4 est le dénominateur.

Remarque : $\frac{3}{4}$ est le quotient de 3 par 4.

Ainsi $\frac{3}{4} \times 4 = 3$

$\frac{9}{10} \times 10 = 9$

- Une fraction est un « calcul », une notation pour la division exacte.
- Présenté comme un « rappel »

6e « associé » à CM2 (étude en cours de Allard)

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

- Quel travail est effectivement proposé aux élèves à l’école sur les fractions, comme mesures de grandeurs ?
- Comment ce travail est-il enrichi au collège ? L’est-il ?

Les fractions dans la transition école-collège : la fraction « opérateur »

- Dans les programmes : école
  - 1945 : fractions ⇔ fractions de grandeurs « Prendre les quatre cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (…). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. »
  - 1970-1980 : opérateurs sur des nombres : l'enchaînement d'une division et d'une multiplication (qui commutent, à l'ensemble de définition près), et fractions de grandeurs (domaine mesure, 1970)
  - 2002 : fractions de nombres entiers, 2008 : idem mais disparition du facteur multiplicatif (restent quart et tiers)
- Rien n'empêche de proposer des tâches comme « combien font les deux tiers de 600 g ? » et le programme de 6^{e} ?
- Dans les programmes : collège
  - 2008 : Prendre une fraction d'une quantité, modélisation par multiplication
- Programme 2016 : relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et 1/2 de, 1/3 de, 1/4 de, etc.

Les fractions dans la transition école-collège : la fraction « opérateur »

- Dans les manuels du CM ?
  - Assez grande diversité : aucun – un peu – beaucoup de tels problèmes… (Thomas, 2013)
- Chez les enseignants de 6e (Allard) :
  - Trois quarts de douze ? Le savoir en jeu est l'équivalence de trois modes de calcul : (3 x 12) : 4, (3 : 4) x 12, (12 : 4) x 3

- Les connaissances des élèves
  - « Le nombre égal aux deux tiers de 12 est : » (réussi à 11%), « deux tiers de 12 kg font : 4 kg, 8 kg, 24 kg, 72 kg (QCM, réussi à 33%). Les « quarts » semblent un peu mieux maîtrisés (Chesné 2014).

Les fractions dans la transition école-collège : la fraction « opérateur »

- 3/4 de 12 cm

- Avec fraction de grandeur, deux raisonnements :
- Sur l'objet, par exemple par pliage, obtention d 'une longueur de « 3/4 de 12 cm »
- Par calcul, le quart de 12 cm, 12 cm : 4 = 3 cm, puis 3 cm x 3 = 9 cm
- Il faut le quotient d'une grandeur par un entier **12 cm : 4 = 3 cm**

Mais…

- Au moins de temps en temps, à l'école, 3/4 de 12 n'est qu'un calcul : 3/4 de… un nombre : une division et une multiplication enchaînées
- manuels, cahiers au collège : équivalence de trois modes de calcul. (3 x 12) : 4, (3 : 4) x 12, (12 : 4) x 3

Mais aussi :

- La locution « trois quarts d'une chose » (qui n'est pas un nombre) n'est pas nécessairement comprise par les élèves. Est-elle toujours enseignée ?
- Approche « partage (mesure) » : 3/4 comme mesure suppose que la grandeur sur laquelle on opère est « l'unité ». Il faut penser que « 12 cm » est l'unité vs « le nombre 1 ». Ce qui n'est peut-être pas une évidence

Faire évoluer ?

Les quantièmes

- $\frac{1}{n}$ c'est la taille de l'unité partagée en *n* parts égales mais aussi…
- $\frac{1}{n}$ c'est aussi c'est ce qu'il faut mettre *n* fois pour faire l'unité. Au-delà du partage.
- Propriétés : $\frac{1}{n} \times n = 1$; $\frac{n}{n} = 1$; $1 : n = \frac{1}{n}$
- Nécessaire, par exemple, pour justifier les équivalences

- , un point clé ?

Les désignations orales

- Dire *quatre sur cent* pour dire $\frac{4}{100}$
- Dire *cinq virgule quatre* pour dire 5,14

C'est comme épeler les mots pour parler !

- A elle seule, une désignation bien choisie, permet de lier fractions et écriture décimale : 5 et 14 centièmes pour 5,14 et pour 5+14/100
- Deux désignations prennent en charge les conversions :
  - 5,14 c'est 5 et 14 centièmes, c'est 5 et 1 dixième et 4 centièmes, 5+14/100 ou 5+1/10+4/10
- Un levier fondamental ?

La place des fractions dans le cycle 3

- Renforcer le travail de base sur les fractions :
  - la caractérisation des quantièmes, le quotient de 1 par n est $\frac{1}{n}$
  - le lexique : demi, moitié, tiers, quart, -ièmes… (fractions simples ?), pour lier désignations fractionnaires et décimales positionnelles, pour favoriser la compréhensions des fractions de grandeurs
- Une finalité unique ?
  - Renforcer le point de vue opérateur, à l'école, pour accroitre les débouchés des fractions ?
  - Ajuster la répartition ? Des éléments de fraction quotient à l'école.
- Quand faut-il renforcer le travail (en termes d'égalité de grandeurs) sur les équivalences ? Au début ou à la fin du cycle 3 ? Avant la règle algébrique.

Les décimaux : entre écriture décimale et fractions

- 23x10 (90%)   35,2x100 (32% en …)
- Les règles installées sur les entiers masquent-elles une conceptualisation défaillante de la numération positionnelle (des entiers) ?

Les décimaux : entre écriture décimale et fractions

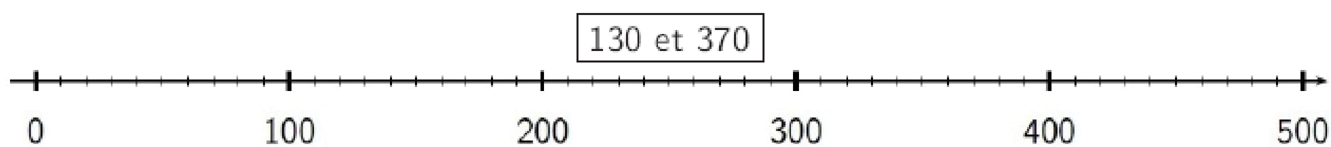
- Certaines connaissances sur les entiers sont meilleures prédictrices de la réussite sur les décimaux que d'autres connaissances sur les fractions. (Desmet, 2012)

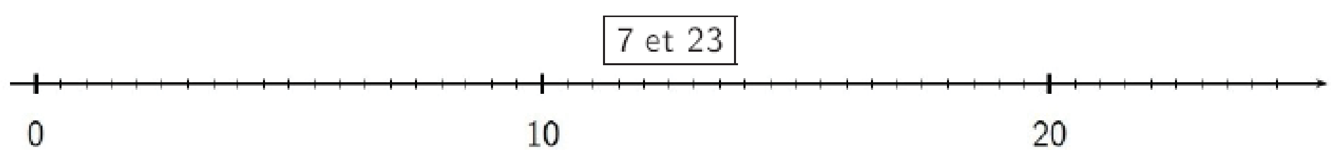
- Exemples de tâches (entiers)

Trois cent cinq
Mille deux
Trois mille seize
Seize cent cinquante quatre

Le plus grand nombre de trois chiffres différents c'est . . .
Dix en moins que cinq centaines, cela fait . . .
Deux dizaines en plus d'une centaine, cela fait . . .

56
115
105
300
420
670





La numération des entiers et les grands nombres

Les connaissances des élèves : des petits aux grands nombres

- Écrire un nombre entier à trois ou quatre chiffres (95%)
- Écrire un nombre entier supérieur à 10 000 (75%)
- L'enseignement des grands nombres révèlent des fragilités sur les nombres à 3 chiffres (Variations. Mercier, 1997) que les élèves savaient pourtant écrire.
  - Ex : deux millions trois cent quarante mille **cent cinq**

    26 és ; R : 19 ; 2 340 **500** : **6** ; 2 340 **050** : **1** ; autre : 2
- Combien y a-t-il de centaines dans cent cinq ? « une » centaine ne s'entend pas. « cinq » centaines ?
- Difficultés spécifiques (les zéros muets)

L’enseignement des grands nombres

(Etude de Tempier, CM1)

Ecrire **trente-quatre-mille-vingt** en chiffres. C’est le 9ème nombre proposé mais le premier avec la difficulté du 0 muet.

Axel a écrit : **34.20**. Il a écrit ce qu’il a entendu (34 et 20) et un point après le mot « mille » conformément à la demande de l’enseignante.

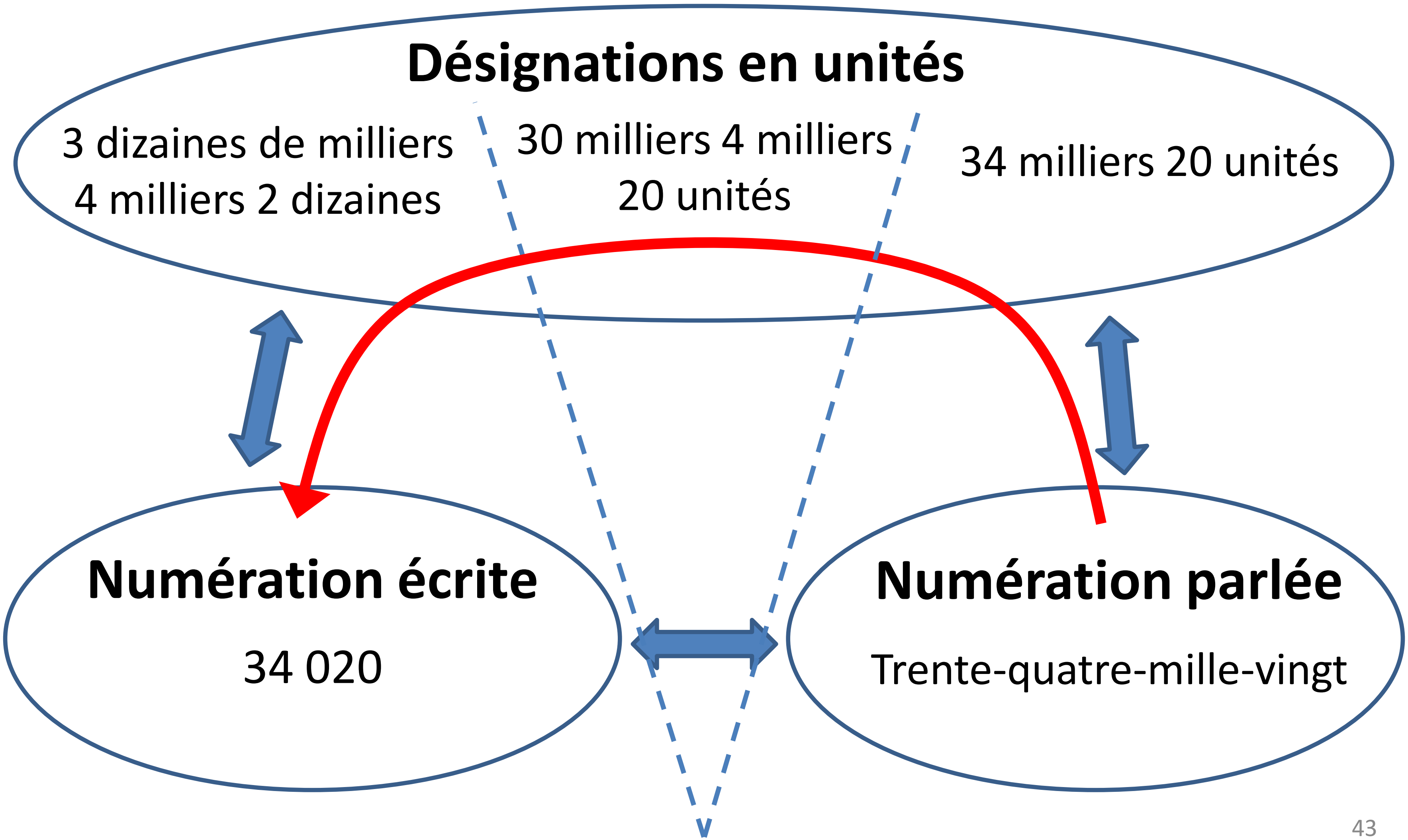
- So : trente-quatre-mille. Vingt. Ça te parait pas bizarre ? Après le mot mille y’a toujours combien de chiffres ?
- Axel : trois
- So : et là t’en as que deux. Comment tu pourrais faire pour en avoir trois ? (*au tableau So écrit 34.20 et souligne le 20*).
- Axel : mettre un zéro ?
- So : ou ça ?
- Axel : *inaudible. Soline écrit 34.200 au tableau.*
- So : Regarde Axel. *Soline écrit au tableau : 34.020*

L’enseignement des grands nombres

- Difficultés des élèves et de l’enseignant à articuler le système écrit et le système parlé (Variations. 1997)
  - Tâche : écrire en chiffres « Dix-sept millions deux mille cinquante-huit »
  - Propositions : 17 2000 58 / 17 2 58 / 017 200 058
- Mettre un point quand on entend mille, million, des tranches de trois chiffres et des zéros

- Un « manque à savoir institutionnel » (Mercier 1997).
  - Manque de textes de référence
  - Tout se passe comme s’il n’y avait rien à savoir pour écrire un nombre en chiffres.

Les unités de numération, un outil pour expliquer, justifier, contrôler



Programmes et pratiques des enseignants

- Lecture écriture des nombres : l'alpha et l'oméga des grands nombres ?
  - Programmes école 2008.
  - Tâches éva nationale : lire écrire grands nombres
- Valeur des chiffres en fonction de la position au collège (2008).
- Références aux décompositions en base mille, dans les programmes de 2016
- Quel travail sur les relations entre les unités ?
- Fin de 6^{e} (159 élèves, dont 41 en REP) (Tempier)
  - 4 millions = ……….. centaines de milliers : **48%**
  - 3 millions = ……….. milliers : **50%**

Savoirs en jeu sur les entiers au C3

- Le nombre mille
  - 1 m = 10 c ; 1 m = 100 d
  - 3 m = 30 c
  - 32 c = 30 c + 2 c = 3 m 2 c

- Les milliers, millions, milliards, comme unités et les relations entre elles.
- Pour aller vers : 32 centaines de milliers = 3 millions (milliers de milliers) 2 centaines de milliers.

- Et une règle générale, pour l'écriture chiffrée, qui sera valable aussi pour les décimaux :
- Dans l'écriture d'un nombre en chiffre, tout chiffre indique des unités dix fois plus grandes que celui qui est à sa droite.

- Les relations basiques : 432 millions = 400 millions 30 millions 2 millions= 4 centaines de millions 3 dizaines de millions 2 millions

Savoirs en jeu sur les entiers au C3

- Pour consolider la numération positionnelle et le sens des opérations. Résoudre des problèmes du champ multiplicatif, en appui sur la numération.
- C’est-à-dire : Multiplication, division euclidienne par les puissances de dix
- 35621 = 356 centaines 21 unités
- 35621 : 100 = 356 (reste 21)
- 35621 = (356 x 100) + 21

Étendre les techniques sur les entiers aux décimaux ?

Multiplier par 100

- **Technique de multiplication par 100 pour les nombres entiers** :

  Écrire deux 0 à droite.

  - 24 x 100 = 2 400

- **Technique de multiplication par 100 pour les nombres décimaux** :

  Déplacer la virgule de 2 rangs vers la droite.

  - 2,345 x 100 = 234,5
  - 2,34 x 100 = 234 (disparition de la virgule)
  - 4,7 x 100 = 470 (disparition de la virgule, et … apparition de 0 !)

Multiplier par 100 : Une alternative ?

17 x 100

milliers	centaines	dizaines	unités
		1	7
1	7		

3,52 x 100

milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes
		3	5	2
3	5	2		

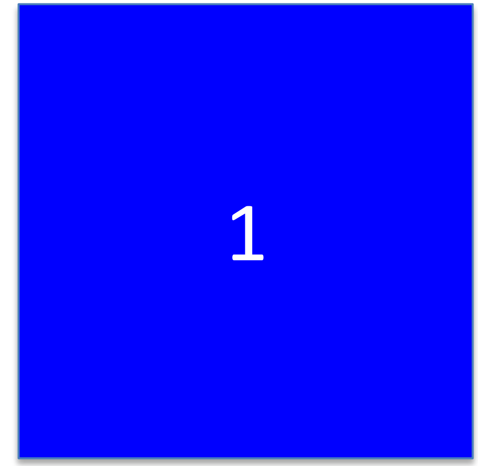
Deux techniques, une seule justification…

Dans la multiplication par 100, chaque chiffre prend une valeur 100 fois supérieure (les unités sont transformées en centaines, etc.)

Possibilité d'une seule technique ?

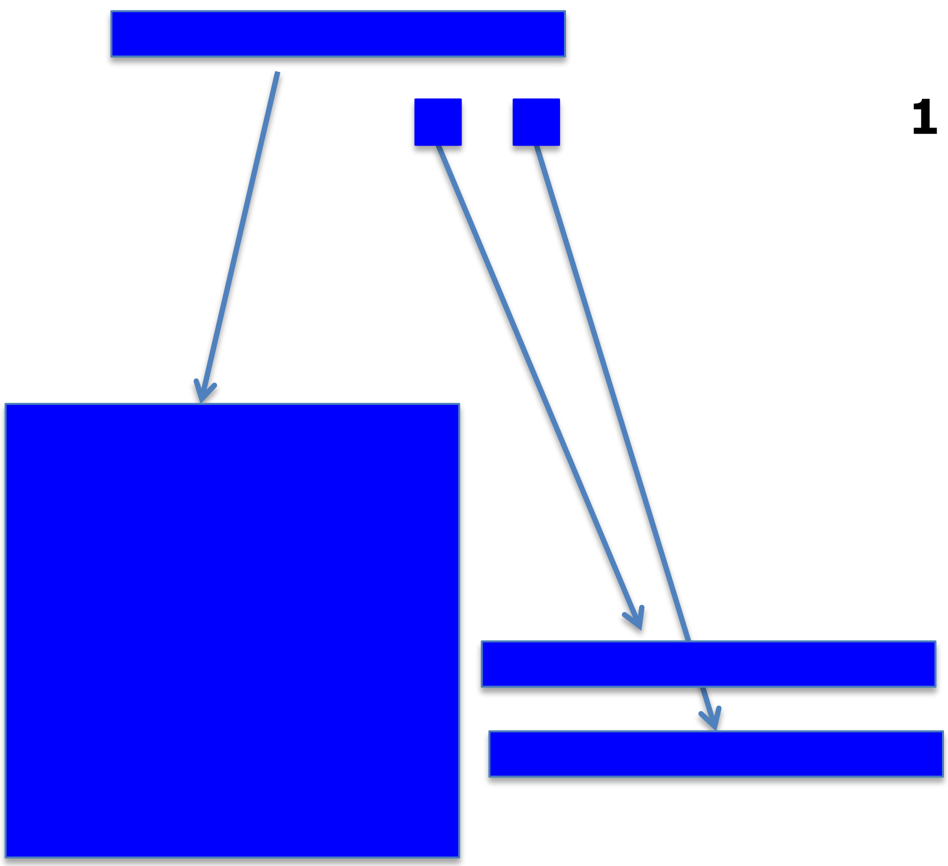
Chaque chiffre est déplacé de deux rangs vers la gauche (et écriture si nécessaire de zéros) ? Les unités sont transformées en centaines ?

Multiplier par 100 : Une alternative ?



Une justification, 3 registres :
grandeur/aire, unités, écriture chiffrée

Exemple avec 0,12 x 10



1 dixième 2 centièmes **0 , 1 2**

1 unité 2 dixièmes **1 , 2**

Comparer deux décimaux : quelle(s) technique(s) ?

- 32,4 et 2,56 // 45,635 et 45,67

1) Etape 1 : **Comparer d'abord les parties entières** : plus le nombre est long plus il est grand (32 est plus long que 2) et si les deux nombres ont la même longueur, on compare chiffre à chiffre en partant de la gauche jusqu'à trouver deux chiffres différents.

- Si les deux parties entières sont égales (45) : étape 2, **pour la partie décimale**. Comparer chiffre à chiffre, à partir de la gauche, les chiffres des dixièmes, puis ceux des centièmes, etc. jusqu'à trouver deux chiffres qui diffèrent.

- La première étape s'appuie sur la longueur du nombre, la deuxième est spécifique de la partie fractionnaire.
- Des techniques différentes pour partie entière et partie décimale ?
- Un décimal comme juxtaposition de deux entiers ?

Comparer deux décimaux : quelle(s) technique(s) ?

- 32,4 et 2,56 // 45,635 et 45,67

2. Repérer l'ordre de l'unité le plus grand dans chaque nombre, comparer ces ordres d'unité :
   - des dizaines pour 32,4 et des unités pour 2,56, ils sont différents : celui qui est le plus grand indique le plus grand nombre
   - des dizaines pour 45,635 et 45,67 : ils sont identiques. Comparer les chiffres, de gauche à droite, jusqu'à ce que deux chiffres différents se présentent (les dizaines, puis les unités, puis les dixièmes, puis les centièmes).
3. Ecrire des zéros à droite pour que chacun des nombres à comparer exprime un nombre entier d'unités du même ordre : 32,4=3240 centièmes et 2,56=256 centièmes ou encore 32400 millièmes et 2560 millièmes, etc.

- Conversion des deux nombres pour avoir deux nombres entiers d'unités du même ordre
- Technique de comparaison des entiers sur la « longueur du nombre ».

- La technique 2 se généralise aux écritures décimales illimitées des réels (pas la technique 3, à moins d'effectuer des troncatures). La technique 3 « rabat » les décimaux sur les entiers.
- Des extensions, valables à la fois pour les entiers et les décimaux.

Le renforcement de l'écriture décimale

- Avec l'idée de renforcer ce qui est commun aux entiers et aux décimaux (aux écritures décimales avec et sans virgule ?)
  - Les différentes positions indiquent des unités dont l'ordre de grandeur est différent : de dix en dix fois plus grand quand on va vers la gauche, de dix en dix fois plus petit quand on va vers la droite,
  - Un signe marque l'unité : le chiffre de droite pour l'écriture sans virgule, le chiffre à gauche de la virgule pour l'écriture… avec virgule,
  - Le zéro est un gardien de place inoccupée, etc.

Quelques conclusions ?

- Approfondir la compréhension de l'écriture décimale pour l'étendre aux décimaux
  - Ce qu'elle a de commun pour les entiers et les décimaux
  - Le registre des unités de numération
  - Harmoniser les (justifications des) techniques pour entiers et décimaux
- Donner une place aux fractions :
  - Par les désignations « en –ième » : écriture fractionnaire (fractions simples ?) et décimale
  - Le quotient : 1:n=1/n et les caractérisations de 1/n (dès le CM1)
  - Fractions opérateurs (dès le CM1, voire le CE2 !)
- La densité (ingénierie du CREM à rendre plus robuste ?)

- D'autres pistes :
  - Les équivalences à partir de la mesure des grandeurs : à consolider en 6^e ?
  - Changements de la progression des entiers aux décimaux ? Pas le travail d'enseignants isolés. Problème complexe qui engage beaucoup d'équilibres.