Actes du colloque organisé par la commission INTER IREM Didactique

Rencontres autour de la compétence "MODÉLISER" en mathématiques

POITIERS

25 et 26 mai 2023

CII DIDACTIQUE

https://www.univ-irem.fr/-cii-didactique

Table des matières

Les conférences

Ateliers centrés sur l’apprentissage de modèles mathématiques

Ateliers centrés sur l’activité de modélisation

Dispositifs de formation des enseignants et cycle de modélisation

Présentation de la C2i didactique

Yves Matheron[1]
IREM de Marseille

Robert Noirfalise[2]
IREM de Clermont-Ferrand

Sébastien Dhérissard[3]
IREM&S de Poitiers

La commission inter-IREM de didactique fédère les divers groupes des IREM qui se réclament de la didactique et que nous nommerons par la suite « groupes didactique d'IREM ». Plus largement, elle vise à jouer le rôle d'interface entre les recherches universitaires menées dans le cadre théorique de la didactique des mathématiques et les enseignants et formateurs d'enseignants de mathématiques, quel que soit le niveau ou l'institution dans laquelle ils enseignent les mathématiques : école primaire, second degré, enseignement supérieur, diverses structures et instituts de formation aux mathématiques ou à leur enseignement.

Pour préciser l'objet de la commission, il nous faut distinguer « *le* didactique » et « *la* didactique ». *Le* didactique se rapporte à l'action intentionnelle d'une personne ou d'une institution afin qu'une autre personne ou une autre institution apprenne « quelque chose ». Ce qui relève *du* didactique mathématique englobe toutes les situations où un professeur, un formateur, un parent, un camarade de classe enseigne « quelque chose » considérée comme mathématique afin que l'apprennent un élève, un professeur stagiaire ou un étudiant, un fils ou une fille, un ou plusieurs autres camarades de classe. *La* didactique des mathématiques est la science *du* didactique qui se rapporte aux mathématiques. C'est la science qui étudie sous quelles conditions et contraintes sont diffusés les savoirs mathématiques dans la société.

De ce fait, le travail de la CII de didactique consiste à mettre en relation des travaux existant dans les IREM, pour favoriser l'élaboration et la diffusion en direction des enseignants et formateurs de mathématiques, des ressources, propositions et analyses élaborées lors d'un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs, qui portent sur des questions relevant *du* didactique, à partir de résultats issus de *la* didactique des mathématiques. En particulier, l'élaboration d'ingénieries didactiques de deuxième génération construites de manière collaborative, ne vise pas seulement la recherche en didactique, comme le furent celles de première génération : par exemple celles du COREM de Talence. Elles promeuvent aussi le développement d'un autre type d'enseignement au sein du système. Elles ont pour fonction la possible amélioration de l'étude des mathématiques et le recueil de matériaux empiriques. Ces derniers constituent des données

[1] yves.matheron *at* free.fr

[2] robert.noirfalise *at* free.fr

[3] sebastien.dherissard *at* ac-poitiers.fr

pour l'analyse de l'implantation et du développement de ce type d'ingénieries sous les conditions et contraintes inhérentes au système. Ces matériaux permettent aussi l'analyse des effets induits par ces ingénieries chez les partenaires de la relation didactique : professeurs, élèves, formateurs.

La CII de didactique mène ses travaux en tentant de coordonner, à propos de l'enseignement des mathématiques, des résultats sur des phénomènes qui sont à la fois d'ordre macro-méso-micro didactiques, à partir des outils théoriques fournis par *la* didactique des mathématiques.

À titre d'exemples :

sont de l'ordre du macro-didactique l'observation, l'analyse et l'évaluation des programmes, des manuels, des réformes de l'organisation de l'école, des dispositifs innovants, de l'évolution des résultats des élèves tels que portées par les évaluations nationales et internationales (TIMSS, PISA, CEDRE), etc.

sont de l'ordre du méso-didactique, l'observation, l'analyse, l'évaluation et la conception de ce qui est mathématiquement enseigné dans des classes, la réception dans la profession des ingénieries didactiques de deuxième génération conçues au sein des groupes didactique d'IREM, les problèmes et difficultés rencontrées par des professeurs de mathématiques dans l'exercice de leur métier comme indices des problèmes et difficultés rencontrées par la profession, les problèmes et difficultés rencontrées par les élèves dans l'étude des mathématiques comme indices des problèmes et difficultés rencontrées dans l'apprentissage, etc.

sont de l'ordre du micro-didactique, l'observation, l'analyse, l'évaluation et le développement de ce qui est enseigné et appris par des élèves sur une notion mathématique précise, sur une unité temporelle inférieure ou égale à une heure de cours, des difficultés ou succès rencontrés dans cet enseignement et apprentissage, des effets des ingénieries didactiques de deuxième génération sur enseignement et apprentissage, de la manière dont les élèves étudient par eux-mêmes, etc.

Les réunions de la CII de didactique permettent la circulation de l'information relative au travail mené par chacun des groupes didactique d'IREM qui y sont représentés, ainsi que la coordination et l'impulsion du travail mené sur un ou plusieurs thèmes didactiques définis en commun et qui sont tous abordés depuis la didactique des mathématiques.

La commission se réunit régulièrement au cours d'une année scolaire : à distance, et en présentiel quand les conditions pour ces réunions le permettent.

Au-delà des réunions habituelles de la CII de didactique, comme par le passé, la CII de didactique envisage de faire connaître son travail à partir de l'organisation de journées ouvertes à des participants extérieurs à celle-ci.

Yves Matheron

Les membres actuels de la CII didactique font partie de divers IREM ou IRES. Ils se réunissent mensuellement lors de visio-conférences et au moins une fois par an en présentiel et distanciel à Paris. Voici les membres au moment du colloque :

Nom	Prénom	IREM et IRES
Auroy	Didier	Marseille
Bezard-Falgas	Cécile	Caen
Couderette	Michèle	Paris Créteil
Coulombel	Loïc	Caen
Desnavres	Catherine	Bordeaux
Dhérissard	Sébastien	Poitiers
Gachassin	Jean-Marc	Bordeaux
Guérin	Laure	Clermont-Ferrand
Laval	Dominique	Paris
Lehours	Jean-Michel	Clermont-Ferrand
Masselin	Blandine	Rouen
Matheron	Yves	Marseille
Noirfalise	Robert	Clermont-Ferrand
Perrin	Marie-Jeanne	Paris
Rakotomanana	Édith	Lille
Sauvage	Mélanie	Clermont-Ferrand

Remerciements

Sébastien Dhérissard[4]
Responsable de la C2i didactique, IREM&S de Poitiers

Les chapitres de cet ouvrage correspondent à des contributions au colloque de la commission inter-IREM de didactique « Rencontres autour de la compétence modéliser en mathématiques », qui a été organisé le jeudi 25 mai et le vendredi 26 mai 2023 sur le campus du Futuroscope de l'Université de Poitiers. Je remercie tous les intervenants de ces journées, particulièrement Marianna Bosch, Berta Barquero, Alain Kuzniak et Pierre Job pour leurs conférences plénières. Je les remercie ainsi que Xavier Sorbe et Yves Matheron pour la tenue d'une réunion débat autour des pratiques des enseignants du secondaire lors d'activités de modélisation. Enfin, je remercie tous les membres de la Cii didactique et tout particulièrement Marie-Jeanne Perrin, Robert Noirfalise et Yves Matheron pour leur implication et leur disponibilité dans la préparation de ce colloque.

Le colloque a été organisé grâce à l'appui financier et logistique de l'IREM&S de Poitiers, de l'Université de Poitiers, de l'UFR Sciences fondamentales et appliquées, de l'INSPE de Poitiers, de Grand Poitiers, de la région Nouvelle-Aquitaine, de l'ADIREM (Assemblées des directeurs des IREM), du LP2I (lycée pilote innovant international), de la Fédération Mathématique de Recherche en Région Nouvelle-Aquitaine (Margaux), La régionale APMEP du Poitou-Charentes, de la CASDEN, la MGEN et la MAIF. Je remercie ces partenaires pour nous avoir permis de développer des temps d'échanges riches autour de la compétence modéliser dans l'enseignement des mathématiques entre des participants venant d'horizons diverses : des chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques, des inspecteurs, des formateurs académiques, des animateurs d'IREM, des enseignants de mathématiques en primaire et dans le secondaire, des étudiants en master MEEF et des lycéens. Cette diversité des participants a notamment été la conséquence de l'ouverture des inscriptions au colloque via le réseau des IREM et via le réseau des inspecteurs de mathématiques.

Je remercie toutes les autrices et tous les auteurs pour leurs contributions, ainsi que les relectrices et relecteurs. Je remercie les membres de l'IREM&S de Poitiers et notamment Dominique Gaud, Joséphine Aubin, Julien Michel et Youssef Barkatou, notre directeur, pour leur aide conséquente dans l'organisation du colloque, et, Philippe Chauvin pour son aide dans la finalisation de cet ouvrage en Latex. Je remercie enfin et tout particulièrement Marie-Jeanne Perrin pour sa patience, sa bienveillance et la coordination des contributions et des relectures.

[4] sebastien.dherissard *at* ac-poitiers.fr

Présentation des actes

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN[5]
IREM de Paris

Les ***Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en mathématiques*** organisées par la Commission Inter-IREM Didactique à Poitiers les 25 et 26 mai 2023, avaient pour but d'interroger la place de l'activité de modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Le texte de l'annonce du colloque en posait la problématique et soulevait de nombreuses questions qui ont guidé les interventions. Reprenons ici les principales questions abordées lors de ces journées.

Les mathématiques enseignées dans le primaire et le secondaire, qu'il s'agisse des nombres, de l'algèbre, des fonctions ou de la géométrie, se sont elles-mêmes constituées au fil des siècles comme modèles de plus en plus perfectionnés de problèmes du monde réel. Derrière les débats sur leur enseignement se profile la question de savoir s'il est plus efficace d'enseigner directement ces modèles avec leurs applications dans certains domaines ou d'accorder une place plus ou moins importante à une certaine reconstruction de ces modèles par les élèves dans des situations bien choisies. Depuis ses débuts, la didactique des mathématiques s'est attachée à cette question. Dans la suite des évaluations PISA, beaucoup de pays dont la Belgique et la France, ont mis en avant la compétence « Modéliser ». Faut-il un enseignement spécifique sur la modélisation ? Comment cette compétence peut-elle être travaillée dans l'enseignement des mathématiques, à l'école primaire ou dans le secondaire ? Quelle place accorder dans l'enseignement des mathématiques à des problèmes issus du monde réel ou d'une autre discipline ? N'y a-t-il pas aussi de la modélisation à l'intérieur des mathématiques, d'un domaine à un autre ou même à l'intérieur d'un même domaine ? Quelles difficultés rencontrent les élèves et les enseignants sur ce point ? Comment former les maîtres ?

Lors de ces *Rencontres,* trois conférences, neuf ateliers et une table ronde ont permis d'apporter des éclairages variés sur ces questions en se référant principalement aux cadres théoriques de la didactique des mathématiques développés en France ainsi qu'à des travaux européens visant à caractériser l'activité de modélisation. Les textes qui constituent ces actes en rendent compte ; nous les présentons ici en commençant par les conférences et en regroupant les ateliers par grands thèmes.

Les conférences

La conférence de Berta Barquero et Marianna Bosch aborde la question des besoins épistémologiques de la profession d'enseignant de mathématiques à propos de l'enseignement de la modélisation, dans la perspective de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Après

[5] marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

avoir distingué la modélisation comme savoir à enseigner, la modélisation comme pratique mathématique et l'enseignement de cette pratique, elles présentent la notion de modélisation du point de vue de la TAD qui considère qu'une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier avec une activité de modélisation. En effet, la TAD distingue système et modèle comme des fonctions qu'on peut faire jouer à des domaines de réalité ; la modélisation est alors un processus en trois étapes, la définition du système à étudier, la construction du modèle, et le travail dans le modèle, qui relie le système et le modèle. Ce processus peut s'inverser et faire apparaître un système peut comme un modèle de son modèle. De plus le processus de modélisation peut comporter la construction de modèles successifs, ce qui suppose une redéfinition des systèmes à modéliser en y intégrant des modèles préalablement construits. Le processus de modélisation s'inscrit dans un questionnement de la réalité dans laquelle s'inscrit le système étudié. L'enseignement est ainsi conçu dans un parcours d'étude et de recherche (PER) qui permet de gérer la succession des systèmes et modèles étudiés. L'ensemble de la réflexion est illustré par un premier exemple. La formation des enseignants est abordée à partir de deux exemples assez détaillés de *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE). Les conférencières concluent sur des questions ouvertes relatives aux besoins épistémologiques et didactiques concernant la modélisation.

Le texte de Pierre Job et Maggy Schneider s'appuie à la fois sur la TAD et la notion de situation fondamentale issue de la théorie des situations (TSD) pour mettre en avant l'économie de pensée qui caractérise les mathématiques. Elle conduit à modéliser pour construire des modèles efficaces, incorporés au savoir et permettant de résoudre des classes de problèmes, ce qui peut se trouver en contradiction avec la logique d'évaluation de compétences transversales de résolution de problèmes, comme le montre l'analyse d'un item de PISA. Les conférenciers commencent par expliciter le modèle didactique de la modélisation et des modèles mathématiques qu'ils construisent à partir de leur cadre théorique qui s'inscrit dans une épistémologie socio-constructiviste, et qu'il s'agira de mettre à l'épreuve des faits. La première strate du modèle consiste à voir les mathématiques comme économie de pensée ; la deuxième strate consiste à décrire l'activité mathématique en termes de praxéologies. Les praxéologies de type I concernent des objets préconstruits, c'est-à-dire non définis dans la théorie. Dans les praxéologies de type II « le type de tâches consiste à concevoir une architecture déductive qui constitue un modèle d'une portion plus ou moins grande des mathématiques ou d'un domaine extra-mathématique, qu'il appartienne au monde sensible ou à d'autres disciplines ». L'activité de modélisation peut donc être à visée intra-mathématique ou extra-mathématique. Le cas de la modélisation par des fonctions est analysé à partir de plusieurs exemples : suites, fonctions linéaires et extension des opérations aux nombres relatifs, fonction exponentielle.

La conférence d'Alain Kuzniak aborde tout d'abord la théorisation de la modélisation telle qu'elle s'est développée en Europe en relation avec la notion de compétence. Il s'agit de traduire dans un modèle mathématique des problèmes de la réalité, pour les résoudre. La modélisation est décrite comme un cycle qui part de la réalité pour y revenir, comprenant le plus souvent sept processus, et qui peut être parcouru plusieurs fois. Concernant l'enseignement, le conférencier développe plus longuement deux modèles : celui de la Realistic Mathematics Education (RME) initié par Freudenthal aux Pays-Bas et celui des Espaces Mathématiques de Travail (EMT) qu'il a lui-même proposé avec des collègues. La RME distingue mathématisation horizontale comme suite de modèles permettant de passer de la réalité aux mathématiques et mathématisation verticale correspondant à une montée en abstraction dans les modèles mathématiques. Dans les ETM, les sept éléments du cycle de modélisation sont regroupés autour de trois processus : la description mathématique de la réalité, la mathématisation et la validation externe. La conclusion ouvre le propos sur quelques questions cruciales en suspens. Le texte qui figure dans ces actes est un résumé d'un article qui doit paraître dans *Recherches en didactique des mathématiques*.

Ateliers centrés sur l'apprentissage de modèles mathématiques

Les fractions. Le texte de Didier Auroy et Yves Matheron présente les grandes lignes d'un PER élaboré par le groupe Didactique de l'IRES de Marseille pour enseigner les fractions en 6ème. Partant de l'analyse d'une activité proposée par un manuel, ils en montrent la « faiblesse mathématique et didactique » en ce qui concerne les notions de grandeur et mesure et la faible part de responsabilité laissée aux élèves dans la modélisation du problème. Ils explicitent alors, dans le cas du PER proposé sur le travail des fractions en 6ème, la dialectique entre systèmes et modèles identifiée en TAD et présentée dans la conférence de Berta Barquero et Marianna Bosch. La réversibilité modèle-système constitue un appui qui peut aider les élèves au cours du processus de modélisation dans lequel on les engage.

L'algèbre. Le texte de Didier Auroy, Laure Guérin, Yves Matheron et Robert Noirfalise présente les éléments mathématiques et didactiques dont les groupes didactiques de l'IRES d'Aix-Marseille et de l'IREM de Clermont-Ferrand se servent dans des ingénieries didactiques de développement permettant de travailler l'algèbre à partir de programmes de calcul. Ces ingénieries s'appuient sur la TAD et la TSD. Trois exemples illustrent la démarche : les entiers relatifs en 5ème, le début des écritures algébriques en 4ème et la résolution des équations du 1er degré en 4ème. L'exemple des relatifs, assez détaillé, explicite les raisons d'être de ce savoir, l'organisation mathématique de référence et revient sur la dialectique systèmes-modèles. L'exemple des écritures algébriques propose plusieurs patterns contextualisés dont l'étude amène les élèves à les représenter, à introduire des écritures algébriques pour généraliser puis à travailler ces écritures pour répondre à de nouvelles questions. L'exemple de la résolution des équations montre comment, en appui sur la TAD, peut s'élaborer une dialectique média-milieu support de la modélisation dévolue aux élèves dans un PER.

Les fonctions. Dans leur texte, Catherine Desnavres et Marie Gervais apportent d'abord un éclairage didactique sur la notion de fonction à partir de différents travaux. Cette analyse préalable leur permet d'expliquer les choix faits pour construire, en appui sur la TSD, une situation visant à introduire les fonctions à partir d'un problème simple posé dans le contexte de la vie quotidienne. Elles présentent ensuite la mise en œuvre de cette situation en classe de 3ème. La modélisation amène à identifier des grandeurs géométriques puis à exprimer leurs variations en termes de fonctions. La discussion porte à la fois sur la situation elle-même et la pertinence des choix de variables didactiques pour une première étude des différents registres de représentation des fonctions et aussi sur le rôle du professeur dans la gestion de cette mise en œuvre.

Les grandeurs au cours moyen. Le texte de Jérôme Coillot présente le travail d'un groupe de l'IREM de Poitiers qui adapte au niveau du cours moyen l'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs, travaillé au collège depuis de nombreuses années et qui a conduit à la publication de plusieurs brochures. Il présente ici des problèmes inspirés du monde réel utilisés en classe pour aborder ou travailler les notions de longueur, distance, volume et utiliser les longueurs pour représenter d'autres grandeurs par l'intermédiaire d'une droite graduée ou de barres. Les contextes issus de la réalité sont utilisés non seulement pour introduire les notions mathématiques mais aussi pour les utiliser dans un contexte autre que celui dans lequel ils ont été introduits. Les exemples montrent l'importance de la représentation dans la traduction dans les deux sens entre monde réel et mathématiques.

Le modèle des barres à l'école primaire. Le texte de Christine Chambris rend d'abord compte des discussions qui ont eu lieu dans l'atelier à propos des productions de futurs professeurs des écoles à qui il était demandé de représenter les grandeurs présentes dans un extrait du conte « Boucle d'or et les trois ours », et notamment des attributs susceptibles de classement identifiés et des modes de représentation adoptés pour les relations entre ces attributs. Il soulève ensuite la question de ce qu'il est possible de représenter à l'aide du modèle en barres actuellement préconisé dans l'enseignement primaire et le confronte aux instructions institutionnelles. La réflexion sur cette question fait l'objet d'un article en cours.

Ateliers centrés sur l'activité de modélisation

Modéliser au collège. Cécile Bezard-Falgas et Loïc Coulombel interrogent dans ce texte leurs pratiques de professeurs de collège concernant l'enseignement de la modélisation à la lumière du schéma de Blum et Leiss tel que l'interprète et le complète Sonia Yvain-Prebiski dans sa thèse. Ils pointent sur des exemples variés qui s'intéressent plus spécifiquement soit à la phase de mathématisation horizontale, soit à la phase de mathématisation verticale, des difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans l'interprétation ou la résolution du problème et des difficultés que peut rencontrer l'enseignant dans la formulation du problème à poser ou dans la mise en œuvre de la situation en classe.

L'algorithmique à l'école primaire. Dans leur texte, Michèle Couderette et Dominique Laval présentent deux situations visant à introduire des concepts informatiques au cycle 2 (6 à 8 ans). Il s'agit dans un cas de programmer un automate qui doit traverser des tunnels, dans l'autre de représenter le déroulement d'un récit à l'aide du logiciel *ScratchJr*. Dans les deux cas, les auteurs s'intéressent à l'interprétation de la situation réelle évoquée ou du récit que font les élèves, aux stratégies qu'ils développent et interprètent le déroulement observé à l'aide du modèle de Blum et Leiss en l'adaptant à leur exemple qui demande une plus ou moins grande connexion à des savoirs informatiques.

Dispositifs de formation des enseignants et cycle de modélisation

Lesson studies. Le texte de Blandine Masselin et Marion Guérin rend compte de l'atelier sur les lessons studies qu'elles ont animé. Cet atelier proposait de faire vivre aux participants une Lesson study sur une situation qui conduisait à une modélisation par des fonctions. L'atelier s'est déroulé en trois temps : préparation d'une leçon par le groupe à partir d'un germe apporté par les animatrices, observation de cette leçon mise en œuvre par deux participants, analyse du déroulement. La situation étudiée est celle de l'aire de baignade, déjà analysée dans la littérature et dont on peut trouver dans les manuels des versions proposant bien souvent des énoncés simplifiés avec peu de travail de modélisation à réaliser par l'élève lui-même. Après une présentation rapide des lesson studies, le texte donne une description assez détaillée du déroulement de celle-ci et, à ce propos, pointe les questions liées à la modélisation qui se posent dans le travail des élèves ou dans l'adaptation et la gestion de la situation par les enseignants.

Escape game. L'atelier animé par Charlotte Bertin proposait aux participants de concevoir un escape game pour travailler les étapes du processus de modélisation telles que les définissent Blum et Leiss dans un contexte ludique. Il avait pour but de tester une activité de formation continue visant à faire approprier ces étapes par les enseignants. La discussion a porté sur l'adéquation de l'activité proposée avec les objectifs de la formation et sur les adaptations à opérer dans la mesure où on est dans un contexte de jeu et non dans la résolution d'un problème du monde réel. Le texte est un compte-rendu de cet atelier.

Les conférences

Une formation des enseignants à la modélisation et nouveaux besoins épistémologiques

Berta BARQUERO[6]
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona

Marianna BOSCH[7]
Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona

Résumé. La formation des enseignants de tout niveau doit prendre en compte les besoins épistémologiques de la profession. Ces besoins ne sont pas toujours bien connus quand il s'agit de répondre aux demandes curriculaires d'enseigner les mathématiques comme outil de modélisation et dans des démarches d'investigation. L'élaboration conjointe par enseignants et didacticiens des outils mathématiques et didactiques nécessaires pour combler ces besoins est toujours une question ouverte. Nous abordons ici cette question dans la perspective de la théorie anthropologique du didactique (TAD) à travers des *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants.* Les expériences menées par notre équipe de l'Université de Barcelone nous servent de point d'appui pour présenter une réflexion sur le rôle des outils de la TAD autour des notions de modèle, système et objet ostensif pour aider les enseignants à gérer des processus didactiques autour de la modélisation. Ces expériences mettent aussi en évidence de nouveaux besoins terminologiques, mathématiques et didactiques qui devraient nourrir et la recherche didactique sur l'enseignement de la modélisation et la collaboration indispensable entre chercheurs et enseignants.

Mots-clés. Modélisation mathématique, théorie anthropologique du didactique, parcours d'étude et de recherche, formation des enseignants.

Abstract. Teacher education at all levels must consider the epistemological needs of the profession. These needs are not always well known when it comes to responding to curricular demands to teach mathematics as a modelling tool and in investigative approaches. The joint development by teachers and didacticians of the mathematical and didactic tools needed to meet these needs is still an open question. Here we address this question from the perspective of the anthropological theory of the didactic (ATD) through *study and research paths for teacher training*. The experiments carried out by our team at the University of Barcelona provide the basis for a discussion of the role of the ATD approach in helping teachers manage didactic processes based on modelling. These experiences also highlight new terminological, mathematical and didactic needs, which should feed both didactic research on the teaching of modelling and the essential collaboration between researchers and teachers.

Keywords. Mathematical modelling, anthropological theory of the didactic, study and research paths, teacher education.

Resumen. La formación del profesorado a todos los niveles debe tener en cuenta las necesidades epistemológicas de la profesión. Estas necesidades no siempre son bien conocidas cuando se trata de responder a las exigencias curriculares de enseñar las matemáticas como herramienta de modelización y en enfoques de investigación. El desarrollo conjunto por parte de profesores y didactas de las herramientas matemáticas y didácticas necesarias para responder a estas necesidades sigue siendo una cuestión abierta. Aquí abordamos esta cuestión desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) a través de los *recorridos de estudio e investigación para la formación* del profesorado. Las experiencias llevadas a cabo por nuestro equipo en la Universidad de Barcelona proporcionan la base para una discusión sobre el papel de las herramientas de la TAD para ayudar a los profesores a gestionar procesos didácticos basados en la modelización. Estas experiencias también ponen de manifiesto nuevas

[6] bbarquero@ub.edu

[7] marianna.bosch@ub.edu

necesidades terminológicas, matemáticas y didácticas, que deberían alimentar tanto la investigación didáctica sobre la enseñanza de la modelización como la imprescindible colaboración entre investigadores y profesores.

Palabras clave. Modelización matemática, teoría antropológica de lo didáctico, recorridos de estudio e investigación, formación del profesorado.

Introduction : La modélisation comme savoir à enseigner

Pour pouvoir aborder les problèmes d'enseignement et apprentissage des mathématiques dans une perspective scientifique, la didactique doit élaborer des *modèles* des *systèmes* qu'elle prend comme objet d'étude. C'est dans ce processus de modélisation qu'elle *construit* ces objets. Ce que nous présentons ici est la manière dont la Théorie Anthropologique du Didactique aborde les problèmes d'enseignement, apprentissage ou, plus largement, d'étude des processus de modélisation mathématique. Il nous faudra donc modéliser (en didactique) l'activité de modélisation (mathématique ou autre). Il s'agit là d'un exercice de réflexivité propre à de nombreuses sciences humaines : dans la mesure où la didactique étudie les processus d'étude, elle est obligée de s'étudier elle-même. Il en va de même avec les processus de modélisation que nous nous voyons portés à modéliser.

Nous allons pour cela poser deux grandes questions auxquelles répondra notre proposition de modélisation. La première est de considérer cet objet que les systèmes d'enseignement de nombreux pays viennent à désigner comme « la compétence modéliser ». Il s'agit là de la modélisation en tant que *savoir à enseigner* dans le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985). Il faudra le rattacher à la modélisation en tant que pratique scientifique en mathématiques et ailleurs. Puis, comme nous le disions plus haut, nous allons proposer notre propre conception (didactique) du *processus de modélisation* en tant que construction, délimitation, travail, validation et utilisation de modèles. Cette conception est celle que nous utiliserons comme outil pour décrire, concevoir, gérer, développer, analyser son enseignement. Nous parlerons à ce propos de la dimension épistémologique de l'analyse didactique puisqu'elle aborde la délimitation et définition même du savoir autour de la modélisation. Et nous verrons que cette analyse va dévoiler un manque de ressources épistémologiques (que nous appellerons plus tard praxéologiques) pour mettre en place « la compétence modéliser ».

La deuxième question est celle de l'enseignement de la modélisation (ou de « la compétence modéliser »), que ce soit au Primaire, au Collège, au Lycée, à l'Université ou en formation d'enseignants (qui, en Espagne, fait partie de l'enseignement universitaire). Nous l'aborderons à partir de l'analyse des besoins didactiques pour l'enseignement et l'apprentissage, bref l'étude, de la modélisation dans les institutions scolaires actuelles.

Le texte qui suit reprend, de manière parfois très littérale, des publications récentes des auteures, en particulier le cours de Berta Barquero à la XXIème École d'Été de Didactique des Mathématiques à l'Ile de Ré en 2021 (Barquero, 2024a), le TD associé à ce cours (Wozniak, Barquero, Bosch et Kaspary, 2024), la conférence de Barquero au congrès CERME13 (Barquero, 2024b) ainsi qu'une communication commune au congrès ICTMA-21 en 2022 (Barquero, Bosch et Wozniak, 2022).

1. 2. La modélisation d'après la TAD

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) propose une conceptualisation à la fois simple et flexible, ainsi qu'unitaire et générale de la modélisation, qui situe celle-ci au cœur de l'activité mathématique (et scientifique) :

> *Un aspect essentiel de l'activité mathématique porte sur la construction d'un modèle (mathématique) de la réalité que nous voulons étudier, sur le travail avec ce modèle et sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce travail pour répondre aux questions posées initialement. Une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier, par conséquent, avec une activité de modélisation mathématique (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, notre traduction).*

La notion de modélisation est présente en TAD dès les premiers développements de la théorie. Chevallard (1989) la définit comme un processus qui relie un *système* à un *modèle* et distingue trois étapes : la définition du système à étudier, la construction du modèle, et le travail dans le modèle. Les notions de « système » et de « modèle » doivent s'entendre comme une fonction plutôt que comme une qualité. Un système est n'importe quel domaine de la réalité qui peut être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut les systèmes extra mathématiques et les (intra)mathématiques. Un modèle est alors une construction qui permet d'apporter des connaissances sur le système considéré. Chevallard (1989, p. 57) distingue « travailler le modèle » et « travailler sur le modèle ». Travailler le modèle consiste à produire des connaissances relatives au système étudié. Travailler sur le modèle peut s'interpréter comme la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude. La problématique de l'adaptation du modèle au système est une tâche qui doit être au cœur du processus de modélisation.

Le processus de modélisation n'est pas linéaire et deux propriétés fondamentales lui sont attribuées : la *réversibilité* de la relation système-modèle et la *récurrence* du processus de modélisation. D'un côté, le rapport du système au modèle peut s'inverser et faire apparaître le système comme un modèle de son modèle (nous en verrons un exemple tout de suite). D'un autre côté, le travail sur le modèle peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude, et qui impliquent une redéfinition des systèmes à modéliser, qui intègrent alors les systèmes, modèles et connaissances préalablement engendrés. Il faut pour cela considérer que modéliser un système déjà mathématisé fait aussi partie du travail de modélisation.

Ajoutons ici que le processus de modélisation s'insère normalement dans un processus de questionnement de la réalité où appartient le système que l'on prend comme objet d'étude. L'on questionne ce système que l'on doit délimiter pour construire un modèle qui permette de produire des connaissances à son propos. L'on questionne le modèle (sa validité, fiabilité, sa productivité) et l'on questionne aussi le rapport du modèle au système : sa pertinence et représentativité, ses limitations et possibles biais. Nous sommes ici dans le paradigme pédagogique du *questionnement du monde* (Chevallard, 2002, 2015 et 2020) où les processus didactiques sont basés non dans l'étude d'organisations de savoir déterminées à l'avance – ce qui correspond à notre paradigme actuel de la *visite des œuvres* – mais dans l'enquête de questions vivantes. Ces enquêtes incluent des moments de recherche et d'étude d'œuvres disponibles – y inclus des modèles déjà élaborés par autrui pour étudier des questions semblables à celles abordées – et des moments d'exploitation des ressources disponibles pour élaborer des réponses appropriées.

Les œuvres se décrivent, en TAD, à l'aide de la notion de *praxéologie* qui permet d'appréhender aussi bien les activités humaines de toutes sortes que les savoirs produits par ces activités (Chevallard, 1999). Une praxéologie est l'union indissociable d'une *praxis* ou savoir-faire, décrite en termes de types de tâches à effectuer et de techniques utilisées pour ce faire ; et d'un *logos* ou savoir, décrit en deux niveaux : une technologie ou discours pour décrire, organiser, justifier et valider les techniques, et une théorie qui contient les éléments souvent implicites qui fondent et la technologie et la praxis.

Dans le processus de modélisation, les praxéologies interviennent à deux niveaux. D'une part, la modélisation en tant qu'activité humaine se décrit en termes de praxéologies de modélisation, avec ses types de tâches, ses techniques et son discours technologico-théorique. Le fait que les praxéologies de modélisation soient peu enseignées et peu institutionnalisées dans le savoir mathématique savant – celui des producteurs de mathématiques – fait que leur *logos* n'est pas toujours très explicité ou uniformisé. Il n'existe pas de discours qui décrive de manière partagée dans la communauté savante en quoi consiste modéliser, quels sont les types de tâches essentielles au processus de modélisation et les techniques associées, et quel est l'univers notionnel correspondant. C'est cette situation qui a amené Wozniak (2012) à parler de « praxéologies muettes » pour se référer à ces pratiques qui manquent d'un logos développé et pour lesquelles on a peu de mots pour décrire et expliquer ce que l'on fait.

Le second niveau d'intervention des praxéologies dans le processus de modélisation correspond aux notions même de système et de modèle. Un système est une portion de la réalité que l'on délimite et isole. Il y intervient généralement des praxéologies plus ou moins développées à propos desquelles on se pose des questions. Les modèles sont à leur tour aussi pris dans des praxéologies où ils sont utilisés comme éléments techniques ou technologiques. « Faire travailler un modèle » pour le développer et pour produire des connaissances à propos du système n'est possible que parce qu'il existe des praxéologies où ce modèle peut fonctionner, selon des principes et des règles fondés par leur logos.

Prenons un exemple simple d'une classe avec des garçons et des filles. Ce sera notre système à modéliser. Le fait de faire une distinction entre genres montre déjà que le système n'est pas neutre, mais qu'il fait partie d'un ensemble de praxéologies sociales et scolaires très particulières que l'on devra prendre en charge au moment de le délimiter et le questionner. Si l'on s'interroge sur le rapport entre filles et garçons dans la classe, plusieurs modèles sont possibles, chacun s'inscrivant dans une certaine organisation praxéologique qui les rendra plus ou moins productifs à propos de la question posée. On peut travailler directement sur le système en rapprochant chaque fille d'un garçon, puis de deux, etc. On peut aussi utiliser un modèle graphique ou un modèle numérique. Ce dernier peut prendre la forme d'une comparaison entre fractions (si une praxéologie autour des nombres fractionnaires ou rationnels est disponible) ou d'un rapport entre deux quantités (qui suppose une variation non-négligeable de la praxéologie précédente). Le passage entre ces différents modèles (par exemple 15 et 11, puis 15/26 et 11/26 ou « 15 à 11 », enfin 58% et 26% ou 1,36) est un cas élémentaire de *modélisation récurrente* : du système au modèle numérique, puis à la comparaison de fractions, enfin à la comparaison de pourcentages. Ce même exemple permet d'illustrer aussi le caractère *réversible* de la relation de modélisation. Considérons comme système à étudier les fractions 15/26 et 18/29. Comment déterminer la plus grande ? Prenons comme modèle une classe à 26 élèves dont 15 filles. Si trois filles arrivent dans la classe, la proportion de filles augmente, d'où on déduit que 15/26 < 18/29. Le rôle des objets (et praxéologies associées) « classe avec des garçons et des filles » et « fractions » s'est inversé : le modèle est devenu système et le système joue le rôle de modèle (Figure 1).

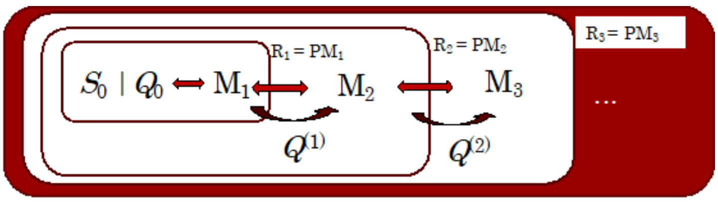


Figure 1 *: La récursivité du processus de modélisation.*

2. Quel cadenas est le plus sûr ? Récursivité et réversibilité du processus de modélisation

Considérons un autre exemple de processus de modélisation où interviennent aussi les propriétés de récursivité et réversibilité mises en place dans un environnement scolaire au niveau du secondaire (Vásquez, Barquero et Bosch, 2021). Le système considéré est un ensemble de cadenas divers (Figure 2) que l'on utilise habituellement pour fermer des guichets. La question que l'on se pose est de savoir quel cadenas est plus sûr, ce qui revient à déterminer le nombre de codes possibles de chacun.

Figure 2 *: Premier jeu de cadenas utilisé par les élèves*

Un premier modèle pour répondre à la question est une liste des codes possibles. Ce premier modèle s'appuie sur une codification des éléments à prendre en compte et une certaine systématicité dans la production d'une liste. Il donne lieu à un deuxième modèle en forme de calcul numérique qui permet d'obtenir le nombre d'éléments de la liste sans avoir à les écrire et les énumérer tous. Ce premier modèle numérique peut à son tour se modéliser par une formule numérique où les nombres concrets utilisés adoptent un certain caractère générique. Ces formules pourront se modéliser à leur tour par des formules algébriques concrètes produites dans chaque cas. La figure 3 montre un exemple de chacun de ces modèles successifs qui peuvent être considérés.

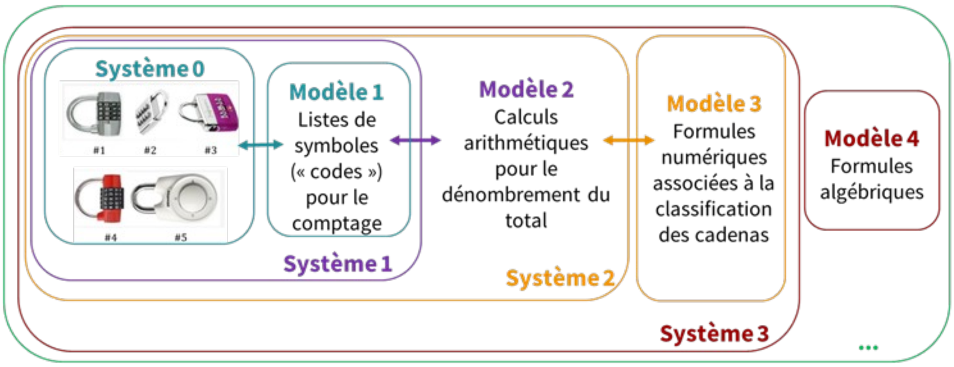


Figure 3 *: Construction progressive des modèles dans l'étude des cadenas (système 0).*

La récursivité du processus est claire avec la production de modèles successifs (modèles 1, 2, 3 et 4) et la construction de nouveaux systèmes qui incluent, à chaque étape : le système antérieurement délimité, le modèle et le travail dans ce modèle. On voit ainsi apparaître un nouveau système S1 qui inclut S0 et les listes produites par le modèle 1 (M1, voir Figure 4). C'est ce système qui est modélisé par le modèle 2 avec des calculs numériques pour dénombrer le total (M2, Figure 5), donnant lieu à son tour à un nouveau système S2 qui sera modélisé par les formules numériques associées à la classification des cadenas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"012"	102	201	301	401	501	601	701	801	901
"013"	103	203	302	402	502	602	702	802	902
"014"	104	204	304	403	503	603	703	803	903
"015"	105	205	305	405	504	604	704	804	904
"016"	106	206	306	406	506	605	705	805	905
"017"	107	207	307	407	507	607	706	806	906
"018"	108	208	308	408	508	608	708	807	907
"019"	109	209	309	409	509	609	709	809	908
"021"	120	210	310	410	510	610	710	810	910
"023"	123	213	312	412	512	612	712	812	912
"024"	124	214	314	413	513	613	713	813	913
"025"	125	215	315	415	514	614	714	814	914
"026"	126	216	316	416	516	615	715	815	915
"027"	127	217	317	417	517	617	716	816	916
"028"	128	218	318	418	518	618	718	817	917

Figure 4 *: Type de Modèle 1 avec le répertoire des combinaisons possibles pour chaque cadenas (les couleurs marquent certaines des combinaisons qui utilisent les mêmes symboles).*

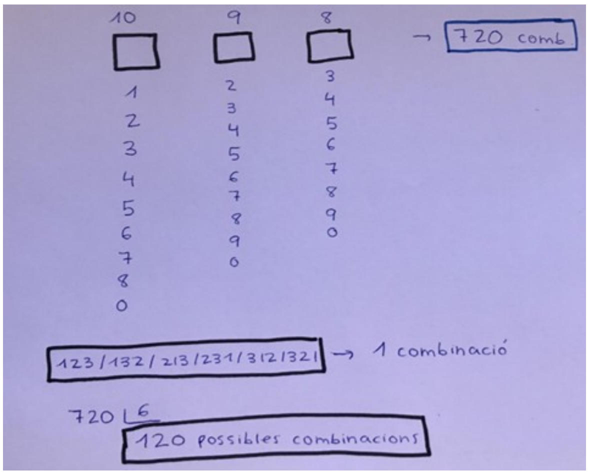


Figure 5 *: Type de Modèle 2 avec un modèle numérique et le calcul qui en découle.*

Le cas des cadenas offre un exemple très intéressant de récursivité. En effet, dans le processus didactique que nous présentons dans ce qui suit, une fois que les formules algébriques ont été institutionnalisées, les élèves devaient aborder un ensemble de systèmes divers (parfums de glaces, couleurs de tee-shirts, etc.) incluant des problèmes de dénombrement. La stratégie qui est apparue alors – et qui n'avait pas été anticipée par l'enseignante – est l'*utilisation des cadenas comme modèles des systèmes* à étudier : les élèves distinguaient les cas de figure des « cadenas à chiffres » de ceux des « cadenas à piston », avec ou sans contraintes, etc. Les cadenas vont ainsi jouer le jeu de *modèles intermédiaires* entre les systèmes à dénombrer et les modèles algébriques à choisir pour produire le dénombrement demandé (Figure 6).

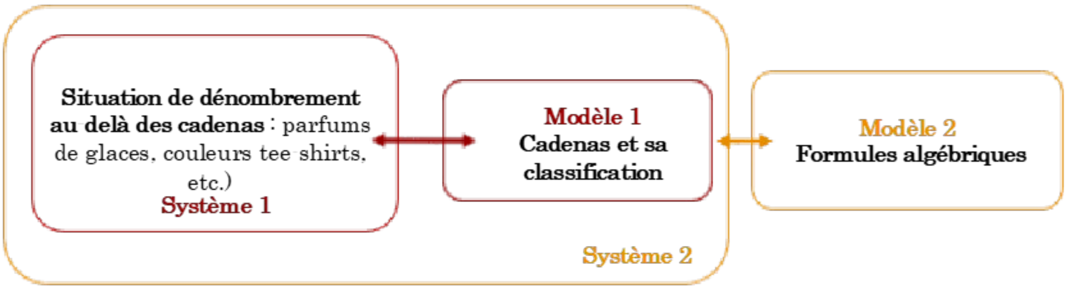


Figure 6 *: Réversibilité du rôle de système-modèle*

Le processus de modélisation des cadenas a été implémenté sous forme d'un *parcours d'étude et de recherche* (PER) pendant quatre années consécutives dans une école des alentours de Barcelone (Vásquez, Barquero et Bosch, 2021). Les PER sont des dispositifs d'enseignement conçus et expérimentés dans le but d'analyser les conditions qui permettent de faire vivre dans la classe des processus d'enquête basés sur l'étude de questions dans la perspective du « paradigme du questionnement du monde ». Les PER servent aussi à identifier des contraintes de différents ordres – mathématiques, didactiques, pédagogiques, scolaires mais aussi sociales et civilisationnelles – qui pèsent sur les processus d'enquête et sur les processus de modélisation qui permettent la recherche et l'élaboration de réponses aux questions abordées.

Le PER que nous présentons ici part de la considération des différents types de cadenas considérés plus haut (Figure 2) et de la question génératrice Q_0 : « Quel cadenas est le plus sûr ? ». Le PER a été mis en place avec trois classes de 2[e] englobant une soixantaine d'élèves avec trois enseignants qui changent de classe à chaque séance. Les élèves travaillent en groupes de 5-6 et doivent fournir : un « bilan d'étape » par écrit à la fin de chaque séance, une présentation orale à la fin du parcours, passer un examen et répondre à un questionnaire individuel. Nous verrons comment la description du processus de modélisation constitue un élément primordial non seulement pour le développement du PER mais aussi pour sa conception et son analyse. Barquero (2024a) présente une description détaillée du processus que nous reprenons ci-après et dont les principales étapes ont été décrites plus haut.

Dans un premier temps, les étudiants travaillent avec différents cadenas en se focalisant sur la question dérivée Q_1 « Combien de 'codes' peut-on former avec chaque cadenas ? Quelles stratégies peut-on utiliser pour les dénombrer ? » Ces cadenas constituent le *système initial* (S1). Dans une première phase, les étudiants peuvent proposer des modèles initiaux pour bien décrire le répertoire des combinaisons possibles. Ils obtiennent ainsi un premier modèle à partir de, par exemple, la liste des codes ou combinaisons possibles pour chaque cadenas (en les écrivant manuellement ou en utilisant Excel) (M1, Figure 4) ou en préparant une liste initiale de codes possibles et des calculs arithmétiques pour faciliter le comptage total (M2, Figure 5).

Dans cette première phase, il est important que, une fois que les étudiants ont prédit le nombre total de codes, ils puissent expliquer les modèles utilisés, justifier leur utilisation et la réponse qui en résulte. Il apparaît une limitation importante relative à la validation des résultats finaux pour savoir si l'on a compté toutes les combinaisons. Ici, la *dimension expérimentale* est cruciale, car les élèves peuvent vérifier manuellement en utilisant les cadenas pour *simuler* toutes les combinaisons possibles, ils ne disposent pas de techniques pour calculer le total sans avoir à écrire la liste entière des codes. A ce stade, il faut que les étudiants puissent identifier et débattre à propos des variables critiques du système initial à modéliser et il faut accorder une terminologie spécifique pour décrire les éléments à compter et déterminer leurs caractéristiques. En particulier, des questions dérivées importantes sont : Comment nommer les positions du cadenas et les autres éléments (chiffres, lettres, symboles, etc.) ? Combien de symboles peut-on avoir dans chaque position ? Les éléments peuvent-ils être (ou non) répétés ? L'ordre dans lequel on saisit chaque élément est-il important ?

Dans une deuxième phase, les enseignants apportent quatre nouveaux cadenas avec quelques variations par rapport aux cinq initiaux. Les étudiants continuent aussi à travailler avec les cinq cadenas précédents avec de nouvelles restrictions ajoutées par les enseignants. Avec cette variation sur le système, avec les neuf cadenas, ils introduisent de nouvelles conditions sur la composition du code des cadenas. La question principale Q_2 à traiter est : « Peut-on utiliser le même type de techniques de comptage pour trouver le nombre total de codes de sécurité pour n'importe lequel de ces nouveaux cadenas ? » L'objectif principal de cette étape est de tester la validité des techniques de modélisation et des modèles résultants (M1 et M2) considérés dans la situation précédente et de comprendre les changements que les nouveaux cadenas introduisent dans le système. On pourrait dire que cette deuxième phase vise à renforcer la praxéologie de modélisation, en rendant la partie *logos* plus explicite (ce qu'ils ont fait, ce qui fonctionne et ne fonctionne pas, pourquoi, etc.). De plus, c'est un moyen de discuter de la portée des techniques et des modèles en proposant aux étudiants un système élargi. Une fois que les étudiants ont effectué tous les calculs pour les neuf cadenas, de nouvelles questions apparaissent (de la part des élèves ou introduites par les enseignants) : « Q_3 : Est-ce qu'il existe une formule qui pourrait simplifier le comptage total des combinaisons ? Ces formules sont-elles spécifiques du type de cadenas que nous voulons comprendre ? » Les enseignants introduisent alors de nouveaux modèles (M3 ; voir Figure 7) basés sur les *formules numériques* associées à la classification (bien que provisoire) des cadenas.

La troisième phase arrive avec une extension importante de la situation initiale, allant au-delà de la problématique du cadenas présentée initialement. Dans ce sens, tout le travail construit dans les phases précédentes fait maintenant partie du système à modéliser. La question à aborder est Q_4 : « Comment élaborer une technique générale pour trouver le nombre de combinaisons pour chaque cadenas ? ». Cette phase implique que des informations « externes » soient ajoutées à l'étude : par exemple des formules algébriques (M4) pour le calcul du nombre total de combinaisons possibles sont considérées. Cette introduction peut être faite par l'enseignant ou résulter de la recherche des élèves.

Classification of all padlocks according to the resolution method

Name of the group of padlocks	Padlocks in the group	Calculation of the number of combinations of each padlock	Proposed formula
The raised padlocks	1	10 · 10 · 10 · 10 = 10.000 combinations	n^m n = number of cell elements m = number of cells *unless the number of cell elements is different, we use the multiplication of the number of cell elements (as in padlock 3)
	3*	4 · 10 · 12 · 10 · 10 = 48.000 combinations	
	4	10 · 10 · 10 · 10 · 10 = 100.000 combinations	
	5	4 · 4 · 4 · 4 = 256 combinations	
The dividing padlocks	2	10 · 9 · 8 = 720 / 6 = 120 combinations	**n!** is the number of cell elements multiplied by the next number in descending order. **m!** is the number of cells multiplied by the next number in descending order. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
	7	10 · 9 /1·2 + 10 · 9 · 8/1 · 2 · 3... = 1.013 combinations	
The factorial padlocks	6	10 · 9 · 8 · 7 = 5.040 combinations	n · (n - 1) · (n - 2) · (n - 3) ... n = number of cell elements *unless the number of cell elements does not change (as in padlock 8)
	8*	4 · 9 · 12 · 10 · 9 = 38.880 combinations	
	9	4 · 3 · 2 · 1 = 24 combinations	

***Figure** 7 : Travail dans le Modèle 3 avec les formules numériques et algébriques.*

La séquence des questions abordées, qui peut subir des variations dans chaque implémentation en fonction du travail et des propositions des élèves, est aussi un outil pour les enseignants lors de la planification et de la préparation des séances du PER. Le détail de ces questions est aussi un outil pour les enseignants lorsqu'ils ont à prévoir le travail de chaque séance et à discuter ou faire un bilan des avancées de l'enquête. Ainsi, les deux premières séances sont associées à Q_0 (quel cadenas est le plus sûr ?) et $Q_{0.1}$ (quel cadenas admet le plus de codes ?), les quatre suivantes à Q_1 (comptage du nombre de codes) avec une mise en commun des résultats partiels, puis Q_2 (cas général pour un cadenas quelconque) et Q_3 (équivalences entre cadenas). On peut ensuite prévoir un cours pour institutionnaliser les stratégies trouvées par les élèves et se consacrer à Q_4 (autres types de situations de dénombrement). Bien que le questionnement soit ouvert et qu'il revienne aux élèves de proposer et aborder les questions dérivées de Q_0, les enseignants peuvent anticiper minimalement des parcours possibles, pour ensuite introduire au fil des séances les modifications jugées pertinentes. Ce sont les questions, et non (ou pas seulement) les différents types de modèles, qui constituent le moteur déclencheur de l'enquête et, en conséquence, du processus de modélisation.

4. Modélisation et formation des enseignants

Les PER sont aussi un dispositif utilisé en formation des enseignants, donnant lieu au *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE). Nous ne développerons pas ici les raisons d'être et le fonctionnement de ces dispositifs, que le lecteur trouvera dans (Barquero, Bosch et Romo, 2018 ; Wozniak et al., 2024). Nous soulignerons uniquement que les PER-FE intègrent un module d'expérimentation d'un PER et d'analyse de ses composants dans la triple perspective d'aborder un problème de la profession, créer un milieu partagé pour analyser l'activité mathématique dans le paradigme du questionnement du monde, d'apporter des outils d'analyse didactique de cette activité, en particulier le cadre d'analyse des processus de modélisation. De plus, ils commencent à traiter le problème de l'écologie de processus d'enquête propres au paradigme du questionnement du monde et qui sont aujourd'hui fortement contraints par le paradigme dominant de la visite des œuvres. Nous présentons ici deux PER-FE expérimentés en formation initiale de futurs enseignants du primaire qui nous permettront d'illustrer deux aspects clé des processus de modélisation : l'importance de la modélisation intramathématique pour comprendre les mécanismes de processus de modélisation complexes et le rôle des simulations dans ces processus.

4.1. La boîte du pâtissier : un processus de modélisation progressif

La situation de modélisation que nous envisageons est inspirée d'une activité bien connue (Chappaz et Michon, 2003) : une pâtissière souhaite fabriquer différentes boîtes pour emballer ses gâteaux. Elle envisage d'utiliser une méthode de fabrication par pliage illustrée par la Figure 8.

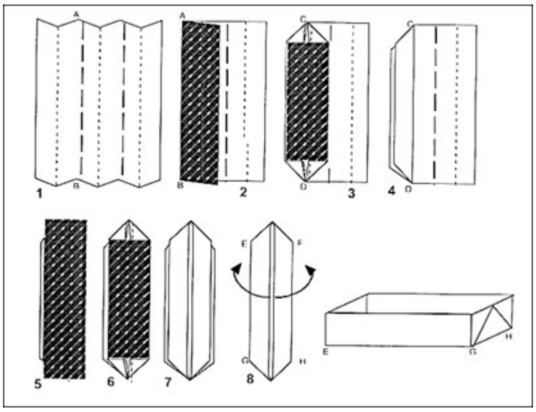


Figure 8 : La construction de la boîte (Chappaz and Michon, 2003, p. 32).

Cette situation déclenche un processus de modélisation engendré par différentes questions qui se posent successivement : « Quelles sont les dimensions de la boîte fabriquée à partir d'une feuille de papier donnée ? Quelle feuille de papier faut-il pour obtenir une boîte donnée ? Peut-on obtenir n'importe quelle boîte ? Quelle est la relation entre les dimensions de la boîte et celles de la feuille de papier ? » Les réponses à ces questions motivent le développement de différents modèles et ouvrent de nouvelles questions qui engendrent les suivantes.

Cette situation a été mise en œuvre à l'Université de Barcelone dans une unité de didactique des mathématiques pour la formation initiale d'enseignants du primaire, avec des étudiants de quatrième et dernière année d'université. Ce cours est le dernier des unités à contenu mathématique et didactique. Il vise à transférer des outils pour la conception, l'analyse et la gestion des mathématiques scolaires. La situation de la boîte du pâtissier est la dernière du cours. Elle est généralement mise en œuvre au long de sept séances de deux heures par semaine, avec des groupes d'environ 50 étudiants. Les étudiants n'ont pas reçu auparavant d'enseignement spécifique sur la modélisation mathématique.

Lors des trois premières séances, on propose aux étudiants de vivre l'activité de modélisation. L'objectif principal est de leur faire expérimenter une tâche peu familière qui pourrait, sous certaines conditions, exister dans une classe ordinaire. Au cours de ces séances, les étudiants travaillent en groupes de 4-5 et rédigent un rapport décrivant les processus suivis (questions abordées, modèles utilisés, réponses apportées et nouvelles questions pour poursuivre l'enquête). Les trois séances suivantes sont consacrées à l'analyse du processus de modélisation tel qu'il a été vécu. La mise en commun des rapports des élèves permet au formateur, en collaboration avec les étudiants, d'institutionnaliser les éléments du processus de modélisation et leur rôle (propriétés et limites des modèles, cohabitation ou concaténation des modèles, etc.).

Avec des feuilles DIN-A4, la construction de boîtes amène les étudiants à constater que l'on peut faire deux boîtes différentes (Figure 9) selon que l'on plie dans le sens de la longueur ou dans le sens de la largeur. Ils remarquent également qu'avec une feuille carrée, on ne peut réaliser qu'une seule boîte. Lorsque les dimensions de la boîte sont mesurées à partir de feuilles de différentes tailles (DIN-A4, DIN-A5, etc.), les élèves commencent à travailler avec le premier modèle 1 (M1) qui découle d'une praxéologie basée sur les *mesures empiriques*. Cette praxéologie fournit des outils techniques et théoriques pour répondre aux questions relatives aux dimensions des boîtes obtenues à partir de différentes feuilles.

Figure 9 *: Boîtes produites avec une feuille A4 pliée en longueur (à gauche) ou en largeur (à droite).*

A partir du travail avec M1, les étudiants fournissent des réponses à l'aide d'une table de mesures (voir exemple dans la Table 1) et ouvrent de nouvelles questions telles que : « avec une feuille carrée, on n'obtient pas une boîte à fond carré ; avec une feuille rectangulaire, on peut obtenir une boîte à fond carré ou rectangulaire ». Cependant, le travail avec M1 ne montre pas de lien apparent entre les dimensions de la feuille et les dimensions de la boîte obtenue.

Tableau 1 *: Dimensions des boîtes et feuilles présentées par l'équipe B comme exemple de M1.*

	Dimensions de la feuille			Dimensions de la boîte obtenue				
	A (longueur)	B (largeur)	Aire	A (long)	B (large)	Hauteur	Aire de la base	Volume
DIN-A2	59.4	42	2494.8	21.5	28.5	10.9	612.75	6678.975
DIN-A3	42	29.7	1247.4	*(nous n'avons pas recueilli les données)*				
DIN-A4	29.7	21	623.7	11.3	10	4.9	113	553.7
DIN-A5	21	14.5	155.925	15.8	5.1	2.5	80.58	201.45

Ce travail initial avec M1 aide les étudiants à hypothétiser certaines relations possibles telles que : « la hauteur semble toujours être la moitié de l'une des deux dimensions du fond ». L'étude de cette question conduit à considérer un système enrichi S1, qui comprend maintenant le système initial S0 composé de la feuille, de la boîte avec la procédure de pliage empirique, et M1.

En dépliant la boîte, une analyse géométrique des plis (dont certains représentent les dimensions de la boîte) conduit à la recherche d'une relation entre les différentes dimensions. On obtient un nouveau modèle 2 (M2) basé sur une praxéologie *géométrico-numérique*. Il inclut des propriétés géométriques élémentaires (logos), notamment celles du carré (par exemple, ses diagonales sont des axes de symétrie, Figure 10), et permet la recherche de relations numériques entre les longueurs (praxis). Dans la Figure 10, l'équipe C travaille avec cette praxéologie en essayant de trouver les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte à base carrée de 10 cm x 10 cm. Les plis forment 6 bandes verticales composées de deux carrés (5 cm x 5 cm) et d'un rectangle (5 cm x 10 cm). La longueur des côtés des 12 carrés de la figure correspond à la largeur d'une bande. Ces observations, basées sur le processus de pliage et les mesures (S1), sont validées par les propriétés géométriques des figures. Le travail avec M2 permet de décrire, valider et généraliser la relation entre les dimensions de la boîte et celles de la feuille, à travers un discours pré-algébrique. Par exemple, certains élèves établissent que « la hauteur de la boîte est égale à la moitié de sa largeur », ce qui « est égal au tiers de la longueur de la feuille », « alors que la longueur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux hauteurs ».

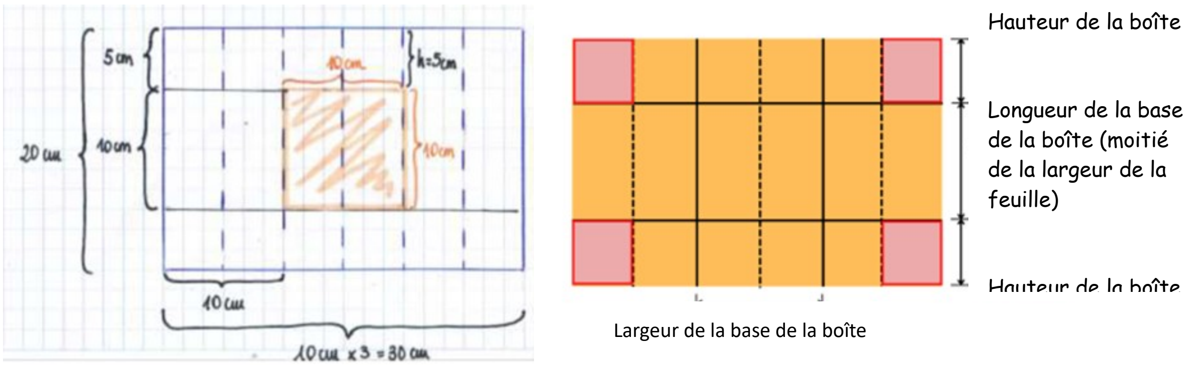


Figure 10 *: Exemple de deux utilisations de M2 : équipe C (gauche) et équipe D (droite).*

M2 généralise ce qui a été observé avec la mesure des boîtes (M1) par l'examen de nouvelles questions, telles que : « Quelle boîte peut-on faire avec une feuille de (n'importe quelles) dimensions données ? Quelle boîte peut être fabriquée avec une feuille de (n'importe quelles) dimensions données ? Quelle feuille doit être fournie pour obtenir une boîte de (n'importe quelles) dimensions données ? » Le processus de modélisation considéré ici constitue un nouveau système S2 qui comprend à la fois : le système précédent S1 et M2.

Comme nous l'avons vu dans la Figure 9, une feuille rectangulaire peut être utilisée pour construire deux boîtes différentes selon le sens du pliage. En notant x et y la largeur et la longueur de la feuille ; x_b et y_b les deux dimensions du fond de la boîte et z sa hauteur, l'équipe E (Figure 11) établit les relations algébriques qui lient les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis. Par exemple, si les plis sont parallèles à la largeur, ils indiquent :

- *Nous savons que : $x_b = 1/3\ x$. Nous observons aussi que la hauteur de la boîte correspond à $1/6\ x$*
- *On en déduit que : $z = 1/6\ x$*

- *Finalement, nous observons que la largeur de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins le double de sa hauteur :*
  $y_b = y - 1/6\ x - 1/6\ x$
  $y_b = y - 2/6\ x$
  $y_b = y - 1/3\ x$
- *Étant donné que* $y_b = y - 1/3\ x$*, l'on obtient :* $y_b = y - x_b$

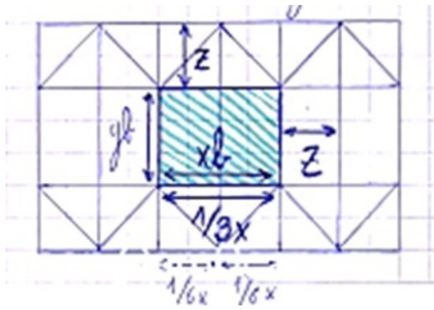


***Figure 11** : Modélisation algébrique M3 de S2 fournie par l'équipe E.*

Nous disposons donc maintenant d'un nouveau modèle M3 basé sur les praxéologies de l'algèbre élémentaire. Il inclut et étend les modèles précédents. En poursuivant le travail de généralisation et de développement du modèle algébrique, et en abordant, par exemple, les problèmes de maximisation de volume, un quatrième modèle M4 peut être construit sur la base de la praxéologie des fonctions élémentaires à plusieurs variables. Dans le premier sens de pliage, la fonction F1 associe les dimensions (a, b) d'une feuille aux dimensions (x, y, z) de la boîte et, dans le sens inverse, la fonction F2 associe les dimensions de la boîte (x, y) à celles de la feuille (a, b) :

$$F_1(a, b) = (a/3;\ b - a/3;\ a/6) \qquad F_2(x, y) = (3x;\ x + y).$$

Cette brève analyse montre comment les praxéologies de modélisation se développent en même temps que de nouvelles questions émergent. Chaque modèle mathématique est motivé par l'apparition de nouvelles questions dans le système précédent et fait partie du nouveau système dans lequel le modèle mathématique suivant est construit. La Figure 12 synthétise l'évolution, et la concaténation, des praxéologies de modélisation lors de l'expérience de la situation de la boîte du pâtissier.

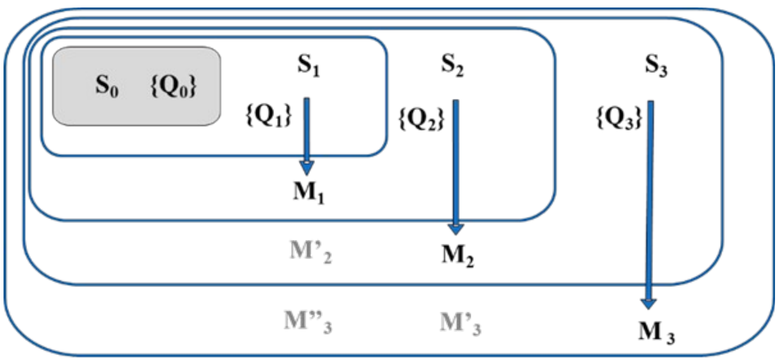


***Figure 12** : Schéma du processus de modélisation de la boîte du pâtissier.*

Dans un deuxième module du PER-FE, les participants sont invités à assumer un nouveau rôle, celui d'analystes mathématiques et didactiques. Assumer ce rôle implique de s'immerger dans l'analyse mathématique et didactique du processus de modélisation et du parcours qu'ils viennent de vivre. Afin de ne pas réduire cette analyse à une simple énumération des contenus abordés ou à la correction des réponses, la formatrice souligne l'importance d'analyser la dynamique établie par les questions traitées, les systèmes considérés, les modèles construits et ceux qui peuvent coexister. L'on propose pour cela l'élaboration de *cartes de questions et de réponses* (Winsløw, Matheron et Mercier, 2013 ; Florensa, Bosch et Gascon, 2021) en tant qu'outil principal d'analyse.

Dans (Barquero, Bosch et Florensa, 2022), on trouve quelques exemples de cartes de questions-réponses (QR) élaborées par les enseignants en formation, dans le cadre de ce même PER-FE. À partir de ces cartes QR, on peut observer comment les étudiants, sous la guidance de la formatrice, attribuent une terminologie spécifique pour exprimer des phases ou étapes dans le processus de modélisation et nomment les différents modèles (par exemple, « modèle de boîte dépliée » (décrite comme M2) ou « modèle algébrique » (décrite comme M3) qui peuvent émerger et coexister dans les différentes étapes de PER.

Un élément crucial ici est que les enseignants en formation considèrent l'activité de modélisation dans son ensemble et soient capables de repérer les différents modèles coexistants, ainsi que de comprendre comment les utiliser, les valider et les faire évoluer. L'étude des limites des modèles et des techniques associées, ainsi que leur développement vers d'autres modèles plus complexes, par exemple, sont des questions qui enrichissent le logos didactique des enseignants sur le processus de modélisation et son analyse mathématique et didactique.

4.2. La ségrégation scolaire : modélisation et simulation

Le deuxième PER a été conçu pour travailler sur une situation d'enquête concernant la ségrégation scolaire. Il aborde un cas différent de ceux considérés plus haut car, ici, le processus de modélisation est directement nourri par l'examen de modèles déjà existants. Dans ce cas, le processus de modélisation comprend la délimitation du système, la recherche de modèles existants, leur sélection et leur comparaison, l'analyse de leurs propriétés et de leurs limites, le travail avec les modèles pour produire des réponses et les comparer, ainsi que leur validation finale et leur développement.

Le PER a été expérimenté pour la première fois en 2022/23 dans le cadre du premier cours obligatoire de mathématiques pour des étudiants de deuxième année de formation initiale d'enseignants du primaire à l'Université de Barcelone. Sa mise en œuvre s'est déroulée sur trois séances de deux heures (et un travail équivalent hors classe) avec un groupe de 45 étudiants, en début d'année. La question à l'origine de ce PER est née de la publication d'un rapport commandé par le bureau de l'Ombudsman de la Catalogne – et des nouvelles qui s'en sont dérivées – sur l'évolution de la ségrégation scolaire dans les municipalités catalanes les plus importantes. La question a été formulée comme suit : « Qu'est-ce que la ségrégation scolaire et comment est-elle mesurée ? Que signifie pour une municipalité une ségrégation scolaire de 0,43 ou de 0,21 ? D'où viennent ces chiffres et comment les interpréter ? »

Une recherche rapide sur Internet a permis aux étudiants de découvrir que la ségrégation scolaire est définie comme la répartition inégale des élèves vulnérables entre les écoles d'une municipalité. Ils ont utilisé comme principale source d'information le site web d'une fondation catalane d'études pédagogiques (www.fundaciobofill.cat). Comme l'indique le site, les déséquilibres contribuent à une concentration d'élèves vulnérables dans certaines écoles. En outre, la vulnérabilité de ces établissements est supérieure à celle des zones environnantes. Le site indique comme mesure typique de la ségrégation scolaire l'indice de dissimilarité D (voir la figure 13) et explique que D peut s'interpréter comme la proportion d'enfants vulnérables qui devraient être déplacés pour parvenir à une distribution complètement équilibrée. L'indice varie de 0 (absence de ségrégation) à 1 (niveau maximal de ségrégation). Même si certains étudiants ont commencé l'enquête en essayant d'élaborer une mesure propre de la ségrégation – en entamant un processus de modélisation à partir de zéro –, le défi du PER s'est transformé en l'analyse et utilisation du modèle mathématique fourni par l'indice de dissimilarité.

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{X} - \frac{y_i}{Y}\right| \quad 0 \leq D \leq 1$$

x_i : nombre d'élèves vulnérables dans l'école i

y_i : nombre d'élèves non-vulnérables dans l'école i

X et Y : nombre total d'élèves vulnérables et non-vulnérables respectivement dans la municipalité ou le district.

Figure 13 *: Indice de ségrégation D.*

Le modèle de dissimilarité a donc été exploré par les étudiants qui ont travaillé en groupes, sous la direction du formateur. La première limite a été qu'ils ont trouvé différentes expressions du même indice de dissimilarité, dont certaines étaient mal formulées. Les premières étapes ont donc été consacrées à une meilleure formulation du modèle avec une définition plus claire des variables à prendre en compte. La Figure 14 montre le modèle convenu pour *D* par la classe et un exemple illustratif de son calcul. Ensuite, les groupes ont commencé à soulever des questions sur l'interprétation de la formule, le facteur ½, son calcul, les cas correspondant à ses valeurs extrêmes, le type de pourcentages utilisés et l'interprétation de la valeur obtenue. Des questions se posent également sur la définition d'« élève vulnérable » et sur la fiabilité des données fournies par les municipalités. Après une première mise en commun, il a été convenu que chaque groupe travaillerait sur la simulation de certains scénarios inventés à propos d'une municipalité avec trois écoles, avec le total d'élèves vulnérables et non vulnérables qu'ils ont décidé, certaines avec beaucoup de ségrégation, d'autres avec presque aucune. Les étudiants ont rassemblé les cas simulés dans un fichier Excel partagé afin de disposer d'une grande variété de sous-systèmes à examiner.

	Total	V	nV
School 1	250	50	200
School 2	160	40	120
School 3	300	90	210
Municipality	710	180	530

	Total	V	nV	Difference
School 1	250	28%	38%	-10.0%
School 2	160	22%	23%	-0.4%
School 3	300	50%	40%	10.4%
Municipality	710	100%	100%	

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{V_i}{V_m} - \frac{\mathrm{n}V_i}{\mathrm{n}V_m}\right|$$

V_i (resp. nV_i) est le nombre d'élèves vulnérables (non vulnérables) dans l'école i ; V_m (resp. nV_m) est le nombre d'élèves vulnérables (non vulnérables) dans la municipalité.

$$D = \frac{1}{2}(10\% + 0{,}4\% + 10{,}4\%) = 10{,}4\%$$

Figure 14 *: Exemple de calcul de D pour une municipalité à trois écoles et expression adoptée en classe.*

A partir de là, les groupes ont travaillé à modifier les valeurs de départ pour atteindre des indices de dissimilarité plus petits ou plus élevés. Ce travail a été possible par le fait que les étudiants s'étaient entraînés à simuler des sous-systèmes, qui n'étaient pas donnés par le formateur. Ils se sont alors attachés aux variables du modèle et à comprendre comment leur variation influence le calcul de *D*. La variation systématique des paramètres a facilité un travail approfondi sur la simulation de sous-systèmes et sur l'interprétation et l'anticipation des valeurs de *D*. A la fin, les étudiants ont pu raisonner sur la manière de faire varier les variables du modèle afin d'atteindre un certain D. Ils ont pu trouver des cas avec *D* proche de 0, mais il était plus difficile d'obtenir *D* = 1 (ou 100%) qui correspond au cas d'une école avec tous les élèves vulnérables et seulement ceux-là. De plus, les simulations ont permis de découvrir que l'interprétation fournie par le rapport (*D* étant la proportion d'élèves vulnérables à relocaliser) n'est pas correcte. Le cas *D* = 1 le laissait déjà présager. Cette question est restée ouverte à la fin du PER (et nous invitons les lecteurs à l'explorer).

Le travail de modélisation développé dans ce deuxième cas peut être interprété de deux manières. D'une part, il s'agit d'un cas où un modèle déjà construit – la formule D – inverse son rôle : de modèle d'un système (la ségrégation scolaire), il devient pour les étudiants un objet d'étude et, donc, un système à examiner. Grâce à la simulation de modèles numériques partiels, avec des décisions sur les valeurs des variables de la formule, les étudiants ont créé des sous-systèmes pour élaborer de nouvelles connaissances sur le modèle donné. Ces sous-systèmes ont donc joué le rôle de modèle de la formule. Par ailleurs, la simulation a permis aussi de créer des sous-systèmes pour lesquels le modèle est valide et interprétable, contribuant ainsi à la délimitation du système initial considéré (la distribution des élèves vulnérables dans les écoles). Dans ce travail, la création de sous-systèmes simplifiés comme environnement empirique pour le travail de modélisation apparaît comme cruciale. C'est là que les décisions sur les cas à simuler ou sur la manière de modifier la simulation permettent d'étudier progressivement un modèle donné. Nous n'irons pas plus loin ici sur le rôle des simulations et leur statut dans les mathématiques enseignées. Mais il s'agit sans doute d'une dimension du travail d'enquête et de modélisation tout à fait fondamental et qu'il convient de continuer à explorer.

5. Questions ouvertes : Besoins épistémologiques et didactiques

Nous voulons terminer par deux grands groupes de questions que soulèvent les travaux antérieurs et qui devraient suggérer des voies possibles d'avancée. Les premières questions portent sur les praxéologies didactiques des enseignants pour concevoir et gérer des processus de modélisation dans toute leur complexité. Les processus de transposition didactique qui ont jusqu'à présent forgé les mathématiques à enseigner n'ont pas développé un cadre spécifique pour la modélisation. On remarque d'un côté qu'il n'y a pas de consensus à ce propos dans les mathématiques savantes et, d'un autre côté, que le peu de travail transpositif qui existe est encore peu développé, malgré l'explosion de manuels universitaires sur la matière qui sont publiés ces dernières années (Puchaczewski, Bosch et Strømskag, soumis). Sans cet appui mathématique et épistémologique, il devient difficile de construire des praxéologies didactiques appropriées dont le logos devrait inclure ces fondements mathématiques manquants, ce logos mathématique qui permettrait d'éviter que les processus de modélisation restent « muets » (Wozniak, 2012) ou limités à être considérés comme des moyens d'étude d'autres outils ou connaissances mathématiques. Il semble que les programmes scolaires de nombreux pays naturalisent ce logos mathématique et ne prennent en compte, au plus, que quelques éléments généraux du logos didactique.

Le second groupe de questions porte sur le statut de la « compétence modéliser » dans les mathématiques scolaires et le paradigme pédagogique associé. Si nous nous situons dans le paradigme de la visite des œuvres (Chevallard, 2015, 2020), le processus de modélisation peut se concevoir soit comme une œuvre (mathématique) en soi, soit comme un moyen pour visiter d'autres œuvres mathématiques, ce qui l'approcherait d'un outil d'étude, soit une stratégie didactique. Ces deux rôles attribués à la modélisation coexistent aujourd'hui dans les systèmes actuels d'enseignement. Pourtant, lorsque l'on adopte la perspective du paradigme du questionnement du monde, la modélisation s'intègre dans les processus d'enquête comme un instrument pour élaborer des réponses aux questions abordées. La question n'est plus alors « comment enseigner la modélisation ? » mais « comment conduire (ou aider à conduire) des processus d'enquête ? » qui, inévitablement, incluront des processus de modélisation. En réalité, les recherches menées par notre groupe sur les parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire et universitaire, ainsi qu'en formation des enseignants montrent à quel point les développements qu'apporte la TAD pour décrire et gérer les processus de modélisation apparaissent comme des outils praxéologiques indispensables dans la construction et la mise en place des processus d'enquête à l'école. Nous en avons présenté quelques exemples ici, en espérant avoir réussi à montrer à quel point le travail empirique et de collaboration entre enseignants et chercheurs en didactique reste indispensable pour obtenir des avancées robustes et effectives.

Remerciements

Travail réalisé avec le support des projets de recherche PID2021-126717NB-C31, PDC2022-133812-C21 et PDC2022-133812-C22 du gouvernement espagnol : MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ et FEDER (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Références bibliographiques

Barquero, B. (2024a). La modélisation mathématique comme domaine de recherche : avancées dans l'analyse écologique. In (eds) *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. ARDM.

Barquero, B. (2024b). Mathematical modelling as a research field: transposition challenges and future directions. In P. Drijvers & H. Palmér (Eds.), *Proceedings of the 13th CERME conference* (in press). ERME.

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, *21*, 87–106. https://doi.org/10.35763/aiem21.4232seiem.es

Barquero, B., Bosch, M., Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1-2), 31-43.

Barquero, B., Bosch, M., Wozniak, F. (sous presse). Moving beyond mute modelling praxeologies in pre-service elementary teacher education. In H. S. Siller, G. Kaiser, & V. Geiger (Eds.) *Researching mathematical modelling education in disruptive/challenging times*. *ICTMA20 Proceedings*. Springer.

Chappaz, J., & Michon, F. (2003). Il était une fois…La boite du pâtissier. *Grand N, 72*, 19-32.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x,* 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. *Dialogue, 155*, 1-11. https://gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf

Chevallard, Y. (2020). Assumer un changement civilisationnel : pacte scolaire et mathématiques. Printemps de la recherche en éducation 2019. *Éducation et didactique*, 14-1. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.5448

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona : ICE-Horsori.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 203–225. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4

Puchaczewski, E., Bosch, M., Strømskag, H. (soumis). The university perspective on modelling: an exploratory study. *Conference INDRUM2024, June 2024.*

Vásquez, S., Barquero, B., Bosch, M. (2021). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the ATD. Quadrante, 30(2), 200–219. https://doi.org/10.48489/quadrante.23878

Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267–284. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9453-3

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(1), 7-55. https://revue-rdm.com/2012/des-professeurs-des-ecoles-face-a/

Wozniak, F., Barquero, B., Bosch, M., Kaspary, D. (2024). Les praxéologies muettes de la modélisation. *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. ARDM.

Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?[8]

Pierre JOB[9]
ICHEC Brussels Management School

Maggy SCHNEIDER[10]
Université de Liège

Résumé. Nous exposons un modèle didactique de la modélisation mathématique qui prend appui, à la fois sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) avec la notion de praxéologie et la théorie des situations didactiques (TSD) avec la notion de situation fondamentale, pour capturer une caractéristique essentielle des mathématiques, l'économie de pensée, soit l'idée que la modélisation mathématique vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes. Dans le cadre de ce modèle didactique de la modélisation mathématique, nous présentons les grandes lignes d'un parcours centré sur la modélisation fonctionnelle, où les fonctions apparaissent, non pas comme expression d'une théorie déductive déjà constituée, mais comme l'expression de l'économie de pensée au travail, résultant en la constitution de classes de fonctions paramétrées qui constituent autant de modèles efficients pour classer et résoudre des familles de problèmes.

Mots-clés. Modélisation intra/extra-mathématique, pensée fonctionnelle, économie de pensée, praxéologie, niveau de rationalité.

Abstract. We present a didactic model of mathematical modelling that draws on both the anthropological theory of didactics (TAD) with the notion of praxeology and the theory of didactic situations (TSD) with the notion of fundamental situation, to capture an essential characteristic of mathematics, the economy of thought, i.e. the idea that mathematical modelling aims to produce instrumental models in problem solving. Within the framework of this didactic model of mathematical modelling, we present the broad outlines of a path centred on functional modelling, where functions appear, not as the expression of an already constituted deductive theory, but as the expression of the economy of thought at work, resulting in the constitution of classes of parametric functions that constitute so many efficient models for classifying and solving families of problems.

Keywords. Intra/extra-mathematical modelling, functional thinking, economy of thought, praxeology, level of rationality.

Resumen. Presentamos un modelo didáctico de la modelización matemática que se apoya tanto en la teoría antropológica de la didáctica (TAD) con la noción de praxeología, como en la teoría de las situaciones didácticas (TSD) con la noción de situación fundamental, para captar una característica esencial de las matemáticas, la economía del pensamiento, es decir, la idea de que la modelización matemática tiene como objetivo producir modelos instrumentales en la resolución de problemas. En el marco de este modelo didáctico de la modelización matemática, presentamos las grandes líneas de una vía centrada en la modelización funcional, donde las funciones aparecen, no como la expresión de una teoría deductiva ya constituida, sino como la expresión de la economía del pensamiento en acción, dando lugar a la constitución de clases de funciones paramétricas que constituyen otros tantos modelos eficaces para clasificar y resolver familias de problemas.

[8] L'enregistrement de la conférence dont cet article est issu est disponible à l'adresse suivante : https://irem.univ-poitiers.fr/colloque2023/videos.html

[9] pierre.job@ichec.be

[10] mschneider@uliege.be

Palabras clave. Modelización intra/extra-matemática, pensamiento funcional, economía del pensamiento, praxeología, nivel de racionalidad.

Introduction

À l'image de l'expression « résolution de problèmes », le terme « modélisation » fait partie des incontournables dans les discours des décideurs et des chercheurs à travers le monde, lorsque les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques sont abordées. Leur caractère incontournable pourrait laisser entendre que cette expression et ce terme sont porteurs, à quelques variations près, d'une interprétation qui fait consensus ou du moins de suffisamment de convergences pour se dispenser d'en préciser le sens et la portée, au-delà de l'établissement de listes normatives plus ou moins détaillées qui constituent les programmes et autres référentiels, permettant le contrôle bureaucratique des pratiques enseignantes qui leur sont inféodées. Nous souhaitons montrer qu'il n'en est rien et, bien au contraire, que l'expression « résolution de problèmes » et le terme « modélisation » peuvent s'envisager sous des angles suffisamment différents pour en devenir incompatibles. Plus spécifiquement, nous souhaitons montrer à quel point l'abord par le prisme, largement répandu, de la notion de compétence et plus encore par celui des compétences dites « transversales », comme c'est le cas dans les évaluations PISA et en Belgique francophone sous l'impulsion du Service Général du Pilotage du Système Éducatif (SGPSE), de l'expression « résolution de problèmes » et du terme « modélisation », peut s'avérer porteur de contradictions fortes avec ce que nous considérons être, preuves à l'appui, des caractéristiques incontournables de l'épistémologie des mathématiques, dont l'économie de pensée, qui sera développée dans ce qui suit, constitue un des piliers.

Cette étape tout à la fois de contraste et de positionnement concernant la « résolution de problèmes » et la « modélisation » nous semble incontournable pour au moins deux raisons. Elle nous permet d'une part d'expliquer dans quelle mesure le prisme des compétences « transversales » place les enseignants devant une véritable injonction paradoxale qui les somme de choisir entre premièrement l'enseignement de savoirs/modèles émancipateurs résultant d'activités de modélisation en vue de résoudre (en un sens fort qui sera également explicité par la suite) des problèmes et deuxièmement mettre les élèves en situation d'évaluation de la compétence « transversale » « résolution de problèmes » d'une manière où le principal critère de réussite est le talent individuel des apprenants, et non l'acculturation à un enseignement instrumental et où paradoxalement, la compétence « modélisation » se réduit en l'utilisation algorithmique de modèles préétablis dont la construction (et encore moins la validation) n'est pas ou peu prise en charge par les élèves.

D'autre part, cette étape de contraste et de positionnement nous servira également de cadre théorique permettant de présenter et donner du relief à différentes ingénieries expérimentées depuis plusieurs décennies à présent au sein de nos laboratoires de recherche le Ladimath et le Ladichec. Ces ingénieries nous permettront de concrétiser et exemplifier un type d'enseignement qui nous semble propice à l'exercice de la modélisation d'une manière qui soit en phase avec l'épistémologie des mathématiques et donc instrumental dans la résolution de problèmes.

1. La modélisation à l'aune des compétences et des compétences dites « transversales »

Voyons dans cette section le point de vue qui se dégage sur la modélisation mathématique au travers du prisme des compétences et des compétences dites « transversales », en partant de la « résolution de problèmes » qui lui est étroitement associée. Piloté par l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE), le Programme International pour le

Suivi des Acquis des élèves (PISA) propose tous les 3 ans des évaluations à l'échelle internationale dans différents domaines dont les mathématiques. Les évaluations PISA sont présentées comme une invitation à « Préparer les élèves à la résolution de problèmes. » (SGPSE, s.d.), à « […] [les] confronte[r] [...] à des problèmes ancrés dans le monde réel » (SGPSE, s.d.), à « Des problèmes qu'ils seront susceptibles de gérer, collectivement ou individuellement, en tant que citoyens ou professionnels adultes » (Van Dieren, 2005). Il ressort de ces propos que les problèmes sur lesquels il conviendrait de mettre l'emphase devraient jouir d'une certaine « authenticité » et d'un certain caractère « concret ». L'authenticité des problèmes proposés dans PISA est contestée par différents auteurs dont Delord (2013) et Bart & Daunay (2016) et la notion d'authenticité elle-même est questionnée par Tricot (2017). S'agit-il d'un but ou d'un moyen pour enseigner ? Nous reviendrons sur le caractère « concret » des problèmes par la suite pour dénoncer l'entendement trop étriqué qui est assigné à ce qualificatif en lien avec la modélisation (intra et extra-mathématique). Malgré ces écueils, en Belgique francophone, le SGPSE adopte des directives en matière d'éducation qui entrent en résonance avec le point de vue prôné par PISA. En effet, la « Résolution de problèmes » fait partie des compétences « transversales » fondamentales à développer et à évaluer à l'école, pour former des « citoyens responsables ». Le focus sur les compétences induit un rapport particulier au savoir car « PISA porte davantage sur la maîtrise des compétences que sur l'acquisition de savoirs et de contenus scolaires. » (SGPSE, s.d.).

Analysons l'item des pommiers (tiré de PISA 2000[11]) pour mettre en lumière en quoi le point de vue adopté par PISA sur la compétence « transversale » « résolution de problèmes » pose problème et en quoi ce point de vue induit dans la foulée un positionnement tout aussi discutable concernant la modélisation et les savoirs mathématiques. Dans cet item, on demande notamment de déterminer le nombre de conifères entourant un carré formé de pommiers. Une présentation plus détaillée de l'item est donnée dans l'annexe 1. La réponse attendue est $8n$ où n représente le nombre de pommiers dans un côté du carré. Schneider et Job (2016) examinent deux approches distinctes pour résoudre ce problème. La première, que l'on pourrait qualifier d'« astucieuse » est détaillée dans l'annexe 2. La seconde consiste à reconnaître que le nombre de conifères en question suit une progression arithmétique, conduisant ainsi directement au nombre recherché, soit $8n$. Cela suppose un apprentissage préalable sur les modèles fonctionnels dont les progressions arithmétiques constituent un cas particulier. Krysinska, Mercier et Schneider (2009) démontrent la possibilité et la faisabilité d'un tel enseignement dès le début du secondaire, avec des élèves de 12 ans. Suite à un tel enseignement, les élèves disposent de critères de reconnaissance leur permettant de déterminer si une situation relève ou non de l'un des modèles étudiés antérieurement.

Le contraste entre ces deux résolutions montre que, de manière solidaire, les notions de « problème » et de « modélisation » sont relatives aux institutions auxquelles est assujetti un élève. Selon l'enseignement reçu, la résolution d'un item PISA, ou plus généralement d'un « problème », peut être considérée comme une mise à l'épreuve du talent personnel de l'élève à créer un modèle pertinent pour le résoudre, ou comme un élément attestant de sa capacité à identifier, parmi des modèles auxquels il est acculturé, celui lui permettant de répondre de manière efficace à la question posée. On est alors en droit de se demander quel sens donner à la compétence « transversale » « résolution de problèmes », à la notion de « problème », quelle place occupent la modélisation et les modèles pour résoudre ces « problèmes », et comment organiser et évaluer l'ensemble ?

Ces questions, les enseignants du secondaire y sont confrontés dans leur pratique car, en Belgique francophone, ils ont l'obligation de mettre en œuvre l'évaluation de la compétence

[11]Tiré de https://www.pisa-fwb.uliege.be/cms/c_8488467/fr/pisafwb-pommiers.

transversale « résolution de problèmes ». D'autre part, à différents niveaux du système éducatif, la promotion de la réussite est une compétence professionnelle soumise à un décret. Répondre à ces questions ne va pas de soi et peut mettre les enseignants en grande difficulté et à la suite les élèves également. Schneider (2006 a et b) expose comme suit le déroulement d'une formation destinée à des enseignants du début du secondaire. Les enseignants se plaignent des faibles performances de leurs élèves concernant des problèmes portant sur des nombres figurés, tels ceux fréquemment rencontrés dans PISA, dont l'item des pommiers fait partie. Malgré le travail sur des exemples, le transfert attendu de la compétence ne se produit pas. La formatrice les initie à la modélisation fonctionnelle évoquée plus haut. Les enseignants sont heureux de disposer de cet outil qui facilite leur propre compréhension de ce type de problème. Ils souhaitent cependant ne pas enseigner ces modèles à leurs élèves car cela les empêcherait d'évaluer les capacités « véritables » de « résolution de problèmes » de leurs élèves, ces « problèmes » n'en étant alors plus. Ils font dès lors le choix, pour se conformer au prescrit légal, de privilégier l'évaluation de cette compétence, ou du moins la manière dont ils la perçoivent, au détriment de savoirs et modèles instrumentaux, ce qui les plonge dans un cercle vicieux. La compétence envisagée à l'aune d'une transversalité « désincarnée » et a-culturelle conduit à des évaluations peu probantes ce qui les mène à des pratiques professionnelles où la rencontre avec les problèmes est cadrée pour permettre aux élèves de s'y frotter de manière essentiellement contractuelle (Brousseau, 1998), quand tout simplement cette rencontre n'est pas minimisée au point d'une intersection quasi vide.

Les enseignants se trouvent donc dans la position périlleuse de devoir choisir entre l'évaluation de la compétence et l'enseignement de savoirs et modèles efficaces. Ce choix est particulièrement interpellant si l'on se réfère à la genèse de la didactique initiée par Brousseau (1998) et à la notion de situation fondamentale dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD). Cette notion constitue une modélisation didactique des savoirs mathématiques qui met justement en avant leur instrumentalité pour résoudre des problèmes. Mettre les savoirs en arrière-plan en même temps que les modèles dans l'évaluation apparaît dès lors pour le moins incongru. Détaillons, dans la section suivante, en quoi une telle mise au placard apparaît inacceptable au plan épistémologique.

2. Un modèle didactique de l'activité de modélisation et des modèles mathématiques

Pour ce faire, nous allons présenter, expliciter et motiver un modèle didactique de la notion de modélisation et de modèle mathématiques.

2.1. Socio-constructivisme versus positivisme empirique

Avant de poursuivre, commençons par une incise qui nous semble importante afin d'éviter certains malentendus. Nous invitons le lecteur à garder la plus grande attention à la lecture de ce qui suit car, selon les circonstances, les termes « modèle » et « modélisation » feront référence tantôt aux mathématiques, tantôt à la didactique. Nous avons souhaité utiliser et assumer ces termes en lien avec le travail didactique exposé dans ces notes, malgré les risques de confusion, pour plusieurs raisons.

Premièrement, parler de « modèle didactique » nous permet de mettre l'emphase sur le fait que nous présentons une construction didactique consciente, explicite et explicitée et non simplement, comme c'était le cas pour PISA et le SGPSE dans la section précédente, un « point de vue » plus ou moins implicite sur la modélisation mathématique, avec toutes les dérives dont ces implicites sont porteurs. Nous avons effectivement d'emblée insisté dans l'introduction sur la polysémie des termes « modèle » et « modélisation » et la nécessité de préciser la manière dont on les envisage, ce que nous faisons ici en explicitant quel est notre modèle didactique de la modélisation et des modèles mathématiques.

Deuxièmement, utiliser l'expression « modèle didactique » et annoncer qu'il s'agit d'une construction, nous permet également de souligner que la légitimité de ce modèle didactique que nous allons dévoiler ne tient pas dans sa capacité à « décrire » de manière « exacte » la modélisation mathématique, mais dans son instrumentalité à mettre en évidence des phénomènes didactiques. Autrement formulé, nous souhaitons nous distancier par rapport à une forme de positivisme empirique dont nous avons largement dénoncé les écueils s'agissant notamment de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, notamment dans Job et Schneider (2014), en montrant comment ce positivisme empirique constitue un obstacle épistémologique (Brousseau, 1983) majeur aux multiples déclinaisons. En substance, le positivisme empirique est une épistémologie postulant (Fourez, Englebert-Lecomte et Mathy, 1997) que les concepts scientifiques sont des reflets « exacts » du monde qui peuvent être découverts par l'observation de « faits objectifs », indépendants des interprétations et dispositifs d'observation de l'observateur.

Notre modèle didactique n'est donc pas plus ou moins « vrai » ou plus ou moins « faux » parce qu'il « décrit » ou ne « décrit » pas tel ou tel aspect de la modélisation mathématique. La validité de notre modèle didactique est liée à la possibilité de falsifier au sens de Popper (1973), par des expériences, les hypothèses, interprétations et observations qu'il autorise, dans un esprit phénoménotechnique (Schneider & Job, 2016) c'est-à-dire l'idée que ce sont les interactions dialectiques entre le dispositif d'observation et donc le modèle didactique adopté et les observables qui constituent le résultat de recherche et non simplement les observations qui constitueraient les « faits objectifs ».

Cela nous permet également de préciser la posture épistémologique dans laquelle nous nous inscrivons et qui sert de toile de fond à la globalité de notre propos. Il s'agit de l'épistémologie socio-constructiviste (Fourez et al., 1997) aux yeux de laquelle les théories scientifiques (Schneider, 2011, p. 177) :

> *« sont des créations de l'esprit humain, adoptées provisoirement pour leur efficacité à réaliser un projet donné ou à interpréter des phénomènes. Mais les mêmes concepts sont rejetés ou modifiés lorsque cette efficacité est mise à mal. Il ne s'agit donc pas d'y croire mais d'en tester les limites ».*

Le modèle didactique proposé dans ce texte n'est donc pas envisagé comme un absolu mais comme un outil provisoire en perpétuelle restructuration. Il servira de cadre théorique pour faire ressortir la légitimité et les intentions derrière les exemples à venir qui illustreront la manière dont on peut envisager les modèles et la modélisation mathématiques au niveau secondaire, du collège au lycée. Parallèlement, ce modèle didactique nous permettra d'expliciter, au-delà des problèmes professionnels qu'il génère chez les enseignants et dont nous avons déjà parlé précédemment, pourquoi le point de vue sur la modélisation, adopté par PISA et le SGPSE nous semble difficilement tenable. Une telle clarification nous apparaît importante étant constatée la prégnance forte de PISA et de la mouvance des compétences en Belgique francophone et à l'international et ce malgré la multitude de recherches qui en dénoncent les écueils et aspects délétères (Bart & Daunay, 2016 ; Bodin, 2006 ; Crahay, 2006 ; Delord, 2013 ; Matheron, 2012 ; Schneider, 2006a). Présentons à présent notre modèle didactique en deux strates.

2.2. Strate 1 : les mathématiques comme économie de pensée

L'épistémologie socio-constructiviste sur laquelle nous prenons appui n'est pas un isolat applicable à la seule didactique. Elle est tout autant pertinente pour les mathématiques. Partant, il n'est guère surprenant de considérer que les savoirs mathématiques et en particulier les modèles mathématiques sont construits pour réaliser avec efficacité les buts qui leur sont assignés. Cette notion d'efficacité est présente dans d'autres disciplines, comme la physique, ainsi que le défend Mach (1987) en parlant d'« économie de pensée », expression dont nous nous emparons en étendant son usage aux mathématiques.

L'économie de pensée réalisée par les savoirs et modèles mathématiques peut être localisée à différents niveaux dont les suivants. Dans la volonté de développer des modèles unificateurs, applicables à la plus grande variété possible de problèmes, problèmes qui pouvaient initialement être considérés comme disjoints, offrant ainsi l'opportunité de développer des techniques de résolution générales et instrumentales. Dans la volonté de développer des modèles dont l'architecture interne est simplifiée (moins d'axiomes, possibilité de démonstrations plus courtes…). Simplification et unification ne sont évidemment pas des intentions disjointes mais se complètent et se répondent. À un niveau macroscopique, toute l'entreprise du groupe Bourbaki et la création des structures qui ont révolutionné les mathématiques du 20e siècle peuvent s'envisager comme l'expression même de cette volonté d'économie de pensée (Bourbaki, 1948, p. 42) :

> *« Les « structures » sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié. »*

Des disciplines comme l'analyse, l'algèbre et la géométrie sont les témoins perpétuels et vivants de l'application de ce principe. Donnons quelques exemples en commençant par l'analyse.

L'économie de pensée en analyse

La quadrature de la parabole, soit le problème de déterminer la mesure de l'aire d'une surface délimitée par une parabole et une droite, semble avoir été adressée pour la première fois par Archimède dans un traité justement nommé « La quadrature de la parabole ». Dans ce traité Archimède, considère deux techniques de résolution. Une de nature géométrique et une autre de nature mécanique. Toutes les deux prennent appui sur un procédé d'approximation, la méthode d'exhaustion, typique des mathématiques grecques, procédé assez lourd qui utilise une double réduction par l'absurde.

L'exemple d'Archimède nous permet d'illustrer l'économie de pensée à différents niveaux. Premièrement, la lourdeur de la méthode d'exhaustion servira (en conjonction avec d'autres éléments) d'impulsion au développement de techniques plus instrumentales pour déterminer des mesures. Il s'agit notamment des différentes conceptions infinitésimales et de la notion de limite. On peut voir la notion moderne de limite comme culmination de cette volonté d'améliorer l'instrumentalité de la méthode d'exhaustion en lui substituant un outil qui permet de se dispenser de la double réduction par l'absurde, ce qu'autorisent notamment les propriétés des limites (voir Job (2011) pour plus de détails sur cette connexion). Les mathématiciens grecs ne disposaient pas de cette possibilité d'appliquer des propriétés de la méthode d'exhaustion pour en simplifier l'usage, notamment parce que cette méthode s'appliquait à des objets géométriques fortement ancrés dans l'empirisme et non à des objets algébriques susceptibles de calculs comme cela est le cas avec la notion de limite qui peut notamment s'appliquer à des fonctions et par la suite à une multitude d'autres objets (filtre, topologie, système dirigé, foncteur…).

Deuxièmement, la quadrature de la parabole, le volume du cylindre, celui de la pyramide et celui de la sphère (abordés dans d'autres traités) sont des problèmes considérés par Archimède comme distincts. Au-delà de la méthode d'exhaustion commune, les découpages employés sont suffisamment différents pour laisser penser que les résolutions sont étrangères les unes aux autres et que tout est à refaire pour chaque nouvel objet géométrique à étudier : il utilise par exemple des triangles dans le cas de la parabole et des prismes dans le cas de la pyramide. Il a fallu des siècles pour réaliser que tous ces problèmes peuvent être fédérés par un même modèle, l'intégrale définie dont l'intégrande est une fonction du second degré, qui réalise ainsi une économie de pensée significative. Cette économie significative est bien mise en évidence par Bourbaki qui, s'exprimant à propos de l'œuvre d'Archimède, marque de manière forte l'écart séparant le travail du mathématicien grec et l'instrumentalité du calcul intégral moderne (Bourbaki, 2007, p. 210) :

> *« […] pour qu'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de "l'intégrale" sous-jacente. Au XVIIe siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres ; si l'on n'en trouve pas trace chez Archimède, n'est-ce pas un signe que de telles spéculations lui seraient apparues comme exagérément "abstraites", et qu'il s'est volontairement, au contraire, en chaque occasion, tenu le plus près possible des propriétés spécifiques de la figure dont il poursuivait l'étude ? Et ne devons-nous pas conclure que <u>cette œuvre admirable, d'où le calcul intégral, de l'aveu de ses créateurs, est tout entier sorti, est en quelque façon à l'opposé du calcul intégral</u> ? »*[12]

L'économie de pensée en algèbre et en géométrie

Un autre exemple phare mettant en évidence l'économie de pensée à l'œuvre en mathématiques est donné par les interactions entre algèbre et géométrie. Avant Descartes, en écho aux propos de Bourbaki sur l'intégration, chaque problème de géométrie synthétique euclidienne constituait une mise à l'épreuve du talent de la personne qui s'y frottait. L'algébrisation de la géométrie offerte par Descartes au XVIIe siècle a permis de mettre à la portée du plus grand nombre la résolution de tels problèmes géométriques grâce à la géométrie analytique classique. Mais l'histoire ne s'arrête pas là.

L'algébrisation de la géométrie va de pair avec la géométrisation des mathématiques pour constituer une dialectique fondamentale de modélisation réciproque entre algèbre et géométrie (Dunia, 2014). Les propos de Dieudonné (cité dans Lehmann et Bkouche, 1988, p. 489) vont dans ce sens :

> *« […] la linéarisation de la géométrie permet en retour une géométrisation du linéaire et par cela même une géométrisation des divers domaines de la*

[12] C'est nous qui soulignons.

> *connaissance où intervient le linéaire. [...] C'est la prise de conscience par les mathématiciens d'un caractère commun à ces divers domaines qui a conduit à l'algèbre linéaire telle que nous la connaissons aujourd'hui, construction unificatrice qui continue l'idéal d'une méthode universelle que l'on retrouve tout au long de l'histoire des mathématiques ; la représentation géométrique de l'algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie [...] a conduit alors à cette géométrisation universelle, nouveau principe unificateur induisant les transferts d'intuition [...] qui sont autant que la puissance du raisonnement formel, l'un des aspects du développement des mathématiques contemporaines [...] »*

Cette dialectique entre algèbre et géométrie a permis le développement de modèles toujours plus performants : de la géométrie analytique classique au formalisme bipoint en passant par la géométrie vectorielle (Nguyen & Schneider, 2016).

Retour sur PISA et la posture du SGPSE

L'économie de pensée au cœur des mathématiques nous permet de revenir sur la manière dont la modélisation et la résolution de problèmes sont envisagés dans PISA et par le SGPSE. La démarche du mathématicien ne consiste pas à « simplement » résoudre des problèmes « épars », sans liens de parenté, mais à littéralement tuer des classes entières de problèmes, à l'aide de modèles unificateurs, basés sur des savoirs conçus à cet effet, modèles qui sont de nature à faire ressortir les traits communs de ces problèmes permettant ainsi de les *déproblématiser*. Résoudre un problème consiste en bien autre chose que d'en trouver la solution en un sens strict.

Alors, devrait-on renoncer à l'instrumentalité des modèles et savoirs mathématiques dont l'algébrisation de la géométrie, la géométrisation des mathématiques, les modèles fonctionnels et relationnels au motif de permettre l'évaluation « pure » de la compétence « résolution de problèmes » dans sa dimension « transversale », comme prôné par le SGPSE qui s'inscrit dans le sillon de PISA ? Cela nous apparaît absurde et constituer une régression par rapport aux millénaires qui ont été nécessaires pour que les esprits les plus brillants de leur temps développent des modèles et savoirs instrumentaux à vaste portée. La mise en arrière-plan des savoirs, prônée dans PISA, au profit des compétences dites « transversales » et avalisée par le SGPSE en Belgique francophone, ne peut manquer d'interpeller, tant pareil choix semble porteur de contradictions de fond avec l'histoire et l'épistémologie des mathématiques.

Ce contraste fort entre la modélisation abordée à l'aune de l'épistémologie et le point de vue du SGPSE et de PISA nous permet en retour de nous exprimer sur une certaine perception du pouvoir politique concernant les mathématiques et plus généralement de la noosphère qui envisage les mathématiques comme un élément important dans le développement de la citoyenneté, au point d'une certaine forme de réductionnisme qui voudrait les enferrer toutes entières dans le seul moule des mathématiques dites « citoyennes ». La citoyenneté des mathématiques est notamment localisée dans leur capacité supposée à adresser des problèmes « concrets », les défis de demain et à outiller le raisonnement de tout un chacun d'une manière propice au débat démocratique. Si nous pouvons souscrire à l'intention générale de développement de l'esprit humain qui sous-tend l'idée de mathématiques « citoyennes », nous ne pouvons cependant manquer d'être dubitatifs sur la manière dont cette intention est déclinée par le monde politique et la noosphère. D'une part, les défis de demain sont par essence inconnus, au moins dans la forme précise qu'ils revêtiront. Il apparaît dès lors pour le moins hautement spéculatif de prétendre préparer les citoyens et donc les élèves à ces défis futurs. D'autre part, l'authenticité des problèmes considérés est critiquée par plus d'un auteur dont notamment Delord

(2013) et Bart et Daunay (2016). Mais plus fondamentalement encore le « concret » évoqué par le SGPSE semble bien être réduit à des problèmes ancrés dans « la vie de tous les jours » ce qui nous pose une question de fond. Bien entendu nous ne sommes pas opposés à ce que les mathématiques puissent avoir une utilité « concrète » en ce sens. Par contre, la réduction à cette dimension nous semble très problématique car précisément une partie importante des modèles mathématiques est à visée interne aux mathématiques. Les mathématiques se modélisent elles-mêmes ! C'est bien ce dont témoigne la citation de Bourbaki sur les structures mathématiques et la dialectique entre algèbre et géométrie évoquées plus hauts. C'est donc un pan entier des mathématiques qui est ainsi mis au rebus : comme le note Matheron (2012) la dimension intra-mathématique est absente des évaluations PISA. On pourrait se dire qu'il s'agit simplement d'un choix de société qui s'impose face à l'ampleur de l'édifice mathématique : on ne peut pas tout aborder, il faut choisir. Un tel point de vue et surtout ce choix particulier apparaissent cependant insoutenables en référence au positivisme empirique évoqué ci-dessus. Réduire les mathématiques à une forme d'utilitarisme primaire ne peut manquer de favoriser la cristallisation d'obstacles épistémologiques chez les apprenants comme le montrent Job et Schneider (2014). La volonté à tout prix de « concrétiser » en un sens restreint au motif de mise à disposition du plus grand nombre ne s'avère-t-elle pas en définitive l'instrument même de la privation de cette mise à disposition ?

En contrepoint, il nous paraît crucial d'outiller les citoyens intellectuellement notamment au travers d'une formation mathématique, mais d'une manière qui soit cohérente avec l'épistémologie de la discipline et qui ne force pas les mathématiques dans un moule trop étriqué dans lequel elles ne peuvent se glisser sous peine d'en donner une vision tronquée. La dimension intra-mathématique de la modélisation ne peut donc pas être évacuée et les exemples qui suivront montreront comment une telle rencontre peut être envisagée au niveau secondaire. Les « mathématiques citoyennes » peuvent donc s'envisager à différents niveaux qui ne sont pas réductibles les uns aux autres et surtout peuvent être incompatibles entre eux et avec l'épistémologie des mathématiques. Mais encore faut-il avoir interrogé suffisamment en quoi consiste la modélisation mathématique pour en prendre conscience.

Au-delà de la mise à l'écart de la dimension intra-mathématique de la modélisation dans PISA, le manque de questionnement dont nous faisons état transparaît d'emblée dans l'utilisation du terme « compétence ». Envisager la modélisation comme une compétence et donc comme quelque chose dont la finalité serait en définitive d'être évaluée est porteur d'un implicite fort. En réduisant la modélisation à une compétence, on fait l'hypothèse que tout un chacun sait plus ou moins de quoi on parle lorsqu'on prononce le mot « modélisation », la notion étant suffisamment transparente pour se contenter de la décrire de manière plus ou moins sommaire, presque comme une manière de « rafraîchir » la mémoire des enseignants, au-delà de l'aspect normatif dont une telle description peut être porteuse. C'est que la finalité de la mouvance des compétences tient moins, malgré les effets d'annonce, à l'émancipation des êtres humains qu'au formatage de leurs esprits pour leur permettre de se conformer aux « lois » du marché et à l'idéologie capitaliste (Job, Le Hebel et Schneider, sous presse).

2.3. Strate 2 : les types de praxéologies I et II

Les modèles mathématiques sont la résultante d'une certaine activité, l'activité de modélisation mathématique. En tant qu'activité humaine, cette activité de modélisation mathématique peut elle-même être modélisée à l'aide de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique (TAD) initiée par Yves Chevallard (Bosch & Chevallard, 1999). En effet, la TAD postule que toute activité humaine (dont l'activité mathématique et spécifiquement l'activité de modélisation mathématique) peut être modélisée par une praxéologie. Une praxéologie est un quadruplet composé d'une tâche, d'une technique, d'une technologie et d'une théorie. Pour parler simplement, la tâche indique « quoi faire », la technique « comment le faire » et la technologie et la théorie s'attachent à légitimer l'adéquation de la technique à réaliser la tâche, la théorie étant un niveau supérieur de justification par rapport à la technologie. Nous renvoyons le lecteur à Bosch et Chevallard (1999) et Schneider (2011) pour plus de détails sur la notion de praxéologie, dont la distinction entre technologie et théorie, en nous tenant, dans ce texte, aux éléments indispensables de cette notion pour développer notre propos. En nous inspirant de Schneider (2008, 2011), distinguons à présent deux types de praxéologies, le type I et le type II. Chacun de ces types de praxéologies capture une certaine facette de l'activité de modélisation mathématique.

Les praxéologies de type I

Une praxéologie de type I est un type de praxéologie dans laquelle la tâche consiste à déterminer des objets préconstruits au sens de Chevallard (1991, p. 91), c'est-à-dire un objet qui

> *« n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. »*

Au sein du *calculus*, par exemple, il s'agira de déterminer des objets préconstruits tels que des aires, des volumes, des vitesses variables, des tangentes en un point d'une courbe. Par *calculus*, nous désignons la période du calcul différentiel et intégral qui précède la genèse de l'analyse moderne initiée par Cauchy et fondée sur la notion de limite *algébrisée*, c'est-à-dire exprimée en ε-δ. Nous renvoyons à Job (2011) pour plus de détails sur la légitimité de cette distinction. Dans cette période *calculus*, les techniques employées sont notamment le calcul des limites *sous forme embryonnaire* (qui n'a donc pas encore été exprimé en ε-δ), ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives. Dans cette période *calculus*, les objets cités plus hauts sont bien préconstruits au sens où leur existence n'est pas questionnée, parce que cette existence est considérée comme évidente. Les préconstruits peuvent faire l'objet de définitions mais leur existence n'est pas subordonnée à ces définitions, comme c'est souvent le cas dans les mathématiques contemporaines.

Le calcul des limites sous forme embryonnaire consiste à supprimer des termes, sans jeu de compensation dans une expression, pour déterminer l'objet considéré. Par exemple, si on s'intéresse à ce que pourrait être la tangente de la fonction $f(x)=x^2$ en $x=0$, le calcul des limites embryonnaire consiste à supprimer h dans l'expression initiale ci-dessous et à évaluer l'expression résultante en $x=0$, sans se soucier de la légitimité *déductive* d'une telle technique et des égalités qui y interviennent :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=2x+h$$

Entre la dernière expression et les autres, on a donc procédé à la suppression du terme h au dénominateur, sans jeu de compensation. Nous renvoyons le lecteur à Schneider (1992) pour un exposé détaillé de cette technique et une analyse de la manière dont elle est mise en jeu dans la détermination d'un taux de variation instantanée.

Les techniques employées pour déterminer ces objets (aires, volumes…) sont cependant justifiées, mais par des arguments qu'on peut qualifier de pragmatiques au sens suivant. Une technique est justifiée lorsqu'elle donne des résultats en accord avec les résultats obtenus à l'aide d'autres techniques, que ces autres techniques soient de nature ou non mathématique, appartiennent ou non au même domaine mathématique. Les calculs de limite donnent par exemple des résultats en accord avec ceux obtenus par la méthode d'exhaustion ou des arguments cinématiques. Dans ce type de praxéologie la validation d'une technique peut donc se faire autrement que de manière déductive. Ce type de validation a été omniprésent à travers l'histoire des mathématiques, notamment pendant toute la période de constitution du *calculus*, avant l'avènement de l'analyse et semble incontournable à ce niveau praxéologique, car il engage des objets préconstruits qui justement n'ont pas encore fait l'objet de définitions qui permettent de les manipuler de manière strictement déductive. Au niveau du secondaire, les travaux du Ladimath (Job & Schneider, 2014) montrent que ce type de praxéologies constitue une alternative à la dichotomie devenue classique en didactique qui consiste pour un enseignant à se replier derrière des pratiques ostensives conscientes ou non (Salin, 1999) face à la difficulté de faire vivre une activité mathématique strictement déductive. Lorsque de telles praxéologies ont suffisamment maturé, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive. Les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées… ce qui nous conduit aux praxéologies de type II.

Les praxéologies de type II

Dans une praxéologie de type II, le type de tâches consiste à concevoir une architecture déductive (Patras, 2001) qui constitue un modèle d'une portion plus ou moins grande des mathématiques ou d'un domaine extra-mathématique, qu'il appartienne au monde sensible ou à d'autres disciplines (physique, biologie, économie, linguistique...). Cette activité de modélisation peut donc être à visée intra-mathématique ou extra-mathématique. La constitution de telles architectures déductives constitue un aspect central de l'activité de modélisation mathématique contemporaine. Chaque architecture résultant d'une telle activité et ses différents composants sont autant de modèles mathématiques : les définitions des notions impliquées sont des modèles, les théorèmes de l'architecture sont également des modèles, l'ordonnancement particulier des théorèmes constitue également un choix particulier d'agencement et donc un modèle.

La conception d'une architecture peut prendre des formes diverses, selon son caractère plus ou moins local/global et selon que cette architecture doive être créée de toutes pièces ou constitue une refonte plus ou moins importante d'une architecture préalable. Il peut notamment s'agir de définir des objets qui étaient jusqu'alors préconstruits, au sens évoqué ci-dessus dans les praxéologies de type I, afin d'en contrôler les propriétés et l'utilisation par le seul raisonnement déductif. Les concepts de l'analyse, en tant qu'entreprise de refonte déductive du *calculus*, si l'on considère, à l'instar de nombre d'historiens (Dugac, 2003), Cauchy comme un des pères fondateurs de l'analyse, constituent des exemples caractéristiques : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées.

Mais il peut également s'agir de démontrer un théorème ou d'en simplifier la démonstration. Ces différentes formes ne sont évidemment pas mutuellement exclusives et interagissent le plus souvent les unes avec les autres. La simplification ou la démonstration d'un théorème peut par exemple demander de définir « déductivement » (par opposition à « descriptivement » comme c'est souvent le cas avec les objets « préconstruits ») de nouvelles notions, en même temps que la reformulation de l'énoncé du théorème. Une technique possible pour accomplir une telle tâche est la dialectique des (tentatives de) preuves et réfutation mise en évidence par Lakatos (1984). Toujours en analyse, un exemple typique de ce type de dialectique est donné par les différentes définitions de la notion de limite qui constituent autant de modèles différents. Ainsi par exemple, si l'on s'en tient au seul contexte de l'analyse réelle à une variable, deux définitions/modèles de la notion de limite existent : la définition dite pointée et la définition dite épointée (Douady, 1996). À un niveau d'abstraction plus élevé, on trouve également dans ce type de tâches des praxéologies de type II, la constitution d'une axiomatique aussi simple et instrumentale que possible (non redondante), quitte à creuser l'écart avec une possible mise en correspondance avec le monde sensible.

Nous avons évoqué la dialectique des preuves et réfutations comme technique possible pour accomplir le type de tâches caractéristique des praxéologies de type II. Cette technique n'est évidemment pas algorithmique en un sens strict et de manière générale il n'y a pas de technique « canonique » pour accomplir ce type de tâches, la raison étant que le type de praxéologies considéré ici constitue un modèle (avec les praxéologies de type I) de l'activité de modélisation mathématique et non simplement une « description » d'une théorie mathématique déjà constituée/ canonisée. Cela est également valable pour les praxéologies de type I.

Dans tout ce qui précède la dimension d'économie de pensée est omniprésente à tous les niveaux. Définir la notion de limite peut s'envisager comme volonté d'exercer une certaine économie de pensée. Au lieu de prouver séparément les propriétés des fonctions dérivables et continues, on peut mettre en évidence, grâce à la notion de limite, des traits communs à ces deux notions, ce qui autorise l'étude des propriétés « abstraites » des limites pour ensuite les transférer automatiquement aux concepts qui leur sont subordonnés, évitant ainsi de devoir recommencer à chaque fois des travaux similaires.

3. L'exemple de la modélisation fonctionnelle source de nombreux apprentissages

Nous avons souligné plus haut les limites de la notion de compétence « transversale » lorsque la transversalité est envisagée de manière trop « désincarnée ». Il nous apparaît cependant que la notion de transversalité et la question du transfert sous-jacente gagnerait à être considérée dans le cadre d'un entraînement à brasser des classes de problèmes toujours plus vastes et à développer les moyens pour les élèves d'identifier à quelle classe appartient une instance donnée et la ou les techniques associées permettant de la résoudre de manière efficace (Schneider, 2006a). La modélisation fonctionnelle est susceptible de fournir un cadre, couvrant l'enseignement secondaire et au-delà (Job Krysinska & Schneider, 2023), pour la constitution de ces classes de problèmes. Les classes de problèmes sont constituées à partir de classes de fonctions paramétrées qui en constituent autant de modèles. Cette modélisation fonctionnelle est également susceptible de servir de véhicule à l'enseignement de l'algèbre qui apparaît alors comme émergeant de pratiques de modélisation. Cette idée est proche du point de vue adopté par Bolea, Bosch et Gascon (2001) pour qui l'algèbre est une organisation mathématique au service des autres.

Plus généralement la modélisation (fonctionnelle ou non) offre une série d'opportunités dans les directions suivantes qui seront développées plus bas. Une première opportunité est de travailler et faire prendre conscience de la dimension intra-mathématique des savoirs/modèles mathématiques et de la modélisation. Comme souligné précédemment, la modélisation intra-mathématique constitue le parent pauvre de la modélisation dans l'enseignement secondaire en Belgique francophone. En effet, le focus est souvent réduit à la dimension extra-mathématique en partie sous l'impulsion d'une vision étriquée de ce que peuvent être des mathématiques « citoyennes ». Mais il y a aussi le manque de formation des enseignants qui envisagent difficilement la dimension intra-mathématique autrement que par l'entremise d'une théorie déductive déjà constituée, ce qui nous renvoie à la justification de la découpe effectuée entre praxéologie de type I et de type II. Une seconde opportunité est de travailler la dimension intra-mathématique par l'exercice de la dialectique de modélisation réciproque entre algèbre et géométrie (Lebeau & Schneider, 2009 ; Dunia, 2014). Une troisième opportunité est de confronter le rapport positiviste empirique dont nous avons souligné qu'il constitue un obstacle épistémologique majeur amenant les élèves à articuler les dimensions intra et extra-mathématiques (voir les exemples ci-dessous).

Proposons une vue panoramique (et donc nécessairement allusive) d'un parcours, découpé pour les besoins de l'exposé en épisodes, qui couvre les 6 années du secondaire en Belgique Francophone, de 12 à 18 ans et prend appui sur la modélisation fonctionnelle.

3.1. Épisode 1 : les suites arithmétiques et géométriques

Dès la 1re année du secondaire, entre 12 et 13 ans, l'étude de suites figurées permet de faire émerger les premiers modèles fonctionnels au travers d'une série de questions (Krysinska & Schneider, 2010). Il s'agit de demander le nombre d'objets à une étape éloignée, le nombre d'objets à n'importe quelle étape, le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets.

Interroger les élèves sur le nombre d'objets à une étape éloignée et non à une étape proche les pousse à réfléchir au mécanisme d'engendrement des figures. Ils ne peuvent se contenter de compter le nombre d'objets à l'étape donnée en considérant le schéma qui leur est initialement fourni ou en continuant simplement à dessiner de nouvelles figures. Par exemple, si on demande à un élève le nombre d'allumettes à la troisième étape de la figure 1, il est simple de compter les allumettes en les pointant du doigt et en récitant la comptine des naturels apprise par cœur. Il y a 1, 2, 3 … 13 allumettes. Cette technique « du doigt » (qui peut être mentale par ailleurs) peut encore s'envisager à l'étape 6, par exemple, même si elle devient vite assez fastidieuse et peut conduire à des erreurs : l'élève peut oublier de compter une allumette ou la compter plusieurs fois. Par contre, elle n'est plus envisageable si on demande le nombre d'allumettes à l'étape 42 : simplement dessiner les maisons jusqu'à l'étape 42 prend un temps considérable.

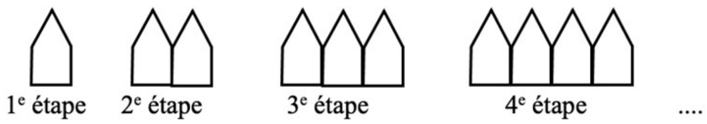


Figure 1 *: Exemple de suite figurée.*

Une autre technique plus performante demande à être développée. Le développement de cette nouvelle technique passe par l'identification d'un invariant, valable d'une étape à la suivante. Il ne s'agit évidemment pas d'exposer aux élèves une théorie formelle des invariants mais de sortir de l'impasse d'un comptage qui devrait pour chaque étape être intégralement renouvelé. Au lieu de cela, l'idée est de se demander à chaque nouvelle étape combien d'allumettes ont été ajoutées. La régularité est facilement observable à l'aide d'un tableau numérique.

Numéro d'étape	1	2	3	4	5	...
Nombre d'allumettes	5	9	13	17	21	...

Figure 2 *: Représentation du nombre d'allumettes en fonction du nombre d'étapes.*

En cela, une telle manière de penser préfigure l'idée générale de variation qui est à la base de la notion de dérivée et de différence finie. À nouveau, l'objectif n'est pas de développer avec des élèves de cet âge la théorie des dérivées et des différences finies mais de les faire travailler une certaine idée commune à ces théories et surtout pour l'enseignant d'en prendre conscience et de pouvoir ainsi, lors des moments d'institutionnalisation, mettre une certaine emphase sur le chemin de pensée qui a permis l'émergence de la nouvelle technique.

Cette nouvelle technique constitue bien évidemment, en lien avec notre cadre théorique, une économie de pensée par rapport à la précédente. Les deux techniques ne sont cependant pas disjointes et la seconde peut notamment s'envisager comme tentative de rationaliser la première et d'éviter les erreurs de comptage en développant une manière plus systématique et conscientisée de compter. Les élèves sont donc invités à travailler dans un esprit dialectique et la technique initiale constitue ainsi un objet du milieu au sens de la TSD (Brousseau, 1998).

À ce niveau éducatif, les élèves n'ont pas encore été mis au contact de l'algèbre et ne sont guère familiers avec l'usage des lettres. Cependant, la question de déterminer le nombre d'objets à n'importe quelle étape constitue une invitation à prendre un pas de côté sur la nouvelle technique et l'exprimer, non pas seulement en acte, mais sous forme discursive. Il ne s'agit plus d'appliquer la technique mais d'expliquer, pour une étape donnée, le calcul qu'il faudrait effectuer pour obtenir la réponse attendue. En ce sens, l'ingénierie relatée ici est proche de la perspective des programmes de calcul initiée par Chevallard (1989a, 1989b, 1990). Nous renvoyons donc le lecteur au texte de Auroy et al. « La modélisation algébrique. Rendre les élèves producteurs de modélisations algébriques au sein du programme du cycle 4 », dans ces mêmes actes, qui travaille dans une perspective qui nous semble complémentaire et proche de la nôtre.

Dans ce contexte, les élèves proposent donc un modèle de leur technique sous une forme qu'on pourrait qualifier de pré-algébrique. Si la variation constante est facile à identifier à l'aide d'un tableau numérique, les suites sont cependant choisies pour permettre différentes modélisations, selon que le focus de l'élève soit polarisé sur les allumettes ou les maisons. Les trois modèles suivants peuvent ainsi émerger.

Un premier modèle peut être qualifié d'itératif et se polarise directement sur les allumettes. C'est le modèle directement inspiré du tableau numérique. On identifie que d'une étape à l'autre on ajoute toujours quatre allumettes. Ainsi, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de quatre. À la première étape, il y a cinq allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter quatre allumettes, autant de fois qu'il y a d'étapes, moins une. Le programme de calcul associé est donc « 5+4·(numéro d'étape-1) ».

Un second modèle résulte d'une approche fonctionnelle centrée sur les maisons. C'est le comptage du nombre de maisons qui permet de déduire le nombre d'allumettes. À ceci près que toutes les maisons sont construites avec quatre allumettes, sauf la première qui en comporte cinq. Le programme de calcul associé est donc « 1+4·numéro d'étape ».

Un troisième modèle résulte également d'une approche fonctionnelle centrée sur les maisons. On observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise cinq allumettes : on multiplie donc le nombre d'étapes par cinq. Mais comme deux maisons contiguës possèdent une allumette commune qui est donc comptée deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passages d'une maison à l'autre c'est-à-dire le nombre d'étape moins une. Le programme de calcul associé est donc « 5·numéro d'étape - (numéro d'étape-1) ».

On rencontre parfois dans les classes des enseignants mis à mal par les réponses proposées par les élèves aux questions posées et les raisonnements qui y ont conduit, lorsque ces raisonnements divergent trop par rapport à la réponse préétablie attendue. Ici c'est « tout le contraire » dans la mesure où la multiplicité des modèles possibles constitue également un objet du milieu qui permet de questionner les modèles dans différentes directions.

Une première direction est celle de l'équivalence et par suite de la correction des modèles. En effet, à une étape donnée il ne peut y avoir qu'un nombre donné d'allumettes. La question est donc posée de déterminer si les différents modèles conduisent bien à un même nombre. Cette multiplicité constitue donc également une stratégie (par la bande) qui pousse les élèves à s'emparer de la question de la correction des modèles établis. Si un seul modèle avait été établi, l'incitation est nettement moindre pour les élèves de s'intéresser à cette question de la correction, au-delà de l'effet de contrat, car l'unicité en acte dans les productions des élèves agit comme une sorte de blanc-seing et d'auto-validation du modèle : c'est le seul qui émerge chez tout le monde, ce doit donc être le bon, il n'est pas nécessaire de le questionner plus avant. Ici, bien au contraire, la multiplicité ne permet pas d'éluder la question de la validation. A minima, la question est posée de l'équivalence des modèles. Fournissent-ils le même nombre d'allumettes à toutes les étapes ? Dans la négative, quels sont les modèles à écarter, et sur quelle base ? Dans l'affirmative, la concordance des modèles au travers de leur multiplicité constitue un élément de validation de leur correction qui s'inscrit dans les praxéologies de type I introduites plus haut, soit des praxéologies dont les justifications sont de nature pragmatique et pas strictement déductives.

Cette dimension pragmatique s'exprime également dans la possibilité de questionner l'équivalence des modèles de différentes manières. La variété des arguments employés pour justifier un modèle est également typique de l'aspect pragmatique où une forme de raisonnement n'est pas prédominante par rapport aux autres au point de les écraser, voire de les exclure. Comme exprimé précédemment, ce foisonnement justificatif est lié à la nature des objets traités qui sont, pour une partie, préconstruits, comme c'est le cas ici des maisons et des allumettes. Ces maisons et ces allumettes existent pour les élèves, non pas en tant qu'entités abstraites, comme cela pourrait être le cas en topologie algébrique, avec la notion de simplexe, mais par le simple fait de leur matérialité scripturale : le non-ostensif est pour ainsi dire identifié à l'ostensif (Bosch & Chevallard, 1999).

C'est donc l'observation, par les sens, qui permet en premier lieu la validation. Les modèles dénotent des objets géométriques (allumettes et maisons) et les élèves constatent que les modèles sont équivalents, car ils correspondent « simplement » à des découpages différents de ces objets. On pourrait dire que ces modèles sont équivalents du point de vue de la dénotation « géométrique ».

La question de l'équivalence peut aussi être traitée dans le registre numérique en considérant les modèles comme autant de « programmes de calcul ». Les élèves peuvent dresser un tableau, comme sur la figure 3, et vérifier pour suffisamment de numéros d'étapes que les différents programmes de calcul donnent bien les mêmes résultats.

Numéro d'étape	5+4·(numéro d'étape-1)	1+4·numéro d'étape	5·numéro d'étape - (numéro d'étape-1)
1	$5+4.0=5$	$1+4.1=5$	$5.1-(1-1)=5$
2	$5+4.1=9$	$1+4.2=9$	$5.2-(2-1)=9$
3	$5+4.2=13$	$1+4.3=13$	$5.3-(3-1)=13$
4	$5+4.3=17$	$1+4.4=17$	$5.4-(4-1)=17$

***Figure 3** : Équivalence numérique des programmes de calcul.*

Dans cette manière de procéder, les élèves sont, à l'image de la validation précédente, encore dans une forme d'« empirisme numérique ». Cette manière de procéder serait mise en question, dans le cadre d'une théorie mathématique déjà constituée de manière strictement déductive, mais nous ne sommes pas encore à ce stade de développement et c'est donc le croisement et la concordance de ces différents niveaux de rationalité (Rouy, 2007), ici géométrique et numérique, qui emportent l'adhésion et valident les modèles établis par les élèves.

La question de déterminer le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets ouvre de nouvelles perspectives et permet d'approfondir l'étude des modèles en continuant à faire évoluer la nature du travail des élèves vers des aspects plus déductifs et algébriques. Les trois modèles n'ont pas la même instrumentalité pour déterminer par exemple à quelle étape on obtient 165 allumettes. De fait le second modèle « 1+4·numéro d'étape » se prête plus facilement à un « calcul à l'envers » que les deux autres. Dans la foulée, il devient légitime d'introduire une lettre pour simplifier les écritures et encore augmenter l'instrumentalité des modèles. Au lieu de noter à chaque fois « numéro d'étape », on peut se contenter d'utiliser une seule lettre, par exemple « n ». Les élèves ne proposent pas tous les mêmes lettres et c'est l'occasion de s'interroger sur l'équivalence de modèles qui différeraient par la lettre employée, comme par exemple $1+4.n$, $1+4.a$, $1+4.x$. Parallèlement, l'équivalence entre les trois modèles conduit à adopter les premières règles de calcul sur les modèles. En croisant les différents niveaux de rationalité à disposition (géométrique et numérique), les règles algébriques non « conformes » peuvent être falsifiées et le contexte du problème rend plausibles et/ou intelligibles les autres. Par exemple, une règle de distributivité comme $4(n-1)=4n-4$ doit être acceptée si on veut conserver l'équivalence des modèles $5+4(n-1)$ et $1+4n$. Par ailleurs cette règle de distributivité rend compte de propriétés du calcul des grandeurs ce qui renforce sa crédibilité. De manière similaire, on peut ainsi introduire la règle du changement de signe à l'ouverture de la parenthèse précédée du signe moins et la règle du regroupement des termes semblables.

Par rapport à notre cadre théorique, ce travail sur l'établissement et la validation de règles algébriques peut à nouveau se situer dans le contexte d'une praxéologie de type I et du niveau de validation pragmatique. C'est la concordance entre différents niveaux de rationalité qui emporte l'adhésion et guide la constitution initiale d'un nouveau niveau de modélisation, soit la constitution d'un modèle explicitant les manipulations licites et illicites sur les trois modèles initiaux et plus largement sur les programmes de calcul. C'est à l'occasion de cette étude que les élèves effectuent une première incursion dans l'algèbre et plus seulement dans le pré-algébrique.

Soulignons à nouveau que le niveau de rationalité pragmatique, même s'il ne correspond pas au niveau de rationalité déductif des mathématiques déjà canonisées n'en est pas moins légitime comme relevé au moment d'introduire les praxéologies de type I. Cette légitimité est d'ordre institutionnel et offre une opportunité de sortir de la dualité/complémentarité entre enseignement « formel » et pratiques ostensives. Mais elle est également historique et épistémologique. Pour paraphraser l'épistémologue Lakatos, les mathématiques ne sont pas tombées du ciel, déjà axiomatisées. Il a fallu construire ces axiomes et cette entreprise initiale de constitution ne s'est pas jouée dans le seul registre déductif. Différents niveaux de rationalité ont été engagés pour en venir à extraire la substance déductive. N'est-ce pas cette idée qui est mise en avant par Lakatos (1984) et la notion de discours heuristique ?

Revenons à notre ingénierie. Le déroulement ne reste pas « figé » au niveau des praxéologies de type I. Bien au contraire, les praxéologies de type II font leur apparition car les règles initialement adoptées pour des raisons pragmatiques deviennent peu à peu le niveau de rationalité privilégié permettant de transformer un modèle en un autre équivalent afin de proposer une mise en forme facilitant la réponse aux questions posées. C'est ainsi que les élèves sont conduits à résoudre leur premières (in)équations et à rédiger leurs premières démonstrations algébriques en faisant usage d'identités. L'instrumentalité des règles algébriques donne la pleine mesure de sa puissance et le recours aux autres niveaux de rationalité, bien que toujours possible, perd de sa prégnance initiale.

Les élèves sont également mis au contact des fonctions lors du traitement des questions posées. Dans le langage fonctionnel, ces questions consistent à calculer l'image par une fonction d'un point et à calculer l'image réciproque d'un nombre par une fonction. Cette rencontre avec les fonctions est intéressante à souligner à plusieurs titres. Pour commencer, en Belgique francophone, dans les programmes, la première rencontre est prévue en 3e année du secondaire soit vers 14-15 ans. Cela indique qu'un travail sur les fonctions est possible bien avant ce qui est prévu par le cadre légal. Il ne s'agit pas ici d'inciter à sortir des clous par provocation mais de montrer la (grande) relativité des choix qui ont été posés dans la constitution des programmes, choix qui tendent avec le temps à se fossiliser en dogme, en l'occurrence l'idée que la notion de fonction est trop sophistiquée pour pouvoir être abordée avant la 3e année. Les phénomènes de fossilisation ne sont pas d'ordre « folklorique » et peuvent impacter de manière significative la manière d'envisager et de structurer les *curricula*.

Ensuite, il est tout à fait remarquable de constater que le calcul de l'image réciproque d'une fonction dans le contexte considéré ici ne soulève pas de difficulté majeure chez les élèves alors que, dans le même temps, la notion de réciproque introduite en 6e vers 17-18 ans met à mal plus d'un élève et plus d'un enseignant. Comment comprendre cette disparité ? Une hypothèse est la suivante. L'incapacité de la noosphère à distinguer entre la théorie des fonctions « à la Bourbaki » qui repose sur la théorie des ensembles et la notion de fonction qui n'a pas encore été formalisée de la sorte conduit si l'on veut à mettre la charrue avant les bœufs. Pour plus d'un enseignant, il apparaît difficilement envisageable de faire travailler la notion de fonction avant que les résidus de terminologie bourbakiste n'aient été présentés aux élèves (domaine, image…). Ce faisant la tendance en Belgique francophone est de passer un temps considérable (pour ne pas dire exclusif) à introduire cette terminologie et à proposer des exercices qui tournent à vide, en oubliant le fait qu'avant d'être une théorie, les fonctions constituent un mode de pensée et un outil pour résoudre des problèmes. Ici c'est la mise en correspondance et l'explicitation, sous forme algébrique, d'un lien entre un numéro d'étape et un nombre d'arêtes qui permet de trivialiser la réponse aux questions posées initialement. Cette mise en correspondance ne nécessite pas un apprentissage préalable de la théorie ensembliste des fonctions. Les problèmes rencontrés en 6e année concernant les réciproques de fonctions nous semblent donc plus imputables à une insistance et une incapacité à envisager cette notion en dehors du formalisme déjà constitué qu'à l'idée même de réciproque, car des élèves de 1re année sont parfaitement en capacité de s'emparer de ce type de question. On pourrait donc soutenir l'idée que nous sommes ici face à un obstacle didactique (Brousseau, 1998) lié à l'épistémologie « formaliste » des enseignants. Cette épistémologie est tout à fait paradoxale car elle propose un enseignement des fonctions où celles-ci sont des modèles de pas grand-chose et sont réduites à de la terminologie. Dans cette ingénierie, le travail sur les fonctions n'est pas superficiel. Il ne se réduit pas à « calculer quelques réciproques ». Le projet est plus ambitieux et s'inscrit pleinement dans une démarche de modélisation en marquant à nouveau une distance par rapport à ce qui se pratique classiquement en Belgique francophone concernant l'enseignement des fonctions.

Les élèves sont mis au contact de nouvelles suites d'objets avec les mêmes questions comme illustré à la figure 4.

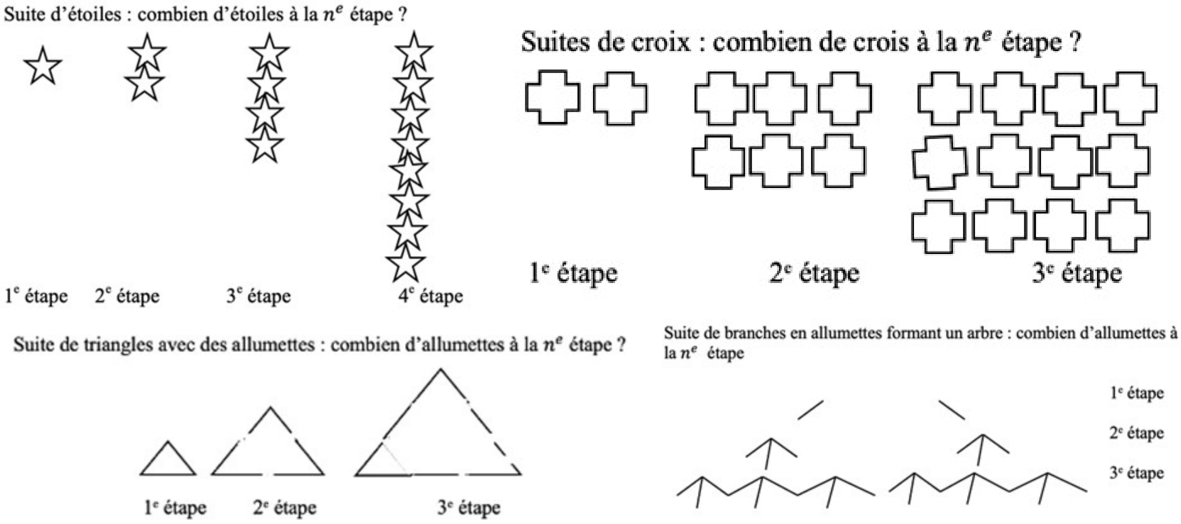


Figure 4 *: De nouvelles suites figurées.*

Ils ont donc l'opportunité de travailler les raisonnements et techniques employés précédemment mais surtout, ils se voient offrir l'opportunité de mettre en évidence des liens de parenté entre les différentes suites au travers du modèle algébrique.

La suite des étoiles peut être modélisée par $2^{(n-1)}$, celle des croix par $(n+1)n$, celle des triangles par $3n$, celle des branches par $2.3^{(n-1)}$. Ainsi la suite des maisons et des triangles ont en commun d'être construites à l'aide d'une addition répétée ; et la suite des étoiles et des branches d'être construites à partir d'une multiplication répétée. La suite des croix constitue à ce stade un isolat qui indique « simplement » (mais c'est important) que d'autres types de suites sont envisageables que celles engendrées par addition ou multiplication répétées. Une suite figurée n'est pas nécessairement une suite arithmétique ou géométrique.

Les modèles $2^{(n-1)}$ et $2.3^{(n-1)}$ jouissent d'une particularité intéressante. Ces modèles ne posent pas problème pour les valeurs naturelles plus grandes ou égales à deux. Mais que se passe-t-il lorsque $n=1$? Les expressions se réduisent respectivement à 2^0 et 2.3^0 et font apparaître un exposant nul, ce qui à ce stade n'a pas de sens pour les élèves. Si cela en avait et pour qu'elles aient une utilité, ces expressions devraient valoir respectivement 1 et 2 pour que les modèles proposés soient également valables à l'étape 1. Dans l'esprit pragmatique adopté précédemment, il n'est pas choquant d'attribuer un sens à la puissance zéro de sorte que $2^0=1=3^0$. Cela permet d'augmenter la portée des modèles et évite de devoir considérer deux cas distincts, lorsque $n=1$ et $n\geq 2$. Ce choix est d'autant moins arbitraire, si on continue à raisonner de manière pragmatique, toujours à l'image de ce qui a précédé. Pour la suite des branches, un autre modèle était envisageable. Il s'agit de $\frac{2}{3}.3^n$. Comme le nombre de branches à une étape donnée est unique, les deux modèles ne peuvent être équivalents que lorsque $\frac{2}{3}.3^n=2.3^{n-1}$. On en déduit que nécessairement $3^0=\frac{3^1}{3}=\frac{3}{3}=1$ ce qui constitue un autre argument en faveur de $3^0=1$. Ce raisonnement peut encore être complété par l'argument suivant. Si ajouter une unité à un exposant induit une multiplication de plus par 3, retirer une unité à un exposant induit une division par 3. Donc, comme $3^0=3^{1-1}$, pour obtenir 3^0, il faut partir de $3^1=3$ et diviser par 3 ce qui donne 1. On peut évidemment compléter de manière similaire la justification de $2^0=1$ et plus généralement de $c^0=1$. Ce type de raisonnement préfigure ce qui sera systématisé dans la suite du parcours pour étendre la portée des suites géométriques à des ensembles de nombres plus vastes. Travailler cette manière d'étendre la portée du symbolisme algébrique avec les élèves nous semble fondamental pour plusieurs raisons. Cela offre une opportunité de casser l'idée que les notations mathématiques sont des conventions arbitraires. Cela met ensuite les élèves en contact avec la modélisation intra-mathématique. Le sens des notations n'est pas choisi en référence au monde sensible mais en référence à la logique interne des modèles travaillés et constitue à ce titre une possibilité (à petite échelle) de mettre en question l'ubiquité du positivisme empirique critiqué plus haut.

Les traits communs à ces suites peuvent être exprimés au niveau de l'algèbre en introduisant un nouveau type de lettre, le paramètre. Les suites des maisons et des triangles peuvent toutes s'écrire sous la forme $an+b$ et celles des étoiles et des branches sous la forme $c.d^{(n-1)}$. Les modèles paramétrés constituent si l'on veut une nouvelle couche de modélisation, des modèles de modèles. Dans le premier modèle (de modèles), $an+b$, b est un paramètre qui désigne le nombre d'objets initial et a est un paramètre qui désigne le nombre d'objets qu'on ajoute à chaque étape. Dans le second modèle (de modèles), $c.d^{(n-1)}$, c est un paramètre qui désigne le nombre d'objets initial et d est un paramètre qui désigne le nombre par lequel on multiplie à chaque étape pour obtenir le nouveau nombre d'objets.

Ces modèles (de modèles) ouvrent la porte à une nouvelle manière d'aborder les problèmes de suites figurées. C'est cette manière de procéder qui a été mise à contribution précédemment pour résoudre l'item des pommiers extrait de PISA. Au lieu de devoir à chaque fois partir de zéro face à une nouvelle suite figurée, les élèves peuvent tenter de déterminer si la suite donnée met en évidence une addition ou une multiplication répétée. Dans l'affirmative, les modèles $an+b$ et $c.d^{(n-1)}$ peuvent être mis à contribution et faire gagner un temps précieux. On voit avec le parcours présenté jusqu'à présent l'économie de pensée à l'œuvre à différents niveaux et notamment dans la constitution de modèles (de modèles) toujours plus performants, jusqu'à culminer avec les modèles fonctionnels paramétrés. Ces modèles unificateurs permettent de réaliser une économie de pensée substantielle. Les connaissances obtenues à partir du travail sur un modèle paramétré sont valables pour toutes les instances où il s'applique. On résout ainsi d'un seul coup, non pas un seul problème, mais plusieurs, en l'occurrence une infinité. Le paramétrage apparaît alors comme une marge de liberté qui permet de tenir compte des spécificités du problème traité. Il est intéressant de relever à nouveau que, dans les programmes de la Belgique francophone, les suites arithmétiques et géométriques sont abordées en 5^{e} vers 15-16 ans. Les travaux de Krysinska et al. (2009) constituent une mise en perspective intéressante de plus concernant les capacités « précoces » des élèves par rapport au prescrit légal.

À nos yeux, ce qui précède justifie de vouloir remplacer la manière usuelle d'étudier les fonctions au secondaire, « une par une », par celle de classes de fonctions paramétrées envisagées comme modélisations instrumentales des caractéristiques communes à des familles de problèmes. Voilà qui tranche nettement avec la vision des fonctions considérées comme « langage universel » mais dont les élèves n'ont pas forcément la conscience de quoi ce langage parle. Modélisation et « résolution de problèmes » sont des activités fortement connectées. L'activité de modélisation vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes. La validation des modèles peut se faire selon des niveaux de rationalité différents (pragmatique avec les praxéologies de type I et déductif avec les praxéologies de type II) mais articulés ou typiquement, les praxéologies de type II succèdent au praxéologies de type I lorsque ces dernières sont arrivées à un stade de maturité suffisant, tout en précisant que le recours au niveau de rationalité pragmatique reste toujours possible, quand bien même c'est le déductif qui tend à dominer, au-delà d'un certain stade de développement. Insistons donc sur le fait qu'il semble bel et bien réducteur pour ne pas dire incongru d'envisager ces activités comme des « compétences à évaluer ». Évidemment, on peut vouloir mettre en place des évaluations mais qu'est-ce que les mathématiques ont en définitive à voir avec une terminologie et des notions (compétence, compétence transversale…) dont la fonction principale semble plus relever de la mise en place d'un contrôle bureaucratique et normatif des pratiques enseignantes que d'une volonté d'élever l'esprit humain (Job & al., sous presse) ?

Le choix des suites arithmétiques et géométriques pour débuter le parcours n'est pas anodin. Ce choix conduit en effet aux fonctions du 1[er] degré et exponentielles par « densification » des tableaux numériques employés dans les phases exploratoires. Cette « densification » se fait via une dialectique entre numérique et algébrique. Expliquons-nous sur la signification de cette « densification » et de cette dialectique.

3.2. Épisode 2 : les fonctions du premier degré

L'extension à tous les points d'une même droite d'une même relation $y=ax+b$ ou le regroupement de toutes les droites du plan en un seul et même ostensif $ax+by+c=0$ contraint les règles de calcul sur les relatifs. Ici, c'est l'algébrique qui commande au numérique puisqu'il s'agit de prolonger un même modèle algébrique des naturels aux relatifs en définissant en conséquence l'extension des opérations. Voici les lignes principales d'une telle extension.

Première extension

À partir de la droite de la figure 5, on peut construire le tableau numérique de la figure 6 pour les valeurs de x positives.

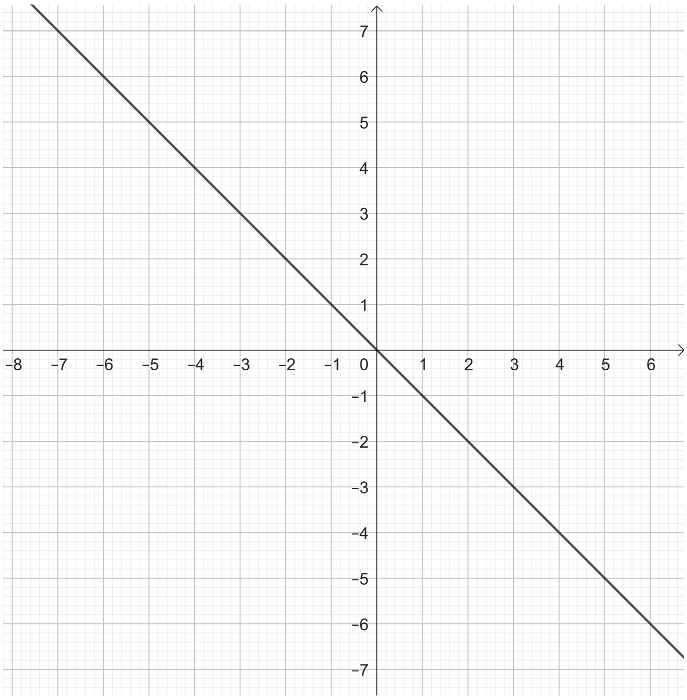


Figure 5 : La droite $y=-x$.

x	1	1,5	2	2,3	7
y	-1	$-1,5$	-2	$-2,3$	-7

***Figure 6** : Tableau relatif aux valeurs positives de x pour $y=-x$.*

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de x pour obtenir la valeur de y correspondante est assez évident. Il s'agit de $y=-x$. L'exploration numérique pour les valeurs de x négatives donne le tableau de la figure 7.

x	-1	$-1{,}5$	-2	$-2{,}3$	-7
y	1	$1{,}5$	2	$2{,}3$	7

Figure 7 *: Tableau relatif aux valeurs négatives de* x *pour* $y=-x$.

Si l'on souhaite que le modèle initial $y=-x$ soit également valable pour les nombres négatifs, on n'a guère le choix, il faut accepter que $(-(-x))=x$.

Seconde extension

Considérons à présent la droite de la figure 8 et construisons similairement le tableau numérique de la figure 9 pour les valeurs de x positives.

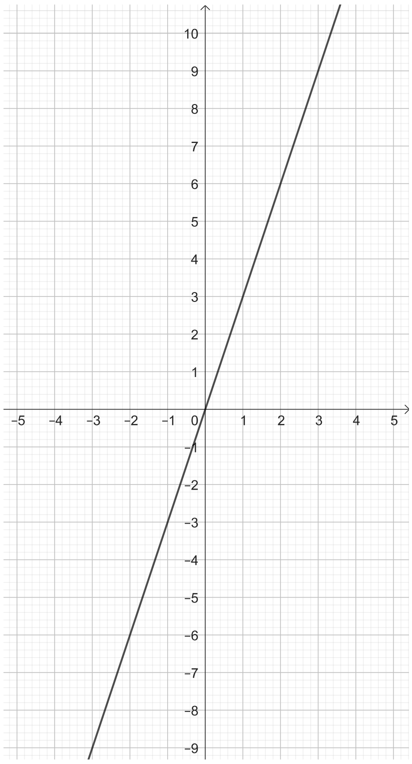


Figure 8 *: La droite* $y=3x$.

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}3$	3
y	3	$4{,}5$	6	$6{,}9$	9

Figure 9 *: Tableau relatif aux valeurs positives de* x *pour* $y=3x$.

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de x pour obtenir la valeur de y correspondante est assez évident. Il s'agit de $y=3x$. L'exploration numérique pour les valeurs de x négatives donne le tableau de la figure 10.

x	-1	$-1{,}5$	-2	$-2{,}3$	-3
y	-3	$-4{,}5$	-6	$-6{,}9$	-9

Figure 10 *: Tableau relatif aux valeurs négatives de x pour $y=3x$.*

Si l'on souhaite que le modèle initial $y=3x$ soit également valable pour les nombres négatifs, on n'a guère le choix, il faut accepter que $-3=3.(-1)=(-1).3$, pour autant que la commutativité soit également préservée. Des expériences avec d'autres coefficients directeurs conduisent à accepter la règle plus générale $-a=a.(-1)=(-1).a$ valable pour tout naturel a. Cette règle a ainsi comme conséquence que deux naturels donnés a et b doivent vérifier

$$(-a).b=(-1).a.b=(-1).(a.b)=-ab=a.(-1).b=a.(-b).$$

Troisième extension

Considérons à présent la droite de la figure 11 et construisons similairement le tableau numérique de la figure 12 pour les valeurs de x positives.

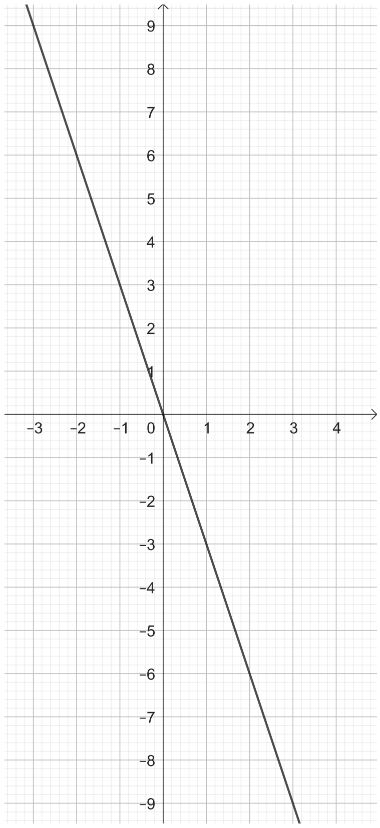


Figure 11 *: La droite $y=-3x$.*

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}3$	3
y	-3	$-4{,}5$	-6	$-6{,}9$	-9

Figure 12 *: Tableau relatif aux valeurs positives de x pour $y=-3x$.*

Le modèle algébrique exprimant l'opération à effectuer sur une valeur de x pour obtenir la valeur de y correspondante est assez évident. Il s'agit de $y=3x$. L'exploration numérique pour les valeurs de x négatives donne le tableau de la figure 13.

x	-1	$-1{,}5$	-2	$-2{,}3$	-3
y	3	4,5	6	6,9	9

Figure 13 *: Tableau relatif aux valeurs négatives de* x *pour* $y=-3x$.

Si l'on souhaite que le modèle initial soit vérifié pour les valeurs négatives, on doit accepter que $3=(-3).(-1)$. Des expériences avec d'autres coefficients directeurs conduisent à accepter la règle plus générale $a=(-a).(-1)$ valable pour tout naturel a. En particulier, $1=(-1).(-1)$. Ce cas particulier est important car il permet de déduire les autres cas abordés dans cette extension, ce qui contribue à mettre en évidence la cohérence globale des règles de calcul ainsi élaborées. De fait, si a est un nombre naturel, il suit

$$(-a).(-b)=(-1).a.(-1).b=(-1).(-1).a.b=1.a.b=ab.$$

On voit ainsi comment la notion d'économie de pensée peut se décliner dans le cadre de la modélisation mathématique et aussi comment la construction d'un modèle peut relever de considérations intra-mathématiques qui font sortir d'une certaine vision figée qui voudrait réduire la conception de modèles à une dialectique d'ajustement « bijectif » entre monde sensible et modèle mathématique. Ici, c'est la volonté de préserver la validité d'un modèle qui est génératrice de mathématiques, en l'occurrence de règles de calcul sur les entiers. C'est en ce sens que dans cette partie du parcours l'algébrique commande au numérique.

3.3. Épisode 3 : les fonctions exponentielles

L'étude des suites géométriques est prolongée pour des nombres appartenant à des ensembles de plus en plus vastes et conduit aux fonctions exponentielles. Les progressions géométriques sont étendues aux entiers négatifs puis aux rationnels sur la base des régularités observées dans les tables numériques de suites géométriques c'est-à-dire l'idée de multiplication répétée qui s'exprimera par la suite à l'aide d'une équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Prenons le cas de 2^x pour illustrer. Si augmenter d'une unité l'exposant de 2^x revient à multiplier 2^x par 2 alors retrancher une unité à l'exposant de 2^x revient à diviser 2^x par 2. On est ainsi conduit à $2^{x-1}=\dfrac{2^x}{2}$ et à $2^{x-n}=\dfrac{2^x}{2^n}$ pour n naturel en itérant le raisonnement. En particulier, $2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}$. 2^x a alors un sens pour des valeurs de x qui sont des entiers négatifs.

Similairement, comment attribuer un sens à $2^{\frac{1}{2}}$? Si on fait l'hypothèse qu'augmenter de $\dfrac{1}{2}$ l'exposant correspond encore à une multiplication, on est amené à conclure que $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ car $2=2^1=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}$. En raisonnant de la même manière, on est conduit à poser $2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}$ pour tout n naturel. Et ainsi de suite pour d'autres bases et exposants rationnels. L'extension « pragmatique » des progressions géométriques à de nouvelles classes de nombres est motivée, complétée et systématisée par l'analyse de divers contextes : nombre de bactéries, variation de la température d'un corps, transformation du sucre de canne en dextrose. L'enseignement va jusqu'à l'extension aux nombres irrationnels via la continuité du numérique assurée par l'axiome des intervalles emboîtés.

3.4. D'autres classes de fonctions

Ceci conduit, outre la classe des fonctions exponentielles, à celle des fonctions logarithmes : intensité d'un tremblement de terre, valeurs du pH comme mesure de l'acidité d'une solution... Le détail des progressions et constructions se trouvent dans Schneider et al. (2016). Le contexte des fonctions exponentielles et logarithmes permet de mettre en évidence l'intérêt de considérer des contraintes qui portent sur les fonctions elles-mêmes ce qui conduit à considérer des équations fonctionnelles et à s'intéresser à leur résolution : $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, $g(x_1\cdot x_2)=g(x_1)+g(x_2)\ldots$

Les fonctions du second et troisième degré sont introduites dans un esprit similaire à ce qui précède. Des problèmes appartenant à la cinématique, l'économie, la géométrie sont soumis aux élèves. Il s'agit par exemple de déterminer la hauteur maximale d'un objet lancé verticalement, maximiser le bénéfice obtenu en vendant un bien astreint à des contraintes élémentaires où la diminution du nombre de ventes est directement proportionnelle à l'augmentation du prix de vente unitaire, maximiser/minimiser l'aire de figures géométriques simples de périmètre (ou apparenté) fixé. Dans tous ces cas, des fonctions du second degré apparaissent et la mise en évidence de leur parenté par l'intermédiaire de l'écriture standardisée $y=ax^2+bx+c$ amène la question de l'étude de cette famille de fonctions, c'est-à-dire des caractéristiques pertinentes pour répondre aux questions soulevées par les problèmes initiaux. Parmi ces caractéristiques on trouve les extrema, les racines, les questions de croissance/décroissance. Cette étude est menée en partant de $y=x^2$.

On transforme géométriquement la courbe de référence correspondante (diverses translations et dilatations) en étudiant l'impact de ces transformations sur les propriétés de la courbe : comment évoluent les extrema par exemple. Parallèlement, on modélise algébriquement ces transformations ce qui fait émerger la forme canonique $y=a(x+\beta)^2+\gamma$. Les transformations de la courbe de référence fournissent donc les raisons d'être de la forme canonique. Suivant Job et al. (2023, p. 20) :

> *« Ce parcours est différent du parcours dit classique dans lequel on transforme d'abord algébriquement le trinôme du second degré en forme canonique $(x+\beta)^2+\gamma$ pour traiter d'abord les équations du second degré et ensuite, seulement, pour l'interpréter géométriquement. »*

Une approche similaire est envisagée pour les fonctions du 3e degré et les fonctions harmoniques usuelles. Le lecteur est invité à consulter respectivement Krysinska et Schneider (2010) et Henrotay et al. (2015) pour plus de détails.

4. Conclusion

Le parcours exposé propose une approche possible de la modélisation mathématique, autant dans sa dimension intra-mathématique, qu'extra-mathématique, en prenant appui sur la notion d'économie de pensée qui nous semble être au cœur de l'épistémologie des mathématiques. Ce point de vue épistémologique nous amène à envisager la modélisation comme une activité visant à produire des modèles instrumentaux pour la résolution de problèmes. Les modèles peuvent être validés selon différents niveaux de rationalité, pragmatique et déductif, mis en évidence par les praxéologies de type I et II. Ces deux niveaux ne sont pas disjoints et entretiennent des liens dialectiques. Dans ce contexte, la modélisation fonctionnelle est susceptible de jouer un rôle majeur. Les élèves sont amenés à construire des classes de fonctions paramétrées qui modélisent les traits communs à des familles de problèmes et en fournissent ainsi une caractérisation autorisant l'utilisation de techniques de résolution instrumentales. La résolution de problèmes est ainsi déportée vers la capacité à brasser toujours plus de classes de fonctions paramétrées au fur et à mesure que de nouvelles sont introduites ce qui signifie pour un problème donné développer sa capacité à identifier à quelle classe le problème appartient et à constituer une nouvelle classe lorsqu'un problème ne fait partie d'aucune classe préalablement apprise.

Dans la manière dont le parcours est présenté, les fonctions constituent le principal objet d'étude. Cela ne signifie pas pour autant que « rien d'autre n'est travaillé » mais plutôt que d'autres apprentissages sont « subordonnés » aux fonctions. Ainsi l'algèbre émerge des activités de modélisation fonctionnelle (ce qui n'exclut pas d'autres fonctionnalités). Les équations et inéquations expriment des questions que l'on se pose à propos des fonctions. Les identités sont des outils de mise en forme de fonctions permettant de répondre à des besoins particuliers comme par exemple factoriser pour obtenir les racines… La sophistication des classes de fonctions considérées n'est pas gratuite et résulte des problématiques traitées. Par exemple, des fonctions irrationnelles sont requises dans certains problèmes d'optimisation comme minimiser le coût du transport d'un trajet dans des milieux différents (terre-mer).

Des éléments du formalisme ensembliste/bourbakiste des fonctions sont introduits mais n'en constituent pas la finalité comme cela est souvent le cas dans les classes ordinaires où ce formalisme tourne à vide. La pensée fonctionnelle existe indépendamment de ce formalisme. Le « sens » des fonctions n'est donc pas localisé dans ce formalisme mais dans l'utilisation qui est faite de la pensée fonctionnelle pour résoudre des problèmes par constitution de classes de fonctions paramétrées.

Dans cet univers, l'acquisition de la notion de fonction est jaugée à l'aune de la capacité des élèves à exprimer des récits relatant la genèse des différentes classes et leurs propriétés mais également à choisir de manière judicieuse une technique selon le problème posé s'il s'agit de considérer une équation, une identité, si telle lettre doit être considérée comme un paramètre ou une inconnue. Le travail de la dénotation est pour ainsi dire permanent.

Références bibliographiques

Bart, D., & Daunay, B. (2016). *Les Blagues à PISA*. Éditions du Croquant.

Bodin, A. (2006). Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. *Bulletin de l'APMEP*, 463, 240-265.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposicion didactica de organizaciones matematicas en proceso de algebrizacion, El caso de la proporcionalidad. *Recherches de Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Actes Sud.

Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Springer.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique* (2e ed.). La Pensée Sauvage.

Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie*, 154, 97-110. https://doi.org/10.4000/rfp.143

Delord, M. (2013). Coup d'oeil rapide sur PISA 2013. http://michel.delord.free.fr/pisa2013-quick.html

Douady, A. (1996). Remarque sur le « point de vue » de R. Bkouche sur l'enseignement de la notion de limite. *Repères - IREM*, 25, 87-88.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'Analyse*. Vuibert, Paris.

Dunia, A. (2014). De l'écologie d'un discours heuristique d'acculturation à l'algèbre linéaire [Thèse de doctorat non publiée]. Université de Liège.

Fourez, G., Englebert-Lecomte, V., & Mathy, P. (1997). *Nos savoirs sur les savoirs*. De Boeck Université.

Henrotay, P., Krysinska, M., Rosseel, H., & Schneider, M. (2015). *Des fonctions taillées sur mesure*. Presses universitaires de Liège.

Job, P. (2011). Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Job, P., Le Hebel, F., & Schneider, M. (sous presse). Deux approches contrastées de l'évaluation internationale PISA. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.

Job, P., Krysinska, M., & Schneider, M. (2023). *Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur.* Repères - IREM, 128, 5-38.

Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46, 635–646.

Krysinska, M., Mercier, A., & Schneider, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(3), 247–303. https://revue-rdm.com/2009/problemes-de-denombrement-et/

Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Presses Universitaires de Liège.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique* (Balacheff, N. & Laborde, J.-M., Trad.). Hermann.

Lebeau, C., & Schneider, M. (2009). *Vers une modélisation algébrique des points, droites et plans*. Presses universitaires de Liège.

Lehmann, D., & Bkouche, R. (1988). *Initiation à la géométrie*. Presses Universitaires de France.

Mach, E. (1987). *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement* (Bertrand, É., Trad.). Sceaux : J. Gabay (œuvre originale publiée en 1883).

Matheron, Y. (2012). *PISA : Prudence (envers les) Interprétations Statistiques Avancées. IFE, EAM-ADEF, conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012.* [*http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-4*](http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-4)

Nguyen, G., Schneider, M. (2017). *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Presses universitaires de Liège.

Popper, K. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Éditions Payot.

Patras, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Presses Universitaires de France.

Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité [Thèse de doctorat, Université de Liège].

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In G., Lemoyne & F., Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352). Les presses de l'Université de Montréal.

Schneider M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantanée. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.

Schneider, M. (2006a). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue française de pédagogie*, 154, 8-8. https://doi.org/10.4000/rfp.136

Schneider, M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-ils de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 9-38.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques - La didactique par des exemples et contre-exemples*. Liège : Les Éditions de l'Université de Liège.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique? In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, & P. Gibel (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* : actes de la *XVe école d'été de Didactique des Mathématiques* (pp.175-206). La Pensée Sauvage.

Schneider, M., Balhan, K., Gérard, I., & Henrotay, P. (2016). *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*. Presses universitaires de Liège.

Schneider, M., Clarys, M., Coché, F., De Brouwer, M., Dedeur, V., Docq, C., Gilbert, T., Henrotay, P., Lambelin, N., Lemaire, L., Liégeois, M., Looze, A., Maquoi, J., Scrève, R., Solhosse, M. & Vlassis, J. (2016). *Rapport du groupe de travail mathématique dans le cadre du Pacte d'Excellence. Axe Thématique 1 « Savoirs et compétences ». Groupe de travail I.1. « Cadre d'apprentissage, contenus des savoirs et compétences, et plans d'actions prioritaires ».*

Schneider, M. & Job, P. (2016). Ingénieries entre recherche et formation : Élèves-professeurs en mathématiques aux prises avec des ingénieries didactiques issues de la recherche. Un dispositif de formation à portée phénoménotechnique. *Éducation & didactique*, 10, 91-112. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2508

Tricot, A. (2017). *L'Innovation pédagogique*. Éditions Retz.

Van Dieren, F. (2005). « Enseigner par compétences » ou « former à travers une discipline » : où sont les contradictions ? Conférence donnée au colloque franco-finlandais sur « L'enseignement des mathématiques à partir de l'enquête PISA » à Paris, les 6-8 octobre 2005.

Service Générale du Pilotage du Système Éducatif. (s.d.) PISA 2003. *Évaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans. Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2ème degrés de l'enseignement secondaire*. http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1343&do_check=BAKWQDOADG

Annexe 1. Énoncé de l'item des pommiers et des conifères

Cet item est contextualisé de la manière suivante (PISA, 2000) :

> *« Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers. »*

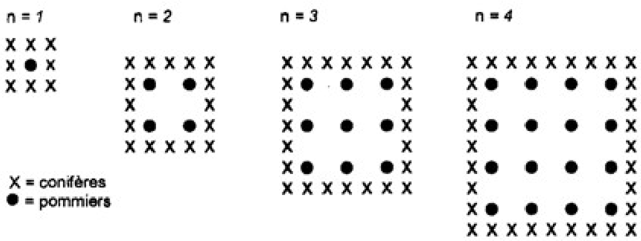


Figure 1 *: Représentation des pommiers et des conifères.*

On donne également aux élèves les expressions n^2 et $8n$ qui donnent respectivement le nombre de pommiers et le nombre de conifères à chaque étape. On leur demande de compléter le tableau suivant :

Complétez le tableau:

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Figure 2 : Tableau à compléter.

Les élèves doivent alors déterminer la valeur de n pour que le nombre de pommiers soit égal au nombre de conifères. On leur demande en outre de déterminer lequel des deux nombres augmente le plus vite lorsque le fermier agrandit son champ ?

Dans la version analysée par Schneider et al. (2016), les expressions n^2 et $8n$ ne sont pas données aux élèves.

Annexe 2. Résolution « astucieuse » de l'item des pommiers et des conifères

La formule n^2 donnant le nombre de pommiers n'est guère problématique. Pour celle du nombre de conifères $8n$, on peut relever que pour une rangée de n pommiers, il y a le double d'intervalles entre conifères sur le côté correspondant, donc 2×n (Figure 3).

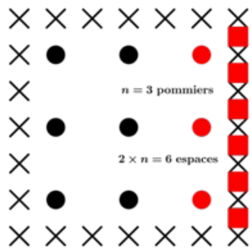


Figure 3 : Nombre d'espaces entre conifères en fonction du nombre de pommiers.

Comme il y a 4 côtés, en prenant soin de ne pas compter plusieurs fois les conifères aux coins du carré, on peut en déduire qu'il y a 2×n conifères par côté et donc 4×2×n=8n conifères au total.

Enseigner la modélisation pour enseigner les mathématiques : une dynamique problématique

Alain KUZNIAK[13]
Université Paris Cité

Résumé. Dans cet article, nous présentons un résumé de notre conférence. Celle-ci reprenait, pour partie, le cours donné à l'école de didactique des mathématiques de 2021. Ce cours fait l'objet d'une publication dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (Numéro à paraître) et nous renvoyons le lecteur intéressé à cette publication pour plus de détails.

Mots-clés. Modélisation, mathématisation, modèle, travail mathématique.

Abstract. This short paper is a summary of our talk at the IREM meeting in Poitiers. Its content is based on the lecture we gave at the French Didactic School in October 2021 and which is published in the scientific journal Recherches en Didactique des Mathématiques (to appear). We refer the interested reader to this publication for more details.

Keywords. Modelling, mathematization, model, mathematical work.

Resumen. En este artículo presentamos un resumen de nuestra charla en el congreso Irem en Poitiers. Su contenido se basa en la ponencia pronunciada en la Ecole de Didactique en octubre de 2021 y publicada en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques (de próxima aparición). Para más detalles, invitamos al lector interesado a remitirse a esta publicación.

Palabras clave. Modelización, matematización, modelo, trabajo matemático.

Introduction

Dans une première partie de la conférence, nous considérons les raisons de l'intérêt porté à la modélisation mathématique et l'approche des mathématiques enseignées qui en résulte. Une approche dominante de cet enseignement a été inspirée par les théories nord-européennes sur la modélisation en relation avec un enseignement par compétences. En insistant sur la place de la mathématisation et sur le rôle des modèles, nous questionnons la réalité du travail mathématique ainsi développé par les enseignants et les élèves.

Dans une seconde partie, nous reprenons la thématique de la mathématisation horizontale et du chaînage des modèles introduite dans le cadre de la Realistic Mathematics Education (RME). Puis, en nous appuyant sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), nous montrons comment nous concevons l'articulation entre activité de modélisation et formation du travail mathématique.

Modélisation, mathématisation et modèles

Les trois termes (modèle, modélisation, mathématisation) peuvent avoir des sens et des emplois différents en fonction des approches didactiques, pédagogiques ou théoriques qui les utilisent. Il est important de considérer cette diversité en étant attentif aux divers usages qui en sont faits et

[13] Alain.kuzniak@u-paris.fr

qui renvoient pour partie à des conceptions différentes de ce que sont les mathématiques et leur enseignement.

Il n'y a pas de consensus sur la définition de ce qu'est un modèle. En particulier, tout modèle n'est pas mathématique et un domaine scientifique peut se développer en s'appuyant sur d'autres types de modèles, notamment analogiques. La plupart des disciplines comme la biologie, l'économie, ont développé leur propre approche de la modélisation. Il est donc essentiel de replacer le rôle des mathématiques dans un contexte plus vaste où interviennent des formes de pensée différentes qui peuvent être scientifiques ou, parfois, idéologiques.

Cependant, il est notable que les mathématiques ont acquis une position particulière pour décrire, comprendre et anticiper certains phénomènes du monde réel. Initialement consacrées à la mécanique et à la physique, les applications des mathématiques sont aujourd'hui multiples et concernent tous les domaines scientifiques et même au-delà, comme l'économie ou les sciences humaines. Ce processus de mathématisation du réel est décrit par Israel (1996, p. 9) comme « l'invasion des mathématiques dans les processus de description et d'analyse du monde comme dans les techniques d'intervention active sur lui ».

Dans le cadre particulier de l'enseignement des mathématiques, comment comprendre les interactions entre modélisation et mathématiques ? Quelles places et quels rôles sont attribués à la mathématisation, aux mathématiques et au travail mathématique dans les différentes approches didactiques qui se préoccupent de la modélisation ?

Aux origines de l'intérêt pour l'enseignement de la modélisation

Si l'on s'en tient à l'enseignement dans les pays occidentaux naviguant dans l'orbite anglo-saxonne, la question de la modélisation a commencé à être posée aux débuts des années soixante. La coïncidence avec la révolution des mathématiques modernes n'est pas fortuite puisque, dans les deux cas, c'est l'inadaptation de l'enseignement des mathématiques tant pures qu'appliquées qui est mise en avant. On attribue cette prise de conscience à l'avancée technologique et scientifique de l'Union Soviétique (U.R.S.S.) dans certains domaines à fort enjeu militaire.

Ces inquiétudes ont conduit certains pays occidentaux à mettre en place un enseignement spécifique de la modélisation dans le cadre de la formation des ingénieurs. Pour avancer vers une mise en œuvre didactique d'une discipline nouvelle, les différents chercheurs et enseignants concernés élaborent ce qu'ils appellent une *méthodologie pour la modélisation.* Celle-ci doit décrire le processus mis en œuvre lors d'une modélisation. Dès la fin des années 60, un consensus semble s'établir pour considérer trois phases bien distinctes pour décrire ce processus de modélisation dans sa globalité :

1. Description et formulation d'un modèle idéalisé en langage mathématique.
2. Solution du problème mathématique et déduction de résultats susceptibles de vérification expérimentale.
3. Comparaison des observations et de la théorie pour arriver à une évaluation de la validité du modèle.

Au cours des années 70, ces idées sont mises en pratique et débouchent sur des descriptions plus complexes qui tentent de s'approcher au mieux du processus de modélisation pour en faciliter l'enseignement. A l'origine des cycles de modélisation, qui fleuriront à partir des années 80, on trouve la méthodologie de Penrose :

1. Spécification du problème réel.
2. Développement d'un modèle.
3. Formulation du problème mathématique.
4. Résoudre le problème mathématique.
5. Interpréter la solution.
6. Comparer la solution avec le problème réel.
7. Recommencer ou écrire un rapport.

Deux points sont mis en avant dans cette méthodologie, le premier porte sur le fait qu'il faut faire un travail de défrichage du problème pour le spécifier à partir d'une réalité complexe et non mathématique (étapes 1, 2 et 3). Le deuxième (étape 7) montre que l'acte de modélisation n'est pas gratuit : il doit produire un résultat à l'issue d'une recherche et ce résultat doit pouvoir être communiqué à des non mathématiciens pour être ensuite utilisé par ces derniers.

Enseigner la modélisation dans l'enseignement secondaire : l'approche standard et dominante

A partir des années 1980, l'enseignement de la modélisation ne concerne plus les seuls ingénieurs mais il sert de base à une rénovation de l'enseignement des mathématiques qui cherche à donner plus de sens aux notions mathématiques introduites dans les cours. Il s'agit de problématiser ces notions en recherchant des problèmes où elles interviennent pour apporter des solutions.

L'approche qui s'est progressivement imposée en Europe, et plus largement dans les pays à économie libérale, s'appuie sur la notion de compétence. La distinction entre le monde réel et celui des mathématiques est à la base de l'approche suivie pour la mise en place de la compétence de modélisation. La relation entre les deux est vue comme une application des mathématiques vers un autre monde (extra-mathematical world) qui peut être un autre sujet, une autre discipline, un domaine de pratique ou de vie sociale ou privée, etc. (Niss et al., 2007).

La modélisation réfère à un ensemble de processus qui peut être décrit par un cycle de modélisation qui pourra être parcouru plusieurs fois suivant les besoins. L'enseignement de la modélisation peut alors être défini grâce à un certain nombre d'ingrédients : le cycle de modélisation pour le décrire, des tâches de modélisation pour le mettre en place, la compétence de modélisation pour l'évaluer.

Le cycle de modélisation qui est privilégié dans cette approche comprend sept processus directement inspirés de la méthodologie de Penrose, évoquée plus haut.

1. Comprendre la tâche et construire la situation modèle.
2. Simplifier et structurer la situation modèle et construire le modèle réel.
3. Traduire (translating) le modèle réel en un modèle mathématique (mathematize).
4. Appliquer les techniques mathématiques pour produire des résultats mathématiques (working mathematically).
5. Interpréter les résultats mathématiques.
6. Valider ces résultats en relation avec la situation réelle.
7. Présenter et expliquer le processus de solution ainsi que les résultats.

L'enseignement de la modélisation dans les classes passe par le choix et le développement (design) de tâches particulières et authentiques qui doivent permettre aux professeurs d'enseigner la modélisation dans les classes. Dans de nombreux pays des actions de formation d'enseignants ont été développées pour comprendre ces tâches, leur enseignement et leur évaluation.

Cette approche de la modélisation a permis un développement important des ressources pour un enseignement de la modélisation, enseignement qui peu à peu s'est imposé dans les curricula. Si l'on se restreint à l'impact réel sur l'apprentissage des mathématiques, le constat n'est pas évident à tirer du fait d'un manque d'évaluation notable sur ce point précis. Qu'en est-il du rapport des élèves aux mathématiques ? A-t-il changé ? Que peut-on dire du développement des pures connaissances mathématiques au-delà de l'acquisition supposée d'une compétence générale sur la modélisation ?

L'approche épistémologique, mais pas que…

Dans l'introduction à un numéro de la revue ZDM consacré à la modélisation dans l'enseignement, Kaiser et al. (2008) introduisent une classification des approches didactiques de la modélisation qui suggère l'existence d'autres types d'approches que l'approche dominante. Les auteurs retiennent essentiellement les approches « sociologique » et « épistémologique ».

L'approche dite *sociologique* est particulièrement active et vivante en Amérique Latine. Elle insiste sur la prise en compte des mathématiques spécifiques aux sociétés dans lesquelles évoluent les élèves. La seconde approche est dite *épistémologique* parce qu'elle privilégie les aspects liés au contenu mathématique et qu'elle insiste sur la mathématisation à travers l'organisation des savoirs à développer.

Parmi ces approches, nous avons choisi de présenter deux théories didactiques complémentaires : la Realistic Mathematics Education (RME) et la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM).

L'approche constructiviste radicale de la Realistic Mathematics Education : importance des modèles émergents.

Initiée par le mathématicien Freudenthal à partir des années 70 aux Pays-Bas, la théorie RME est avant tout orientée vers une conception des situations de classe guidée par une approche constructiviste de l'enseignement.

Pour Freudenthal, les mathématiques sont d'abord une activité humaine qui consiste à résoudre et chercher des problèmes et plus généralement à organiser un domaine issu de la réalité ou d'un domaine mathématique. Ce processus d'organisation est désigné sous le nom de *mathématisation*. Une première *mathématisation horizontale* passe par une succession de modèles qui permettent un passage graduel du monde réel à la théorie. Elle s'adresse particulièrement aux élèves de l'école obligatoire. Par la suite, une seconde mathématisation dite *verticale* permet d'accéder à des notions mathématiques de plus en plus abstraites.

La RME accorde un rôle prépondérant à l'idée de modèles émergents. Ces modèles émergents sont vus comme des représentations de situations problèmes. Ils peuvent revêtir diverses formes : objets matériels, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et symboles. Ils sont étroitement associés à des représentations symboliques produites dans un premier temps par les élèves. Ces différents modèles sont organisés de manière linéaire et progressive sous la forme d'un *chaînage de modèles*. Le plus souvent possible, ils peuvent être élaborés par les élèves et ne font pas nécessairement partie d'un corpus mathématique institutionnalisé.

La théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM)

L'étude du travail mathématique est centrale dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et Vivier, 2011, Kuzniak et al., 2022). La théorie a pour ambition de décrire, comprendre et (trans)former le travail mathématique exercé dans un contexte scolaire.

À travers le prisme de la théorie des ETM, le développement par un individu, générique ou non, d'un travail mathématique adéquat est vu comme un processus progressif et graduel de mise en relation de deux plans, l'un de nature épistémologique en étroite relation avec le contenu mathématique, le second de nature cognitive en relation avec la pensée d'un individu en train de résoudre des problèmes ou de réaliser des tâches mathématiques. La mise en place progressive du travail mathématique évolue en fonction de trois différents types de développements génératifs spécifiques et entrelacés : les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives. Ces différentes genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) s'appuient sur les interactions entre signes et visualisation, artefacts et construction, référentiel théorique et preuve.

De manière spécifique, la perspective des ETM sur la modélisation (Lagrange, et al., 2022, Nechache, 2018) propose une réorganisation du cycle de modélisation autour de trois processus : la description mathématique de la réalité, la mathématisation et la validation externe (Fig. 1).

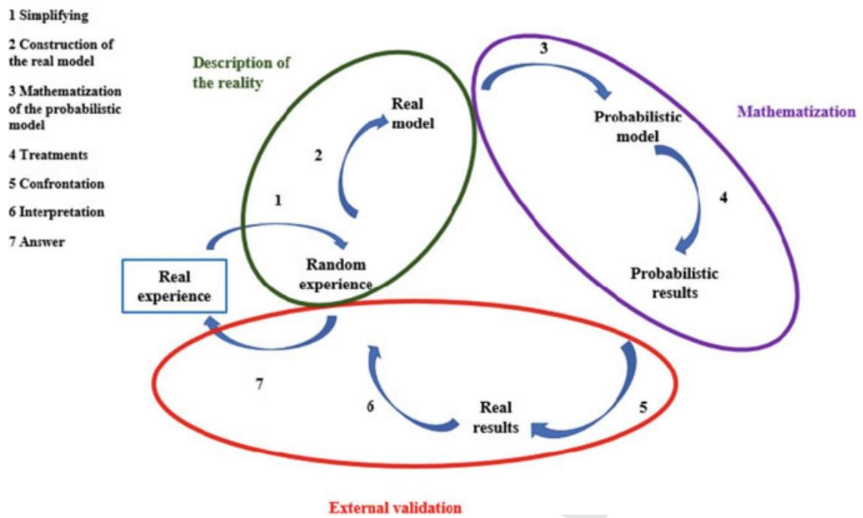


Fig. 1. Mathématisation et cycle de modélisation (adapté de Nechache, 2018)

La mathématisation occupe une place centrale (mais non unique) dans cette approche qui est orientée vers la construction mathématique des objets et la structuration des modèles à l'intérieur de théories mathématiques. Le travail mathématique consiste alors à produire, développer et raisonner dans ces modèles. La mathématisation se distingue ici de la modélisation. Cette dernière est orientée vers l'action et la résolution de problèmes qui se posent dans le monde du travail et dans la société.

Dans cette approche, un modèle mathématique est vu comme un fragment de théorie mathématique organisé au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques et qui peut s'appliquer à décrire, comprendre ou agir sur le monde, qu'il soit réel ou déjà modélisé au sein d'autres champs scientifiques.

En insistant sur l’idée de localité et de complémentarité des modèles, Lagrange (Lagrange et al. 2022) a développé une approche de la modélisation, en fin de lycée, qui s’appuie sur une connexion de modèles dont chacun apporte un point de vue différent sur la question posée. Ces modèles ne sont pas tous forcément mathématiques et permettent ainsi une réelle interdisciplinarité. Cette pluralité de points de vue associée à une pluralité de modèles permet de rendre compte de la richesse du problème et de la diversité des solutions possibles. Chacune apporte un éclairage nouveau et nécessaire à la compréhension de la réalité.

Chacun des modèles locaux est associé à un ETM particulier, et cet ETM doit être mis en relation avec d'autres modèles associés à des ETM différents. Ainsi, la théorie des ETM permet d'articuler différents points de vue et d'étudier les interactions à la fois cognitives et épistémologiques entre tous ces éléments.

Pour mettre en place cette approche dans les classes, Lagrange et al. (2022) utilisent une approche pédagogique développée à partir des années 70 aux États-Unis, the jigsaw classroom ou « classe puzzle ». Cette méthode pédagogique permet de faire travailler les élèves en groupes sur différents modèles puis, en recomposant les groupes, de comparer les expériences de chacun. Cette organisation permet de résoudre la contrainte du temps qui pèse souvent sur les situations de modélisation et d’aborder des problèmes complexes en relativement peu de temps.

Quelques questions en suspens...et pourtant cruciales

Pour conclure, nous soulevons quelques points qui restent problématiques et méritent l’attention des chercheurs et enseignants intéressés par la modélisation dans un contexte scolaire.

- La démathématisation actuelle provoquée par les outils digitaux et la simulation.

Un point vient télescoper les recherches et, plus profondément, la nature même de la question du travail mathématique mis en œuvre par les élèves. Il est relié à ce qu’il est convenu d’appeler la démathématisation actuelle des activités nécessitant des savoirs mathématiques. Les outils mathématiques sont maintenant englobés dans des artefacts technologiques de plus en plus puissants dont l’Intelligence Artificielle représente une des formes les plus abouties. De ce fait, ils sont rendus invisibles et leur étude peut apparaître inutile aux élèves.

- Une modélisation sans modèle

Parallèlement à cet accroissement des outils digitaux, il faut aussi noter l’apparition d’une modélisation sans modèle mathématique favorisée par des outils de simulation de plus en plus puissants. Pour résoudre un problème, il suffit alors de décrire les procédures mises en jeu dans la situation sans nécessairement les comprendre pour produire des résultats. Il s’agit là de ce que Varenne (2009) appelle la modélisation algorithmique qui permet de résoudre les problèmes sans nécessairement les comprendre et pouvoir expliquer les solutions obtenues.

- Modélisation et travail mathématique

Selon nous, la mise en place d’un travail mathématique nécessite une mathématisation qui s’appuie sur un ensemble de situations problématisées et une réflexion tant épistémologique que cognitive sur les savoirs mis en jeu dans les tâches de modélisation. De cette façon, il est possible d’espérer donner du sens aux objets et outils mathématiques en ne se limitant pas à la seule modélisation algorithmique et à des simulations aveugles.

Références bibliographiques

Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique.* Editions du Seuil.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education,* 38(3), 82-85.

Kuzniak, A. (à paraître). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Kuzniak, A., Montoya, E., & Richard, P.R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2011). L'enseignement de la modélisation. Mise en perspective critique. *Cahier du LDAR n°3, Irem de Paris.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110170/document

Lagrange, J. B., Huincahue, J., & Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak, E. Montoya & P. Richard (Eds.). *Mathematical Work in Educational Context: The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces.* Springer.

Nechache, A. (2018). L'articulation des genèses de l'Espace de Travail Mathématique dans la résolution des tâches probabilistes faisant appel à la modélisation. *Menon, Journal of Mathematical Education* (4) 93-104.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum et al. (eds). *Modeling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32). Springer.

Varenne, F. (2009). Epistémologie des modèles et des simulations : tour d'horizon et tendances. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144

Ateliers centrés sur l’apprentissage de modèles mathématiques

ENSEIGNER LES FRACTIONS EN 6^{E} À PARTIR DE MODÉLISATIONS AU SEIN D'UN TRAVAIL SUR LES GRANDEURS

Didier AUROY[14]
IRES d'Aix-Marseille

Yves MATHERON[15]
IRES d'Aix-Marseille

Résumé. Les outils fournis par la didactique théorique permettent de concevoir des propositions d'enseignement où la notion de fraction apparaît comme aboutissement de la recherche d'une question qui l'engendre. La proposition de notre groupe est construite à partir de ce qui fonde historiquement et épistémologiquement ce qu'on désigne du terme de fraction : la notion de grandeur. Les élèves travaillent sur des grandeurs de même espèce, commensurables, dont ils recherchent une partie aliquote. Ils établissent un rapport aux fractions de la grandeur attachée à un objet, et non pas un rapport aux « fractions d'objet » – tartes, tablettes de chocolat –, sans fondement épistémologique mais néanmoins souvent enseignées. Ils sont alors engagés dans une dialectique entre systèmes – grandeurs attachées aux bandes de papier, aux surfaces – et modèles qui s'en dégagent : les mesures fractionnaires et le début d'écritures littérales.

Mots-clés. Dialectique système-modèle, ostensif, fractions, grandeurs.

Abstract. The tools provided by theoretical didactics make it possible to design teaching proposals in which the notion of fraction appears as the outcome of the search for a question that gives rise to it. Our group's proposal is based on the historical and epistemological foundation of the term fraction: the notion of magnitude. The students work on commensurable quantities of the same kind, of which they are looking for an aliquot part. They establish a relationship with fractions of the magnitude attached to an object, and not with "object fractions" - pies, chocolate bars - which have no epistemological basis but are nonetheless often taught. They are then engaged in a dialectic between systems - magnitudes attached to strips of paper, surfaces - and the models that emerge from them: fractional measurements and the beginnings of literal writing.

Keywords. System-model dialectic, ostensive, fractions, magnitudes.

Resumen. Las herramientas que proporciona la didáctica teórica permiten diseñar propuestas de enseñanza en las que la noción de fracción aparece como el resultado de la investigación sobre una cuestión que le da origen. La propuesta de nuestro grupo se basa en el fundamento histórico y epistemológico del término fracción: la noción de magnitud. Los alumnos trabajan sobre cantidades conmensurables del mismo tipo, de las que buscan una parte alícuota. Establecen una relación con fracciones de la magnitud adjunta a un objeto, y no una relación con "fracciones objeto" - tartas, tabletas de chocolate - que no tienen base epistemológica pero que, sin embargo, se enseñan a menudo. Entablan entonces una dialéctica entre los sistemas -cantidades adheridas a tiras de papel, superficies- y los modelos que surgen de ellos: las medidas fraccionarias y el comienzo de la escritura literal.

Palabras clave. Dialéctica sistema-modelo, ostensif, fracciones, magnitudes.

[14] didier.auroy@free.fr

[15] yves.matheron@free.fr

Introduction

Depuis une vingtaine d'années, le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, devenu IRES, conçoit, développe et observe, dans les classes ordinaires de collèges et lycées, la passation d'Activités et de Parcours d'Etude et de Recherche (AER et PER) dans lesquels sont travaillés des processus de modélisation internes aux mathématiques.

L'expression « Activités d'Etude et de Recherche » a parfois diffusé dans la profession enseignante pour désigner des activités issues de manuels. Ces « activités » ne peuvent pourtant engager les élèves dans un processus d'étude par une recherche qui leur est dévolue.

Cet article, où l'on trouvera les grandes lignes ***du début*** d'un PER sur les fractions en 6^{e} en lien avec la modélisation, permettra aussi au lecteur de se faire une idée de ce que nous entendons par étude et recherche, sous la direction du professeur, dans le cadre d'un processus de modélisation.

1. Quelques considérations sur l'enseignement ordinaire des fractions en 6^{e} : oublis et confusions mathématiques, ostension déguisée, monumentalisme

1.1. Faiblesses mathématiques et didactiques à propos de fractions : un exemple prototypique

Le texte de l'activité ci-dessous, tirée d'un manuel de 6^{e} édité en 2016 chez Bordas, contient ce que nous essayons d'éviter pour la conception d'un PER sur les fractions : des erreurs mathématiques fréquemment enseignées, et un style d'enseignement majoritaire où les élèves répondent à des questions sans en rencontrer les raisons.

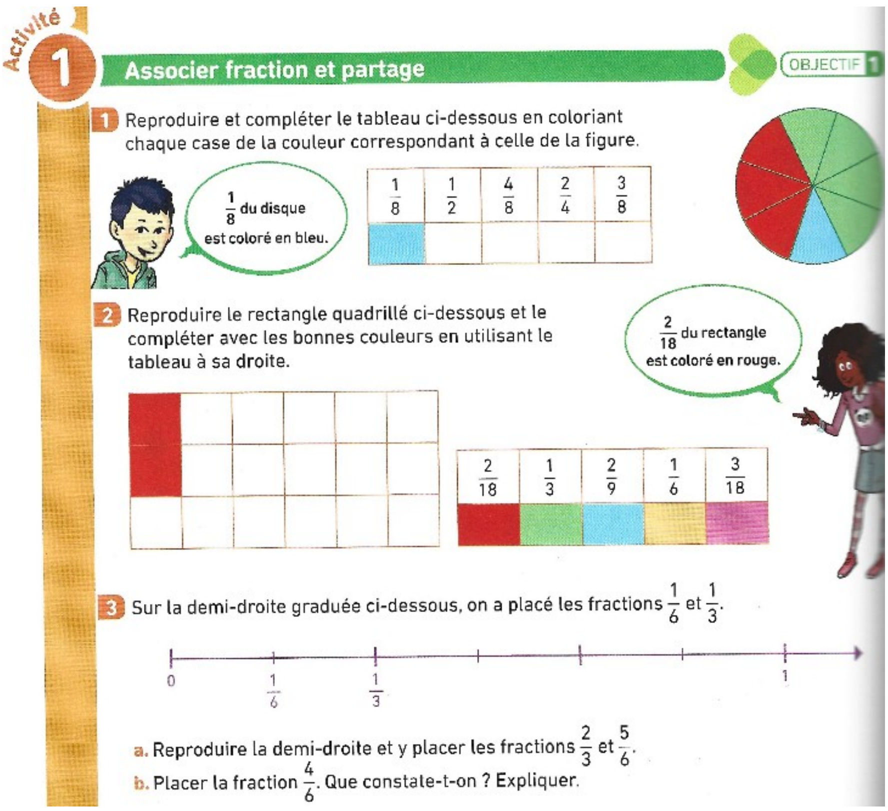


Figure 1 : Activité d'un manuel de 6^{e}

Les auteurs de l'activité n'échappent pas en effet à la confusion, assez fréquente, entre ***un objet*** que l'on « partage » d'une certaine manière (ici un disque, un rectangle, une demi-droite), ***la grandeur*** choisie attachée à cet objet (l'angle, l'aire, la longueur), et ***la mesure*** de cette grandeur ; dans ce cas un rationnel écrit sous forme fractionnaire[16]. ***La grandeur-unité*** choisie n'est pas désignée ; on présuppose sa reconnaissance partagée entre professeur et élèves à partir d'observations de dessins.

Or, parler de « fraction d'objet », que ce soit un disque ou un rectangle, n'a pas de sens ; de même pour une tarte ou tout autre objet… mathématique ou pas. On pourra, pour se convaincre, se reporter à la page 5 du document Eduscol *Grandeurs et mesures au collège*, du même nom que son lien de téléchargement. Y est illustrée ce qui, dans la vie courante, est vu comme une « fraction d'objet » ; dans ce cas des « moitiés de triangle » ou des « quarts de carré ». Les périmètres de ces pseudo-moitiés et pseudo-quarts d'objets ont des longueurs différentes, alors que leurs aires sont égales… Qu'entend-on alors par « fraction d'objet » lorsqu'on ne précise pas la grandeur attachée à l'objet, puisque la fraction n'est pas la même selon la grandeur choisie ?

On sait que les élèves ont en principe établi au Cours Moyen, deux années auparavant, un certain rapport à la notion de fraction[17]. Il fixe les attentes relatives aux réponses aux trois questions de l'activité. De nouveau, dans la question 3, une confusion apparaît, cette fois dans le vocabulaire relâché des auteurs : on ne peut demander de « placer ***une fraction*** » sur une demi-droite graduée, mais plutôt… ***un point***.

Cette confusion est révélatrice d'une difficulté récurrente à distinguer ***le système*** (les points d'une demi-droite) et un de ses ***modèles*** parmi d'autres (l'abscisse) ; d'où l'écrasement de l'un sur l'autre. N'apparaît pas le fait que, dans ce cas, les fractions modélisent certains points d'une demi-droite graduée à partir d'une grandeur, leur distance à l'origine, lorsque celle-ci peut être mesurée par un rationnel. Sur l'exemple de ce manuel parmi beaucoup d'autres, l'absence de distinction système-modèle laisse augurer des difficultés conceptuelles à venir chez les élèves : à propos des fractions et sur le processus de modélisation, la modélisation étant dans ce cas intra-mathématique. D'autres remarques pourraient être faites que nous ne développerons pas.

Au-delà du flottement épistémologique dans ce type d'activités, les élèves ne sont pas engagés dans un processus de recherche. Celui-ci supposerait au minimum qu'on les invite à élaborer une réponse à une question. La seule question trouvée, associée à l'équivalence des fractions en tant que propriété nouvelle au regard du programme[18], se situe dans la partie relative à la demi-droite. Elle n'est amenée par aucune raison issue d'un processus d'étude mathématique des élèves qui viendrait buter sur cette question,

[16] On peut trouver en mathématiques deux types de définitions pour le terme *fraction*. L'une s'appuie sur les grandeurs (Chenevier, 1932) ; nous l'avons choisie pour ce PER en raison de conditions et contraintes sur la transposition didactique. L'autre, plus générale, réfère au ***corps des fractions d'un anneau intègre*** (Verley, 1997), et (Ramis, Deschamps, Odoux, 1993). En particulier, le corps des fractions de l'anneau ¿, +, ×) est celui des ***nombres*** rationnels ¿, +, ×). A partir d'une modélisation intra-mathématique, les « nombres fractions » sont vus dans ce PER, non en opposition entre ces définitions, mais comme ***modèles*** de « fractions grandeurs ».

[17] Voir Annexe 23 du programme, *Repères annuels de progression pour le cycle 3*, rubrique « Nombres et calculs ».

[18] Nouvelle car le programme de CM2, Annexe 10, n'évoque pas le terme de *fractions équivalentes*. Il mentionne p. 2, « il *[l'élève]* connaît des égalités entre des fractions usuelles $\left(\text{exemple : } \frac{5}{10}=\frac{1}{2}; \frac{10}{100}=\frac{1}{10}; \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\right)$».

Sont absentes les techniques relatives aux fractions équivalentes, et certaines des raisons qui les produisent et justifient.

mais par la volonté des auteurs d'insérer explicitement des fractions équivalentes dans l'activité. Elle entraîne une première réponse, soufflée aux élèves à qui l'on demande un constat non motivé.

1.2. L'étude soumise à l'ostension et au paradigme de la visite des œuvres

Sous les contraintes prévalant dans le système scolaire, notamment sous une pédagogie stipulant qu'une séance de cours doit obéir à une certaine interactivité entre professeur et élèves, la théorie des situations didactiques a montré depuis plusieurs décennies (Brousseau, 1982) sur quels effets de contrat – Topaze et Jourdain notamment – s'appuyait le professeur pour que son action didactique perdure. De même, dans leur thèse, Berthelot et Salin (1992) ont établi sous quelle forme dominante sont actuellement enseignées les mathématiques : l'ostension déguisée. Au lieu de faire produire par les élèves des mathématiques comme réponses à des questions dont ils s'emparent, on continue de les leur montrer, d'où le terme « d'ostension ». Mais en leur faisant croire qu'ils les ont produites à partir de leur « activité », d'où l'adjectif « déguisée » qui masque le fait que l'on montre. L'activité précédente, au-delà des failles mathématiques relevées, en constitue un bon exemple.

Sous le régime didactique de l'ostension, qu'elle soit assumée, comme dans le cas d'un cours *ex cathedra*, ou déguisée, comme dans le cas d'un enseignement interactif, certains élèves parviennent à étudier quelques éléments de mathématiques. Mais le savoir n'est pas alors vécu collectivement par la classe comme réponse à une question nécessitée par le processus mathématique de recherche dans lequel elle serait engagée. Dans l'exemple précédent, les fractions équivalentes sont montrées comme une particularité des fractions, peut-être justifiée dans le meilleur des cas, mais sans que les élèves aient eu la possibilité de savoir ce qui est au fondement de l'existence de cette propriété, ni son utilité. Comme l'indique le programme de CM2 rappelé dans la note de bas de page 5, « l'élève connaît »… mais sait-il pourquoi ? Certains d'entre eux se poseront peut-être, de manière privée, des questions relatives aux fractions équivalentes ; les mêmes trouveront ou apporteront des réponses. Les différences interpersonnelles et socioculturelles jouent alors à plein et l'Ecole, qui pourtant promeut l'égalité des chances, les accentue (Guérin, 2021).

L'exemple de l'activité analysée ne relève pas d'une pathologie propre à ce manuel. Tout au contraire, la majorité des activités des manuels, du CP à la classe Terminale, sont construites selon un tel schéma d'où découle, en classe, la même forme didactique générique. Elles s'inscrivent ainsi au sein du paradigme didactique dominant : celui de la visite des œuvres (Chevallard, 2012).

On enseigne des mathématiques sans qu'une nécessaire vigilance épistémologique ait été exercée lors de leur transposition didactique. Sans non plus que les questions auxquelles elles répondent aient pu être rencontrées, vécues et travaillées par la classe, parce que la poursuite du processus de recherche, sous la direction du professeur, nécessite de répondre à de nouvelles questions qui surgissent et s'imposent. Les élèves répondent alors, comme dans l'activité du manuel de 6^e^, à des questions banales, enchaînées ou déconnectées les unes des autres, dans un défilement d'objets mathématiques. Métaphoriquement, cette forme didactique a été associée à la visite de monuments (tel théorème portant un nom célèbre) ou d'objets moins prestigieux, comme on en rencontre en déambulant dans une ville, un musée ou un magasin, sans la possibilité de s'interroger sur leur utilité et les raisons pour lesquelles ils ont été fabriqués.

A l'opposé du paradigme de visite des œuvres, ou encore de monumentalisme, se trouve le paradigme de questionnement du monde (Chevallard, 2007). Un enseignement sous forme de PER tend à s'éloigner de la visite des œuvres pour se rapprocher d'un questionnement d'une partie du monde, mathématique dans ce cas, sous les contraintes inhérentes à l'organisation actuelle de l'enseignement scolaire ; notamment celle qui désigne, dans un programme donné, les mathématiques qui doivent être enseignées (Matheron & Méjani, 2022).

2. Notre choix pour un PER sur les fractions en 6^e^ : faire travailler modèles et modélisation à partir des grandeurs et de leur mesure

2.1. La notion d'organisation mathématique de référence (OMR)

Depuis les origines de la théorisation didactique, on sait que pour pouvoir être enseigné à partir d'un programme, le savoir mathématique doit subir une série de transformations au sein de diverses institutions. C'est le processus de transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, étudié dès la fin des années 1970 (Chevallard, 1985 & 1991).

A titre d'exemples portant sur les deux extrémités de la chaîne de transposition didactique, existent plusieurs constructions didactiques possibles pour l'ensemble des fractions, ou encore pour l'ensemble des rationnels positifs Q_+. Sur la distinction entre fraction et rationnel, et son dépassement dans un processus didactique qui s'appuie sur la modélisation, on se reportera à la note de bas de page n°3. On peut par exemple, dans le domaine des grandeurs, faire rechercher l'épaisseur d'une feuille de papier par les élèves à partir de la mesure de la hauteur d'une pile de telles feuilles dont on connaît le nombre (Brousseau & Brousseau, 1987). On peut, plus proche d'une construction « savante » dans le domaine des nombres, faire travailler une relation d'équivalence R sur $Z \times Z^*$, que l'on pourra restreindre à $N \times N^*$ pour des positifs, définie par : a_1, a_2, b_1, b_2 étant des entiers, avec b_1 et b_2 non nuls : $(a_1, b_1)\ R(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (Reinhardt & Soeder, 1974 & 1997). Dans un cas, les fractions sont amenées à partir de relations entre deux grandeurs, dans l'autre à partir de la construction d'une structure de corps.

S'engager dans la construction d'un PER, par exemple portant sur les fractions, présuppose l'établissement préalable d'une organisation mathématique de référence (OMR) résultant de choix (Matheron & Méjani, 2022). Rappelons qu'une organisation, ou praxéologie, mathématique minimale complète est constituée d'un quadruplet (T, τ, θ, Θ). T désigne un type de tâches, τ une technique pour l'accomplir, θ la technologie permettant de produire τ, de la justifier et la comprendre ; la théorie Θ joue pour θ les mêmes fonctions que θ pour τ. Une organisation mathématique est généralement constituée d'un amalgame de plusieurs organisations élémentaires du type (T, τ, θ, Θ) pour devenir une organisation plus large, associée à un thème ou un secteur des mathématiques (à un ou plusieurs chapitres par exemple).

Au sein du processus de transposition didactique, l'OMR assume plusieurs fonctions. Elle permet *a priori* de déterminer l'organisation mathématique à faire étudier à partir de choix croisant contraintes institutionnelles mathématiques et didactiques et conditions de possibilité. Elle autorise un contrôle *a priori* sur la validité épistémologique de l'organisation mathématique que l'on souhaite enseigner et sur celle, effective, qui le sera. Au plan didactique, s'y référer permet l'exercice d'une vigilance sur les questions dévolues ; elles doivent apparaître comme des nécessités mathématiques se posant à partir du point où en est arrivée l'étude. Le processus d'étude et de recherche doit lui-même être engendré par une question plus large à laquelle l'organisation mathématique associée au thème ou au secteur constitue une réponse. On s'éloigne ainsi des réponses obtenues depuis l'interprétation des attentes du professeur, ou soumises à effets de contrat de sa part.

Dans l'introduction à *La mesure des grandeurs*, Lebesgue (1975) explicite ce qu'est un nombre entier et ce qu'est compter. On compare des collections « à une même collection type, la collection des mots d'une phrase. Ces mots sont appelés des *nombres*. […] Le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. » Lebesgue conclut, en italique dans le texte : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet*. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences […] » Dans ce sens, un nombre entier apparaît comme un modèle de l'ensemble des pratiques expérimentales désignées comme étant de dénombrement par des institutions, la société ; il permet de s'en dispenser.

2. 2. La notion de modèle

Trop souvent dans le domaine de l'enseignement, la notion de *modèle* apparaît comme un allant de soi non interrogé. Il en va de même de l'expression *compétence modéliser* que l'on trouve dans les programmes, du cycle 2 au cycle terminal. Nous n'utilisons pas le terme de compétence : son caractère scientifique n'est pas assuré (Johsua, 2002). Les effets négatifs d'un enseignement des « compétences » ont pu être analysés à partir de l'exemple belge (*cf.* Schneider (2006) et Crahay (2006)).

La généralisation du point de vue de Lebesgue à d'autres objets que les nombres entiers permet de proposer ci-dessous un élargissement de la définition d'un modèle qui a pu être initialement donnée en théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997 ; Barquero, 2022). Il faut pour cela définir tout d'abord les termes primitifs de ***système*** et de ***domaine de réalité***, pour en venir au terme de ***modèle***, lui-même considéré comme un système.

Les années d'après-guerre ont vu, avec le développement de l'informatique, une importante littérature se consacrer à la cybernétique et à la systémique[19]. Pour faire court, une définition minimale d'un ***système*** telle que celle donnée par le dictionnaire *Le Robert* suffit : « 1. Ensemble abstrait dont les éléments sont coordonnés par une loi, une théorie. Le système astronomique de Copernic. 2. Ensemble de pratiques organisées en fonction d'un but. Le système de défense d'un accusé. »

Sans entrer dans des débats de nature épistémologique, on pose généralement dans les sciences et comme axiome qu'il existe une réalité, physique ou sociale, indépendante de l'observateur, qui se manifeste à lui à partir de divers phénomènes. Dans la réalité supposée existante, constituée de systèmes eux-mêmes en interaction, il est possible d'opérer un découpage, souvent non arbitraire mais à partir d'un but que l'on poursuit. C'est ce qu'on appelle un ***domaine de réalité*** dans lequel se trouveront un ou des systèmes.

Il est possible de poser une question sur ce domaine de réalité, par exemple pour l'étudier ; ce peut être le but. On obtient alors, dans certains cas, ***un modèle*** de ce domaine de réalité. En travaillant le modèle, il est alors possible d'obtenir des

[19] On pourra, parmi une multitude d'ouvrages depuis celui de L. von Bertalanffy (1951, éd. 2012) à ceux d'E. Morin (1977) sur la complexité, se reporter au livre de J.-L. Lemoigne (1977, éd. 1990) sur *La théorie du système général,* justement sous-titrée… *Théorie de la modélisation* !

informations sur le ou les systèmes contenus dans ce domaine de réalité ; y compris dans un domaine de réalité mathématique.

Un modèle est donc un système permettant d'obtenir, grâce à un changement de pratiques sur un changement d'objets – par exemple, à trois doigts dressés d'une main tandis que deux autres sont baissés, on peut substituer les entailles III sur un support quelconque ou l'écriture 3 sur une feuille de papier –, des informations sur le système de pratiques antécédent qu'il modélise. Généralement, la modélisation s'accompagne d'un changement du système des objets ostensifs (par exemple des symboles mathématiques) qui, en tant qu'outils, permettent de travailler le modèle et peuvent continuer d'évoquer certains éléments du système modélisé. Ainsi naît une dialectique système-modèle : le modèle donne des informations nouvelles sur le système qui, en retour, permet de modifier, d'améliorer, de contrôler ce que produit le modèle.

Dans l'exemple donné par Lebesgue, le système des pratiques, ou plutôt des *praxéologies* car elles s'appuient sur ce qui les produit et les justifie, est constitué des « opérations expérimentales de dénombrement ». Il se modélise à l'aide du « nombre-mot » en tant qu'ostensif langagier (Bosch & Chevallard, 1999), vu comme cristallisation de ces opérations expérimentales, comme « compte rendu complet ». A son tour, le modèle peut être vu comme système dans lequel le travail portant sur les opérations avec des entiers, engageant alors des ostensifs scripturaux, autorisera une nouvelle modélisation ; par exemple aboutissant à de nouveaux modèles comme de nouveaux nombres, ou des structures algébriques. La construction des mathématiques apparaissant alors comme processus dialectique entre système et modèle, la question didactique portant sur la modélisation concerne la possibilité de faire vivre par les élèves une telle dialectique.

On s'intéresse, dans ce texte sur les fractions, à des questions dévolues en partie aux élèves et posées au domaine de réalité constitué du système des praxéologies dans lesquelles on les engage. Elles sont relatives à des objets – des bandes de papier, des réglettes en plastique, des surfaces, etc. – auxquels on affecte des grandeurs mesurables. On demande aux élèves d'agir sur ces objets et de se poser des questions. Ce qui mobilise leurs rapports antérieurement établis à ces objets ; rapports qui sont eux-mêmes des systèmes de praxéologies. On voit par là-même que la modélisation, c'est-à-dire la construction d'un modèle, est un processus qui n'est pas aussi simple que ce qu'on pourrait lire dans les programmes, ou le supposer.

2.3. Une organisation mathématique de référence

Construire une proposition d'enseignement nécessite au préalable de se pencher sur la construction d'une organisation mathématique de référence (*cf.* § 2.1). Elle est conditionnée par plusieurs choix, dont ceux résultant de conditions et contraintes propres aux mathématiques et à leurs transpositions didactiques dans des programmes. On a vu que deux grands choix, justifiés par des notions mathématiques, ont pu être faits concernant les fractions : l'appui sur les grandeurs ou sur les structures algébriques.

Dans l'histoire scolaire en France par exemple, le programme du second degré de la réforme des mathématiques modernes était essentiellement basé, en ce qui concerne les fractions, sur une transposition des structures algébriques : des ensembles de ***nombres*** munis d'opérations internes. C'était le cas dès l'école élémentaire où le programme de 1970 pour les classes de CM1 et CM2, niveau où l'on enseignait les fractions, préconisait le recours aux opérateurs. Un exemple faisant intervenir les opérateurs $\times 7$ et $\div 4$ appliqués successivement à des colonnes de nombres (et non pas à ***des mesures de***

grandeurs), illustrait la définition de la fraction $\frac{7}{4}$. Puis en 4e, dans le programme de 1971 : « On admettra que pour tout réel a différent de 0, il existe une nombre réel a^{-1} et un seul tel que $aa^{-1}=1$. Pour tout couple de nombres réels (a, b) avec $a \neq 0$, il existe un nombre réel unique x, appelé quotient de b par a, et noté ba^{-1} ou $\frac{b}{a}$, tel que $a\,x=b$ ».

Le programme de 3e de 1972, après avoir défini ce qu'est un rationnel, indiquait laconiquement « Corps des nombres rationnels ». Celui de 1969 pour la classe de 2de C et T, mentionnait aussi : « Les nombres rationnels forment un corps commutatif $\mathbb{Q}$. (Toute étude générale de la structure de corps est exclue du programme) ».

L'organisation mathématique utilisant pour fondements les structures algébriques n'a actuellement plus cours : c'est en principe le choix recourant aux grandeurs qui est fait pour les fractions. Pour le CM1, les actuels repères annuels de progression indiquent : « Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples $\left(\text{comme } \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$ dans le cadre du partage des grandeurs. » Ce choix fait écho au point de vue de Lebesgue (op. cit.) pour lequel de la mesure de grandeurs naît le nombre : « Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques […] ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet de l'Analyse. » Les nombres rationnels positifs dans le cas de ce programme, sont arrimés à la mesure de grandeurs.

Le choix fait par le programme influe sur la construction de l'organisation mathématique de référence. Pour nous, celle-ci doit contenir des éléments d'une organisation mathématique autour de l'algèbre des grandeurs ; les grandeurs de même espèce relevant d'une première modélisation, en mettant l'accent sur les grandeurs mesurables (vérifiant l'axiome d'additivité). À propos de ces dernières, figureront dans l'OMR des éléments d'une organisation mathématique autour de l'élément technologique « commensuration » : rapport rationnel de deux grandeurs, partie aliquote et mesure à l'aide de nombres rationnels une fois choisie une grandeur-unité commune. L'objectif du programme étant, par la suite, le travail sur les fractions autrefois appelées « abstraites » – comparaison, opérations, autrement dit les calculs dans $\mathbb{Q}^+$ sans référence aux grandeurs et sans évoquer la structure de corps de $\mathbb{Q}^-$, les écritures fractionnaires $\left(\frac{a}{b}\right)$ devront apparaître comme modèles de mesures de grandeurs d'autres types d'espèces, autrement dit d'autres systèmes, puis comme nombres sur lesquels on opère. De là l'obtention d'éléments de l'organisation mathématique produite par le travail sur le modèle. Au sein d'une dialectique entre modèle et système, les techniques de calcul sont justifiées par retour dans les systèmes antécédents portant sur les grandeurs attachées aux objets. Bien que nous recourrions aux grandeurs, notre proposition est distincte de la situation de la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier (Brousseau & Brousseau, 1987), et de celle d'ERMEL CM1 (2001) sur les bandes de papier (antérieurement utilisée par Brousseau & Brousseau, 1987, p. 45 & p. 51), assez connues des didacticiens. Par conséquent, les organisations mathématique et didactique de notre proposition diffèrent des autres.

3. Les grandes lignes d'un PER sur les fractions

Les séances décrites ci-dessous constituent des exemples de ce qui est reproduit plusieurs fois au cours du PER, avec des grandeurs différentes (longueurs, aires). Cela afin que les élèves éprouvent l'apparition des mêmes phénomènes : les ostensifs du type $\frac{a}{b}$ créés pour les mesures d'une des grandeurs sont utilisables pour d'autres et jouent alors le rôle de ***modèles*** généraux. La répétition de réponses identiques provoque, chez les élèves, un besoin d'économie et de généralisation ; ce qu'autorisent les ostensifs institutionnellement et mathématiquement attendus.

3. 1. Manipulations sur un domaine de réalité, fractions de grandeur et grandeurs-unité

Le PER sur les fractions que nous avons conçu nécessite que les élèves aient auparavant établi un rapport idoine à ce que sont des grandeurs attachées à des objets ; l'expérience des professeurs montre que c'est rarement le cas à l'entrée en 6^e^. Dans ce sens, divers objets, essentiellement des livres, des bandes de papier et des réglettes en plastique, sont mis à disposition des élèves : c'est le domaine de réalité défini par le professeur. Ils recherchent tout d'abord des grandeurs que l'on puisse attacher à ces objets : longueur, aire, couleur, prix, consistance, etc. Puis, deux grandeurs étant choisies, par exemple le poids et l'aire pour les livres et leurs couvertures, on demande de les ordonner, de la plus petite à la plus grande. Cela afin de ne plus considérer les « objets en soi », mais les grandeurs : l'ordre obtenu en changeant de grandeurs sur les mêmes objets diffère en effet.

Dans la continuité de ce qui a été observé sur l'ordre, le PER fait vivre le fait que l'on opère sur des grandeurs et non sur des objets. Un prérequis nécessaire, généralement présent dans le Curriculum Personnellement Vécu par des élèves, réside en l'un des axiomes de base sur les grandeurs (Rouche, 1994), résumé aux éléments praxéologiques :

T_1 : Recouvrir un objet de longueur L par des objets de longueur plus petite l.

τ_1 : Mettre bout à bout des objets de longueur l, en partant d'une extrémité d'un objet de longueur L et en essayant de parvenir avec précision sur l'autre extrémité de cet objet sans dépasser L.

Le travail dans le domaine de réalité, DR, consiste tout d'abord à rassembler des bandes de papier de longueurs diverses, notées et décrites comme étant, respectivement, de « longueurs L_i » et de « longueurs l_j », avec $L_i > l_j$.

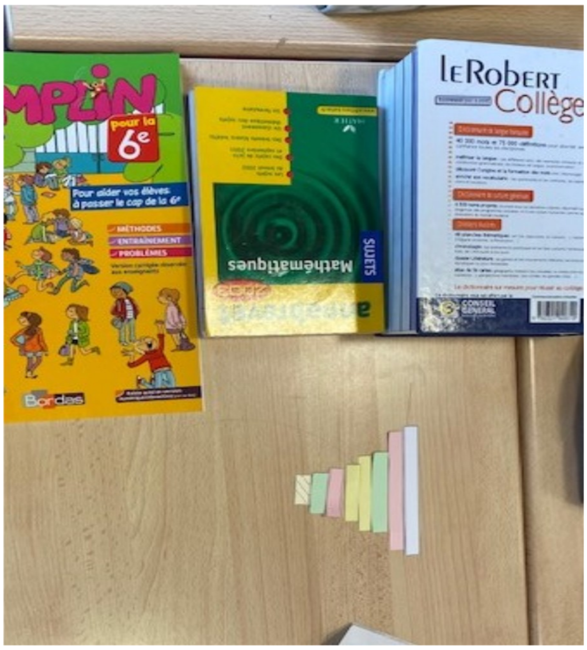


Figure 2 : Livres et bandes de papier mis à disposition des élèves dans une classe

Le premier système S_1 dévolu aux élèves est donc composé d'une partie du domaine de réalité, les bandes de papier, et d'une ***question génératrice*** Q_1, destinée à lancer les élèves dans la recherche, sous la direction du professeur P : Q_1 : « Combien de bandes ***entières*** de longueur l peut-on placer sur la bande de longueur L en les mettant bout à bout afin de la recouvrir complètement sans la dépasser ? »

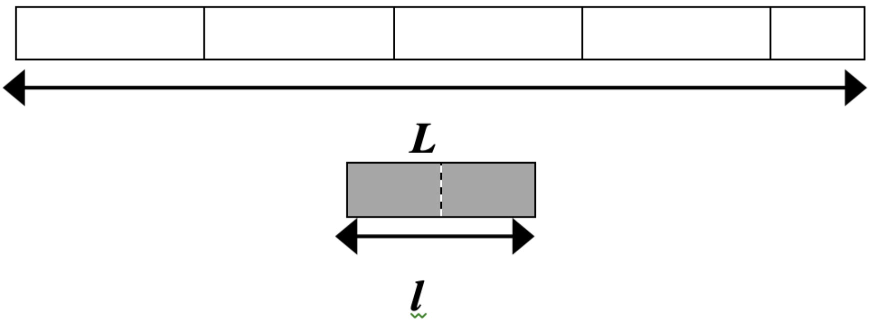


Figure 3 : Schéma des deux bandes de papier de longueurs L et l

Les longueurs L et l ont été choisies pour qu'on ne puisse pas répondre exactement à Q_1. Lors des passations, les réponses R_1 des élèves font état de cet échec. Par exemple : « on peut en mettre quatre, mais il reste un morceau non recouvert », « on peut en mettre quatre mais ça ne suffit pas, et cinq ce serait trop », ou encore « on peut en mettre 4,5 », etc.

Le système S_1 s'est désormais enrichi du résultat des travaux sur le domaine de réalité, orientés par Q_1. La classe dispose alors d'un nouveau système $S_2 = \{DR, T_1, \tau_1, Q_1, R_1\}$ où R_1 est jugée peu satisfaisante. C'est le moment opportun pour une modification du travail sur le système S_2 à partir d'une nouvelle question Q_2, entrevue par des élèves à partir de la longueur manquante pour un recouvrement exact :

Q_2 : « Peut-on construire, à partir de la bande de longueur l, une bande de papier de longueur plus petite que l, permettant le recouvrement de la bande de longueur L ? »

Sur le nombre d'élèves d'une classe ordinaire, compris entre 25 et 29 élèves, il en est toujours au moins un qui parvient à la conclusion qu'en pliant la bande de longueur l en deux parts égales, l'une de ces parts, qu'on désignera de longueur u, permet, par répétition, de réaliser le recouvrement espéré de la bande de longueur L. On obtient ainsi une réponse R_2 et un nouveau système $S_3 = [\{\text{DR}, T_1, \tau_1, Q_1, R_1\}, Q_2, R_2]$ ou, plus simplement $S_3 = \{S_2, Q_2, R_2\}$.

Ce succès mérite qu'on s'y attarde. À l'issue d'une discussion entre élèves, ou entre élèves et P, sont verbalisés et notés des éléments d'organisation mathématique obtenus à partir des actions sur S_2. Il apparaît ainsi aux élèves qu'il y a deux longueurs u dans l. P fait consigner ce résultat.

Puis il oriente les élèves vers une écriture plus « mathématique » et plus économique : « Comment écrire la phrase précédente sous forme plus mathématique ? » Apparaît alors l'écriture ostensive $l = 2u$, ou $l = 2 \times u$ réduite ensuite en $l = 2u$. « Quelle autre égalité peut-on obtenir où u est écrit à partir de l ? » demande P. Il amène ainsi les élèves vers l'usage d'un ***« nouvel » ostensif***, $\frac{1}{2}$, en principe rencontré au CM. L'observation des passations en classe permet d'affirmer que des élèves n'hésitent pas à dire, plus ou moins convenablement, que la « longueur u est égale à la moitié de la longueur l ». P peut alors faire écrire : $u = \frac{1}{2} l$.

Le recouvrement de la bande de longueur L par une bande de longueur $u = \frac{1}{2} l$ permet d'obtenir de nouvelles écritures que l'on institutionnalise : $\mathrm{L} = 9u$ et $u = \frac{1}{9}\mathrm{L}$. Ainsi que $\mathrm{L} = 9 \times \frac{1}{2} l$, par l'appel à une pseudo-distributivité s'appliquant à la fois à des scalaires et à des grandeurs, à partir d'une extension du lien entre addition répétée et multiplication, établi en primaire. On décide que $9 \times \frac{1}{2} l$ se note $\frac{9}{2} l$ en explicitant, par retour au système, la signification de cet ***ostensif*** : à quelles actions sur le système correspondent numérateur et dénominateur. L'ostensif $\frac{9}{2} l$ est ***un modèle des praxéologies mises en œuvre sur le système*** ; de même $l = 2 \times \frac{1}{9} l$ se note, comme modèle, $l = \frac{2}{9}\mathrm{L}$. Le travail conduisant à $u = \frac{1}{2} l$ fait apparaître ***la longueur-unité***.

Les séances suivantes sont conçues selon le même scénario dans une dialectique entre système et modèle, à partir du travail mené sur le système. Elles amènent les élèves vers des changements praxéologiques sur S_3 puis sur un nouveau système du type S_4, et ainsi de suite à mesure que des questions apparaissent, qu'elles viennent des élèves ou de P. En cela, l'organisation didactique prend la forme d'un parcours d'étude de questions qui émergent de l'étape où l'on est parvenu, et dont on recherche les réponses. Comme toujours, les questions dévolues aux élèves amènent la possibilité d'un certain jeu dans lequel s'investissent des élèves. Ainsi cette élève qui, au-delà de la longueur-unité trouvée par la classe, découvre que $u = \frac{3}{4} l$ convient aussi et justifie les pliages qu'elle effectue (*cf.* Figure 4). La classe peut ainsi apprendre qu'existent plus d'une longueur-unité.

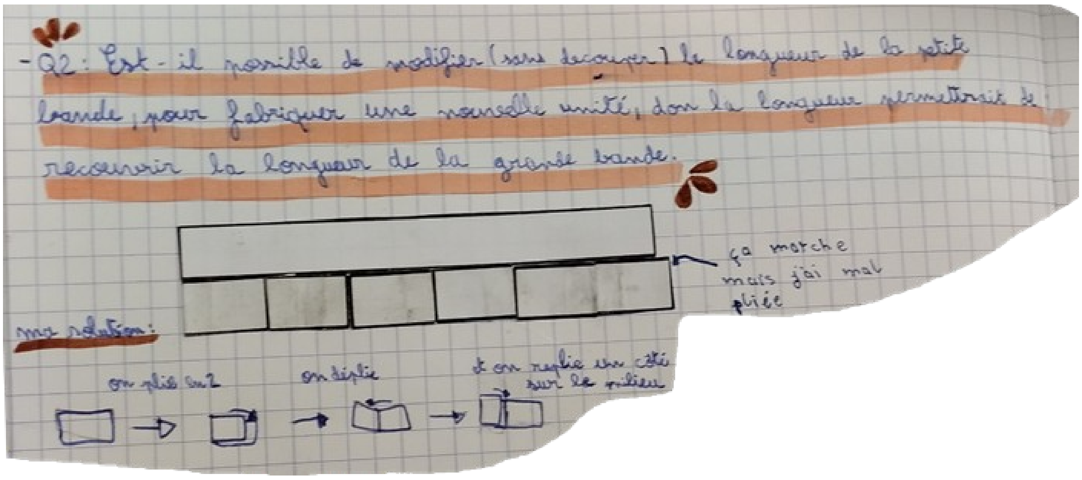


Figure 4 : Une élève trouve une autre unité de longueur et explique par quels pliages

3. 2. Manipulations sur un domaine de réalité aboutissant à la commensuration

On repart du système S_2 auquel on pose une nouvelle question, ***génératrice*** d'un travail aboutissant à la commensuration : « Pour obtenir une relation entre l et L, il a fallu utiliser une longueur-unité. Pourrait-on se passer de la longueur-unité pour trouver une relation entre l et L, donc sans partager la bande de longueur l en deux parties de même longueur ? »

L'idée qui émerge chez les élèves pour résoudre la question posée consiste à prendre, non pas une mais plusieurs bandes de longueur L. Et pour cela à commencer avec deux bandes de longueur L. En effet, des élèves se doutent, même s'ils ne l'expriment pas ainsi, que pour résoudre cette question, il va falloir obtenir un nombre entier de bandes de longueur l dans un multiple de la bande de longueur L (en en mettant un certain nombre bout à bout puisqu'ajouter des longueurs consiste, dans ce cas, à mettre bout à bout et rectilignement des bandes).

Les photos ci-dessous montrent les réponses obtenues avec des bandes de papier et des réglettes en plastique fabriquées à l'aide d'imprimantes 3D :

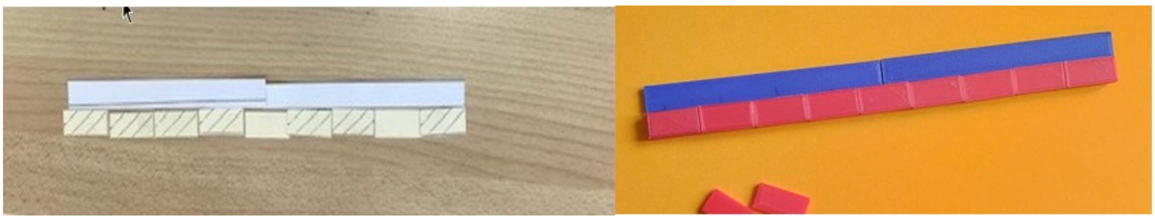


Figure 5 : Réalisation matérielle en classe de 6^e^ de l'égalité 9l = 2L.

Le professeur fait remarquer que l'on vient de trouver trois égalités portant sur l et L. Les nombres[20] $2, 9, \frac{2}{9}$ et $\frac{9}{2}$ ne font que traduire ce que l'on a fait avec des bandes de papier ou

[20] Ces écritures numériques sont des éléments des ***modèles*** des ***praxéologies*** portant sur des ***systèmes*** ; des « comptes rendus complets ». L'usage de ce vocabulaire peut paraître à certains professeurs inutilement compliqué pour enseigner, voire rébarbatif. Les éléments d'une théorie paraissant difficile se constituent pourtant en outils professionnels permettant de produire, justifier et contrôler efficacement ce que l'on conçoit. On peut s'en passer, comme pour l'activité du manuel qui inaugurait ce texte… à ses risques et périls, et surtout à ceux des élèves.

des réglettes, comment on les a disposées, sans pour autant changer les longueurs l et L de ces objets.

Les élèves sont alors engagés dans un moment d'exploration du type de tâches qu'ils viennent d'aborder. Pour cela, ils sont conduits à établir des égalités du type $b\mathrm{L}=al$ à partir des mêmes questions :

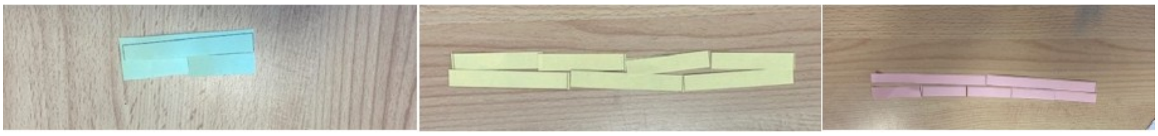


Figure 6 : Réalisation matérielle en classe de 6e des égalités L = 2l, 3L = 4l, 2L = 5l

Une institutionnalisation intervient qui permet de capitaliser le travail effectué sur les divers systèmes constitués de bandes ou de réglettes de longueurs différentes, en rapprochant les diverses égalités obtenues :

Ecrire $9l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{9}L$ et $L = \frac{9}{2}l$.

Ecrire $3L = 4l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{3}{4}L$ et $L = \frac{4}{3}l$.

Ecrire $5L = 10l$ revient aussi à écrire que $l = \frac{5}{10}L$ et $L = \frac{10}{5}l$.

Remarque : dans ce dernier cas, il a suffi de constater que $L = 2l$; écrire $5l = 2L$ revient aussi à écrire que $l = \frac{2}{5}L$ et $L = \frac{5}{2}l$.

Figure 7 : Institutionnalisation des résultats

Ainsi commence à être établie la technique de passage du produit au quotient : $9l = 2L$ équivaut à $l=\frac{2}{9}\mathrm{L}$. On sait les difficultés dénoncées par les professeurs, relatives à la maîtrise par les élèves du passage de $bq=a$ à $q=\frac{a}{b}$. Elles commencent à être prises en charge dès cette étape.

3. 3. Le nombre fractionnaire, « fraction abstraite », comme modèle de mesures

La question consiste désormais à rechercher si ce qui vient d'être établi sur des longueurs est vrai avec d'autres grandeurs ; par exemple avec les aires. On utilise soit des feuilles sur lesquelles sont dessinés des rectangles, soit des pièces rectangulaires en plastique.

La ***question génératrice*** est la suivante : « Peut-on dire de combien de fois l'aire B du rectangle ci-dessous est plus grande que l'aire A de l'autre rectangle ? »[21]

[21] Pour une première rencontre avec des aires, le fait que ces deux rectangles aient même largeur obéit à un choix volontaire : faire déterminer facilement par les élèves une aire-unité (*cf.* figure 8). Des exercices dans lesquels les rectangles ont des dimensions toutes deux différentes sont proposés par la suite.

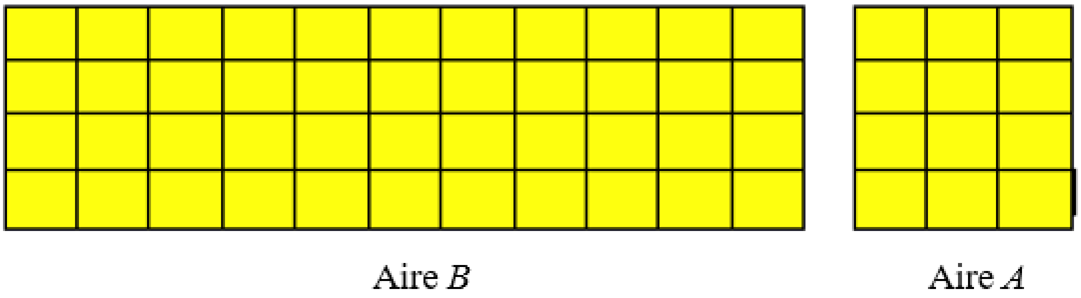


Figure 8 : Exemple de feuille distribuée aux élèves

La ***question cruciale*** qui suit, venue des élèves ou du professeur, consiste à se demander si l'on peut trouver une aire-unité afin d'écrire des relations entre A et B. Ci-dessous, une photo de ce que l'on trouve dans un cahier d'élève :

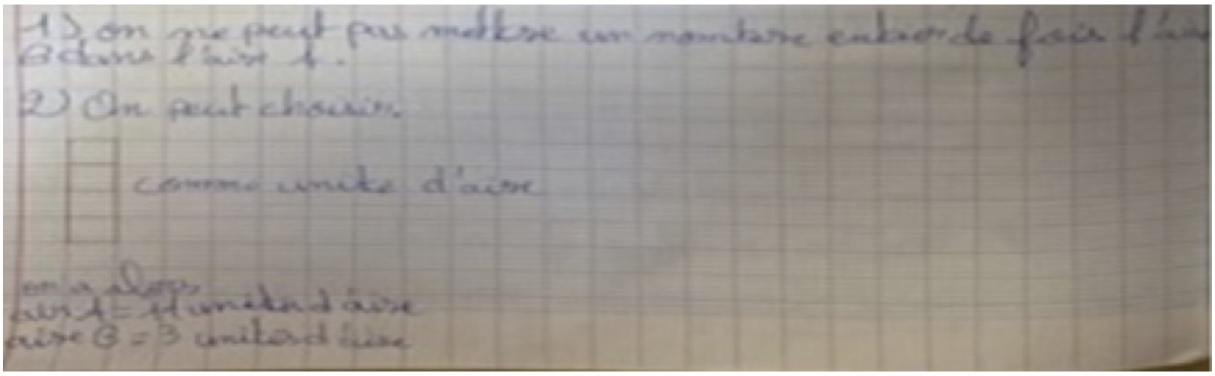


*Figure 9 : Choix d'une unité d'aire puis mesures d'aires en classe de 6^e^*

On établit, comme avec les longueurs : si $u=\frac{1}{11}\mathrm{B}$, alors $\mathrm{A}=\frac{3}{11}\mathrm{B}$ et si $u=\frac{1}{3}\mathrm{A}$, alors $\mathrm{B}=\frac{11}{3}\mathrm{A}$.

De même on recherche si, comme dans le cas des longueurs, il existe une relation du type $a \times A = b \times B$ à partir de la ***question cruciale*** : « Combien faudrait-il de rectangles d'aire A et combien faudrait-il de rectangles d'aire B pour obtenir deux rectangles d'aires égales ? ». Le travail sur les aires est répété sur divers spécimens obtenus en faisant varier les dimensions des rectangles. La synthèse du travail mené est consignée à l'occasion d'une nouvelle institutionnalisation :

Que les grandeurs g et G représentent des longueurs ou des aires, on a toujours trouvé que :
- écrire $9g = 2G$ équivaut à écrire $g = \frac{2}{9}G$ et $G = \frac{9}{2}g$
- écrire $11g = 3G$ équivaut à écrire $g = \frac{3}{11}G$ et $G = \frac{11}{3}g$

Figure 10 : Nouvelle institutionnalisation

Commence à émerger l'idée que la technique permettant de passer de l'écriture associée à la commensuration à l'écriture fractionnaire est indépendante de la grandeur choisie, au-delà des cas des deux seules grandeurs étudiées. De manière économique, on ne pourrait guère faire porter l'effort que sur le passage des écritures de produits à celles de fractions, sans s'occuper des grandeurs pourvu qu'elles soient de même espèce.

Le travail se poursuit avec l'addition (et la soustraction) à partir de la question génératrice suivante : « à quoi est égale la longueur d'un segment constitué de deux segments mis bout à bout dont on connaît les longueurs ? Comment faire ? » Lorsqu'on écrit, par exemple, $\frac{2}{9}\mathrm{L}+\frac{5}{9}\mathrm{L}=\frac{2+5}{9}\mathrm{L}=\frac{7}{9}\mathrm{L}$, l'idée progresse qui veut que l'essentiel de la technique se porte sur des nombres. Elle se renforce définitivement à partir du travail mené dans de nombreux exercices.

Un pas supplémentaire est franchi vers le point de vue qui identifie les fractions à des nombres, ce qu'on appelait autrefois les « fractions abstraites » à l'opposé des « fractions concrètes » associées aux grandeurs, lorsqu'émerge la question suivante : « on a vu que les fractions de grandeurs peuvent être ajoutées et soustraites. Peut-on calculer sur des fractions sans les associer à des grandeurs, autrement dit peut-on calculer seulement sur les mesures en ne tenant pas compte des grandeurs ? » La fraction devient alors ***un modèle de mesures de grandeurs***, quelle que soit la grandeur dont elle s'émancipe.

3. 4. Retour sur la dialectique système-modèle dans un processus de modélisation :

À l'occasion des opérations sur les fractions, la double signification des ostensifs, tels par exemple $u=\frac{1}{2}l$, dans un cas plus général $\frac{1}{b}l$, joue un rôle très important, développé ci-dessous.

Le travail sur les systèmes S_i, évoqué en 3.1., repose par exemple sur des manipulations de longueurs de bandes de papier. Les changements praxéologiques induits par des questions Q_i sur un système S_i permettent de créer un système S_{i+1} soutenu par de nouvelles questions. Cette imbrication autorise, à tout moment, à garder en mémoire les questions, techniques et technologies propres aux systèmes précédents, à se référer autant de fois que nécessaire à l'usage des longueurs des bandes de papier ; autrement dit à jouer sur la dialectique $\mathrm{S}_{i+1} - \mathrm{S}_i$.

Les ostensifs utilisés ou créés par les élèves, à partir des actions qu'ils ont effectuées, représentent alors autant de modèles porteurs de la mémoire des actions faites sur chacun des systèmes examinés et des réponses obtenues (Matheron, 2001) ; soit donc une dialectique modèle-système portée par les rapports construits aux systèmes S_{i+1} et S_i. L'écriture ostensive $u=\frac{1}{2}l$ dans le cas de cette partie du PER, porte en effet le souvenir d'une technique permettant de répondre à une question : dans le système S_i, les élèves ont dû plier la bande de longueur l en deux parties d'égales longueurs, notées u. Ce souvenir est évoqué de manière explicite un certain nombre de fois à partir d'exercices lors de moments didactiques de consolidation technique et d'extension de la portée de l'organisation mathématique (*cf.* Figure 6), mais il a une tendance pratique à s'évanouir dans le système S_{i+1}. Dans celui-ci en effet, $u=\frac{1}{2}l$ ne porte plus que le souvenir pratique de ce qui se fait, non avec une bande de papier, mais avec une longueur-unité. On retrouve ainsi la double valence propre à un ostensif : sémiotique et instrumentale. Dans, S_{i+1} à la sémioticité de $u=\frac{1}{2}l$ qui renvoyait dans S_i au pliage de la bande de longueur *l*, se substitue une nouvelle sémioticité, celle associée à la longueur-unité, tandis que son instrumentalité change : du report un nombre de fois d'une bande de papier dans S_i vers une mesure obtenue grâce à une longueur-unité dans S_{i+1}. Le processus de modélisation, à travers une dialectique système-modèle, induit une dialectique du souvenir et de l'oubli pour l'institution et ses sujets.

Par ailleurs, il faut souligner avec insistance la double valence sémiotique de l'ostensif . $u=\frac{1}{2}l$. D'une part, par analogie avec $l=2u$, il permet d'indiquer et de faire comprendre que la fraction $\frac{1}{2}$ représente la ***mesure*** de *u* si on choisit *l* ***comme unité,*** tout comme 2 est la mesure de *l* si on choisit *u* comme unité. D'autre part, l'ostensif indique aussi que *u* représente ***une fois le demi de l***. Autrement dit, l'écriture ostensive $u=\frac{1}{2}l$ signifie que la mesure est « un » si l'unité est « le demi de *l* » ; ce qui pourrait s'écrire : $u=1\times\frac{1}{2}l$.

Cette deuxième signification correspond mieux que la première au travail réalisé sur la bande de longueur *l* par les élèves. Il se trouve que cette nouvelle signification est apparue à la suite d'un changement du couple (tâche, technique) dans le système S_2. Dans des systèmes ultérieurs, ce changement permet de justifier tout à la fois les comparaisons de fractions de longueurs et les techniques utilisées afin d'effectuer des sommes ou différences de fractions de grandeurs. Ainsi, la mise au même dénominateur sera vue comme une conversion d'unité, et non plus comme un artifice dépourvu de signification, comme c'est trop souvent le cas dans les manuels scolaires.

Par exemple, la deuxième signification du modèle $u=\frac{1}{2}l$, soit plus généralement $u=\frac{1}{b}l$, devient fonctionnelle car elle permet de produire, comprendre et justifier, par remémoration ou évocation de l'écriture ostensive $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$, la technique de calcul de la somme : $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l=\frac{a+c}{b}l$. En effet, dans ce sens, l'écriture $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$ signifie que tout d'abord, dans $\frac{a}{b}l$, « on prend ***a fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ », puis qu'ensuite « on prend ***c fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ » ; comme « on » le faisait à l'école primaire pour le calcul du cardinal de deux collections. Autrement dit : $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l=a\times\frac{1}{b}l+c\times\frac{1}{b}l$. En s'appuyant sur cette technique antérieure, prémisse à l'institutionnalisation ultérieure d'une distributivité, il apparaît qu'il ne peut en être autrement pour $\frac{a}{b}l+\frac{c}{b}l$ que d'être égale à « ***a*** + ***c fois*** l'unité $\frac{1}{b}l$ » qui s'écrit $(a+c)\times\frac{c}{b}l$ ou encore $\frac{a+c}{b}l$.

L'exemple précédent montre que le modèle $u = \frac{1}{2} l$, obtenu à partir de S_2 et généralisé à $u = \frac{1}{b} l$, permet la création de savoirs nouveaux dans un système ultérieur. Il n'est pas que la réponse à une question Q_i, mais devient modèle qui permet à son tour l'obtention d'un autre modèle, sous la forme d'un nouvel ostensif : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Celui-ci devient réponse à une question cruciale adressée à un système ultérieur où l'on travaille sur des bandes de papier de longueurs différentes, mises bout à bout.

3. 5. Brève conclusion

Ce PER constitue une nouvelle proposition de mise en œuvre didactiquement contrôlée, en Collège, de la dialectique système-modèle à laquelle obéit la construction d'organisations mathématiques ; dans ce cas autour des fractions. Il est passé depuis 2021 dans plusieurs classes de membres du groupe didactique de l'IRES d'Aix-Marseille. Lorsque sa robustesse aura été attestée dans divers types d'établissements, par des professeurs non didacticiens auxquels il est enseigné en stage, le texte de ce PER sera disponible sur le site de l'IRES d'Aix-Marseille.

Références bibliographiques

Barquero, B. (2022). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire : les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes du 48e colloque COPIRELEM*. Toulouse 2022, 17-36.

Berthelot, R., et Salin, M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *19.1*, 77-124.

Brousseau, G. (1982). Les « effets » du « contrat didactique ». Document récupéré le 22 juin 2023 sur https://guy-brousseau.com/2315/les-%c2%ab-effets-%c2%bb-du-%c2%ab-contrat-didactique-%c2%bb-1982/.

Brousseau, N. et Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Université de Bordeaux I.

Chenevier, P. (1932). *Précis d'arithmétique*. Hachette

Chevallard, Y. (1985, éd. 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP n° 471*, 439-461. Document récupéré le 22 juin 2023 sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=110

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Document récupéré le 22 juin 2023 sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=205

Chevallard, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, Espagne : Horsori.

Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétude de la logique de la compétence en éducation, *Revue française de pédagogie*, n° 154, 97-110

ERMEL CM1 (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. Hatier.

Guérin, L. (2021). Analyse des techniques d'étude personnelles hors classe en mathématiques au collège. Etude didactique de deux cas, *Education & didactique, 15-3,* 27-45.

Johsua, S. (2002). La popularité pédagogique de la notion de compétence peut-elle se comprendre comme une réponse inadaptée à une difficulté didactique majeure ? In Dolz J. & Ollagnier E. (éds.), *L'énigme de la compétence en éducation*, De Boeck, 115-128.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Lemoigne, J-L. (1990). *La théorie du système général. Théorie de la modélisation*. PUF.

Matheron Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21.3,* 207-246.

Matheron, Y. et Méjani, F. (2022). Mudando o paradigma para o ensino da matemática: uma experiência em um sistema. In Saddo Ag Almoulou, Renato Borges Guerra, Luiz Marcio Santos Farias, Afonso Henriques e José Messildo Viana Nunes (Organizadores): *Percursos de Estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didáticao - Fundamentos teórico-metodológicos para a formação*. Editora CRV, vol. 1, 2022, 59-95.

Morin, E. (1977). *La méthode, tome 1. La nature de la nature*. Seuil.

Ramis, E., Deschamps, C., Odoux, J. (1993). *Mathématiques spéciales, Tome 1. Algèbre*. Masson.

Reinhardt, F. et Soeder, H. (1974, éd. 1997). *Atlas des mathématiques.* La Pochothèque. Librairie Générale Française.

Rouche, N. (1994). Qu'est qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères IREM*, *15*, 25-35.

Schneider-Gillot, M. (2006). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes, *Revue française de pédagogie*, n° 154, 85-96.

Verley, J.-L. (1997). Corps des fractions d'un anneau intègre. In *Dictionnaire des mathématiques. Algèbre, analyse, géométrie*. Albin Michel. 27-29.

Von Bertalanffy, L. (2012). *Théorie générale des systèmes*. Dunod.

La modélisation algébrique

Rendre les élèves producteurs de modélisations algébriques au sein du programme du cycle 4

Didier AUROY[22]
IRES d'Aix-Marseille

Laure GUÉRIN[23]
IREM de Clermont-Ferrand

Yves MATHERON[24]
IRES d'Aix-Marseille

Robert NOIRFALISE[25]
IREM de Clermont-Ferrand

Résumé. Les outils fournis par la recherche en didactique permettent de concevoir des propositions d'enseignement pour lesquelles les classes étudient à partir d'une recherche de réponses à une question génératrice de l'algèbre élémentaire. Elles se démarquent de la sorte des activités des manuels qui, le plus souvent, prennent la forme de questions enchaînées guidant les élèves vers des réponses attendues et de faible portée, ou que souffle en le cachant le professeur. Les groupes didactiques de nos deux structures, IRES d'Aix-Marseille et IREM de Clermont-Ferrand, ont pris le parti épistémologique de considérer l'algèbre du Collège comme modélisation de programmes de calculs et calculs sur les modèles obtenus. Nous présentons des extraits de nos propositions pour lesquelles les élèves sont engagés dans une activité de production de modèles aboutissant à quelques-unes de notions d'algèbre de ce niveau : écritures littérales, équations, nombres relatifs.

Mots-clés. Modélisation algébrique, programmes de calculs, parcours d'étude et de recherche.

Abstract. The tools provided by didactic research make it possible to design teaching proposals in which classes study on the basis of a search for answers to a generative question in elementary algebra. In this way, they stand out from textbook activities, which more often than not take the form of linked questions guiding pupils towards expected answers of limited scope, or which the teacher blows away by hiding them. The didactic groups of our two structures, the IRES of Aix-Marseille and the IREM of Clermont-Ferrand, have taken the epistemological approach of considering college algebra as a model of calculation programs and calculations on the models obtained. We present extracts from our proposals, in which students are engaged in an activity of model production, leading to some of the algebraic notions of this level: literal writing, equations, relative numbers.

Keywords. Algebraic modeling, calculation programs, study and research course.

Resumen. Las herramientas proporcionadas por la investigación didáctica permiten diseñar propuestas de enseñanza en las que las clases estudian a partir de la búsqueda de respuestas a una pregunta generativa en álgebra elemental. De este modo, se diferencian de las actividades de los libros de texto, que la mayoría de las veces adoptan la forma de preguntas enlazadas que guían a los alumnos hacia respuestas esperadas de alcance limitado, o que el profesor se carga ocultándolas. Los grupos didácticos de nuestras dos estructuras, el IRES de Aix-Marsella y el IREM de Clermont-Ferrand, han adoptado el enfoque epistemológico de

[22] didier.auroy@free.fr

[23] laurette.guerin@free.fr

[24] yves.matheron@free.fr

[25] robert.noirfalise@free.fr

considerar el álgebra universitaria como un modelo de programas de cálculo y de cálculos sobre los modelos obtenidos. Presentamos extractos de nuestras propuestas, en las que los alumnos participan en una actividad de producción de modelos, que conduce a algunas de las nociones algebraicas de este nivel: escritura literal, ecuaciones, números relativos.

Palabras clave. Modelización algebraica, programas de cálculo, recorrido de estudio e investigación.

Introduction

Le texte qui suit reprend et développe les grandes lignes du contenu de l'atelier animé lors de ce colloque par des représentants des groupes « Didactique » de l'IRES d'Aix-Marseille et de l'IREM de Clermont-Ferrand. Au-delà de ce qui les réunit depuis des décennies – colloques, universités et écoles d'été, programmes de recherche et développement, articles, thèses –, ces deux groupes produisent, en interaction étroite, des ingénieries de développement à partir des acquis de la recherche en didactique (Matheron & Noirfalise, 2011). En particulier, ces ingénieries utilisent les avancées régulièrement produites en théorie anthropologique du didactique (TAD), dans la continuation des résultats initiaux établis en théorie des situations didactiques (TSD). C'est dans ce sens que ces groupes ont décidé de réunir leurs deux propositions initiales en un atelier commun traitant de la formation à la modélisation algébrique au cycle 4. Lors du colloque, cet atelier s'est donc déroulé sur une durée double du temps réservé à un atelier simple.

Suivant la logique d'appui sur des avancées théoriques en didactique pour des ingénieries de développement qui, à leur tour, à partir de l'analyse de leur implantation dans un terrain de recherche, permettront d'interroger la théorie (Perrin-Glorian, 2011), notre contribution expose quelques-uns des éléments, tant mathématiques que didactiques, dont nous nous servons. Ils sont illustrés de trois exemples – les nombres relatifs, le début des écritures algébriques à l'aide de « patterns », les équations – et s'inscrivent dans un programme de développement de praxéologies[26] didactiques de modélisation (Schneider, 2011). Disposer au préalable de ces éléments mathématiques et didactiques apparaît indispensable pour des propositions d'enseignement qui dépassent les activités insatisfaisantes de manuels (*cf.* dans ces actes un exemple dans Auroy et Matheron[27]).

1. Le Schéma SFU : Structure / Fonctionnement / Utilité

Ce schéma a été proposé au cours de l'année 2022-2023 par Yves Chevallard dans le séminaire international qu'il anime. Elaborer un parcours d'étude et de recherche sur un domaine comme l'algèbre nécessite de s'interroger, au préalable et au minimum, sur les organisations mathématiques que les élèves vont pouvoir rencontrer : le schéma SFU est utile à cela. Le schéma SFU propose trois questions pour diriger l'interrogation :

Structure : quels sont les objets et les propriétés des objets du domaine ?

[26] Rappelons qu'une praxéologie, sous sa version élémentaire, est constituée d'un type de tâches, d'une technique pour l'accomplir, d'une technologie qui permet de produire, justifier et rendre compréhensible la technique, et d'une théorie qui remplit vis à vis de la technologie les mêmes fonctions que la technologie vis à vis de la technique. L'usage du terme de *pratique* ne désigne quant à lui que le seul couple constitué d'un type de tâches et de sa technique associée. Or une pratique ne vit que rarement sans ce qui la justifie : « on fait ainsi parce que… ».

[27] Plus précisément l'article « Enseigner les fractions en 6e à partir de modélisations au sein d'un travail sur les grandeurs »

Fonctionnement : comment peut-on manipuler les objets du domaine ?

Utilité : à quoi cela peut-il servir ? Quelles en sont les raisons d'être ?

1.1. Structure : les objets du domaine

Suivant les travaux pionniers sur le domaine de l'algèbre menés dès les prémisses de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1989), nous considérons l'algèbre élémentaire comme la science des programmes de calculs, de leur modélisation et des diverses praxéologies qui en découlent (calculs, variations, représentations, etc.). Les expressions algébriques sont alors vues comme des modèles de tels programmes qu'elles re-présentent ; c'est-à-dire qu'elles présentent de nouveau, sous une forme qui permet de les travailler, de les questionner et d'apporter des réponses que leur forme antérieure ne permettait pas ou permettait mal.

Les élèves du cycle 4 sont, depuis l'école primaire, familiers des calculs avec des nombres. Il s'agit que ces pratiques de calcul deviennent objets d'étude et de recherche. Pour la profession, se pose alors la question : ***« Comment introduire les élèves à l'étude réfléchie des programmes de calcul, à leur modélisation ? »***

Notons ici que le système à modéliser n'est pas extérieur aux personnes, dans ce cas aux élèves. Il s'agit de leur faire modéliser des pratiques, ou plus précisément des praxéologies institutionnelles sur des systèmes, à propos desquelles ces élèves ont été antérieurement engagés. Le calcul littéral apparaît alors comme résultant de modélisations de praxéologies rencontrées au sein d'un curriculum précédemment et personnellement vécu, et sur lesquelles il s'appuie.

En feuilletant certains manuels français anciens (publiés antérieurement à la réforme des mathématiques modernes, donc avant 1970), ou encore des manuels anglo-saxons, apparaissent des objets traditionnels du domaine algébrique au niveau du cursus correspondant à l'actuel cycle 4 : monômes, polynômes, calculs sur ces objets et, plus généralement, calculs sur les programmes de calculs, modélisations de situations évoquées aboutissant à des expressions algébriques données ou à construire.

1.2. Fonctionnement : Comment peut-on manipuler les objets du domaine ?

La réponse à cette question suppose que la personne qui manipule ait à sa disposition des outils pour le faire. Parmi ces outils, les expressions algébriques doivent, pour les élèves, tout d'abord apparaître de plus grande efficacité pour répondre à des questions, que le recours habituel au langage usuel, parlé ou écrit, ou encore que le recours à d'autres registres, graphiques ou gestuels par exemple ; l'utilisation de l'un de ces registres n'étant pas exclusive de celle des autres. Ces questions portent, par exemple, soit sur des objets initialement présentés sous forme discursive (cas de programmes de calcul proposés en langage courant parlé ou écrit), soit sous forme graphique (cas de suites de figures construites selon un principe de récurrence que l'on perçoit mais qui reste à expliciter). Il s'agit par exemple de calculer, de déterminer un nombre d'objets, etc., ce qui apparaît mal commode si l'on suit le type de registres sous lequel est posée la question.

Les élèves étant convaincus de l'efficacité du recours à des expressions algébriques pour répondre à des questions – en fait pour répondre à une question assez vaste déclinée en sous-questions, et que l'on appelle génératrice car elle génère des pans entiers de l'algèbre élémentaire –, ils sont à plusieurs reprises engagés dans des processus d'étude et de recherche. De nouvelles questions surgissent au cours de ce travail. On les qualifie de cruciales car ne pas y répondre compromettrait la suite du processus de recherche et la construction d'une réponse. Il devient alors nécessaire de produire des techniques inédites, en s'appuyant le plus souvent pour cela sur une extension des techniques et technologies arithmétiques auxquelles un rapport a été antérieurement établi : définitions des somme, différence, produit, propriétés des opérations dans N, Z ou Q. La construction, et notamment la maîtrise de ces techniques, par exemple pour développer, factoriser, réduire, demandent du temps et des entraînements… Et cela, sans perdre de vue que la construction des techniques et leur usage sont dirigés par le but à atteindre, par ce qu'on veut en faire : résoudre une équation, démontrer l'équivalence de programmes de calculs, formuler une relation fonctionnelle entre deux grandeurs…

1.3. Les raisons d'être : A quoi cela peut-il servir ?

L'algèbre élémentaire et son calcul littéral répondent à de multiples usages qui perdurent au-delà du cycle 4 :

Etude des propriétés des opérations et extension des systèmes de nombres.

Résolution d'équations, d'inéquations, de systèmes d'équations et d'inéquations.

Etude fonctionnelle des co-variations de grandeurs à l'occasion de l'étude des variations de fonctions. Au cycle 4, l'introduction des fonctions linéaires et affines permet aussi de revisiter la proportionnalité.

En géométrie les élèves ont à utiliser des formules exprimées de façon littérale : périmètres, aires, volumes par exemple. Selon les époques, ils ont pu rencontrer, dans les dernières classes du Collège, la contribution due à Descartes d'algébrisation de la géométrie. Les programmes de calcul de géométrie analytique de ce niveau permettent de démontrer quelques propriétés : parallélisme, intersection, propriétés de polygones particuliers à partir de calculs de distances, etc.

Sans qu'elle soit complétement oubliée, la question de la production de formules semble peu mise en lumière dans les programmes de ces dernières décennies. Lagrange (1808) écrivait, pour en vanter les mérites, et ce qu'on peut en lire comme étant la question génératrice de l'algèbre, en un temps où il convenait de distinguer l'algèbre de l'arithmétique (Lagrange est mort en 1813) :

*[…] son objet n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais **le système d'opérations*** [souligné par nous] *à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème. Le tableau de ces opérations représentées par les caractères algébriques est ce qu'on nomme en Algèbre **une formule*** [idem] *; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de manière qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit alors qu'elle est **une fonction*** [idem] *de ces mêmes quantités*.

Pour donner une place plus importante et surtout plus manifeste à la production de formules comme l'une des raisons d'être majeure de l'algèbre, nous développons en annexe quelques arguments en faveur d'un usage de paramètres. Pour cela il est nécessaire de trouver des situations conduisant à l'obtention de formules. Nous évoquons deux pistes : l'algébrisation de problèmes arithmétiques, et la recherche d'usage de formules dans des secteurs professionnels.

2. Nécessité d'une organisation mathématique de référence pour des activités et parcours d'étude et de recherche (PER) dans le système

2.1. Utilisation des éléments structure (S) et utilité (U) du schéma SFU pour un PER sur l'algèbre élémentaire

Depuis de nombreuses années, le groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille, désormais IRES, construit des propositions d'enseignement pour l'algèbre élémentaire au cycle 4, les fait passer dans les classes, les observe et analyse. Elles portent la volonté d'enseigner ce domaine, de la classe de 5^e^ à celle de 3^e^, à partir de la dévolution aux élèves, et ***sous la direction du professeur,*** de la recherche de questions auxquelles l'algèbre du cycle répond. De telles activités sont organisées dans une succession cohérente de questions génératrices ou cruciales. Elles constituent un parcours d'étude et de recherche qui répond à la question posée dans le paragraphe 1.1. de ce texte : « Comment introduire les élèves à l'étude réfléchie des programmes de calcul, à leur modélisation ? »

Pour se faire une idée plus précise d'un parcours pour l'algèbre qui obéit au schéma SFU, le lecteur intéressé pourra se reporter à Matheron (2018-2019). Nous donnons cependant ci-dessous quelques-unes des questions génératrices renvoyant à la structure S des objets du domaine et à leurs raisons d'être U. La construction du fonctionnement F de ces objets, dévolue aux élèves au sein d'un processus de modélisation une fois qu'ils ont éprouvé cette nécessité, est exposée plus loin dans le texte sur quelques exemples : entiers relatifs, écritures littérales, équations.

Une des premières questions, génératrice du domaine, est la suivante : « pourquoi et comment modéliser des programmes de calcul ? » Elle est reprise en plusieurs fois au cours du parcours et se décline à partir de situations différentes.

La réponse au « pourquoi » des diverses modélisations alimente de nombreux secteurs du domaine algébrique, notamment celui propre à l'étude des nombres relatifs et celui qui relève des écritures littérales (inconnues, variables, paramètres). La réponse au « comment » se trouve dans la dévolution aux élèves d'une situation porteuse ***d'une part*** d'adidacticité. Ce terme est défini en didactique comme le fait de dévoluer la responsabilité de la production de la réponse à des élèves interagissant avec un milieu dénué d'intentions ; le professeur n'intervenant pas sur le savoir. Au contraire, dans nos productions, le milieu dévolu aux élèves n'est plus exclusivement et continuellement interprété comme dénué d'intentions. Il est aussi constitué d'un certain nombre de médias qui, comme tout média, sont porteurs de l'intention d'informer. Les informations peuvent venir de personnes (élèves, professeurs, parents…), du cahier de cours, du manuel ou d'un ouvrage, de l'Internet, d'une figure ou d'un symbole mathématique, etc. Ce milieu, dont nous donnons un exemple dans la suite de ce texte, est désigné du nom de « milieu du schéma herbartien[28] » (Chevallard, 2011).

Ainsi, lorsque l'étude complète de la question est considérée hors de portée de la mobilisation des connaissances antérieures des élèves, mais ***pourvu qu'elle ait été travaillée par ces derniers***, le professeur peut décider d'intervenir comme un média : soit en fournissant la réponse, soit en proposant l'étude de nouvelles questions cruciales, soit en indiquant ou fournissant des médias qu'il estime pouvoir conduire vers une réponse

[28] Sur Johann Friedrich Herbart (1776-1841), pédagogue et philosophe allemand, on pourra se reporter à : https://fr.wikipedia.org/wiki/Johann_Friedrich_Herbart

(documents, manuel, Internet…). La situation comporte alors une part d'adidacticité, mais n'est pas purement adidactique dans le sens où le professeur ne se contenterait que de maintenir l'interaction des élèves avec le milieu, comme cela a pu être décrit en TSD (Brousseau, 1998).

Citons d'autres questions génératrices de secteurs du domaine qui, à partir de leurs raisons d'être (l'utilité U), conduisent à l'étude des objets du domaine (la structure S). Par exemple, les questions « Comment calculer sur des programmes de calcul ? Les rendre plus simples ? » et « Comment savoir si deux programmes de calcul sont équivalents ? » engendrent la nécessité de construire des techniques pour développer, réduire et ordonner des expressions polynomiales. Celles qui consistent à savoir si « Des programmes de calcul n'étant pas équivalents, peut-on trouver des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat ? Ou encore un résultat du premier supérieur (inférieur) à celui du second ? » engendrent la recherche de techniques canoniques pour la résolution d'équations du 1er degré ou s'y ramenant, ainsi que la résolution d'inéquations. « Comment varient ensemble deux programmes de calcul ? » engendre le champ des fonctions et de leurs variations.

2.2. Nécessité d'une organisation mathématique de référence (OMR)

Depuis l'ouvrage *La transposition didactique* (Chevallard, 1985 & éd. 1991), et les travaux menés à sa suite, on sait que ce que l'on désigne du terme de savoir, parmi un ensemble quasi-infini de praxéologies, ne relève pas d'un absolu intemporel et trans-institutionnel mais, au contraire, est propre à l'institution dans laquelle on le trouve et l'observe. Concevoir des parcours d'étude et de recherche en algèbre, pour qu'ils vivent au sein des classes du système secondaire, engage dans un processus de transposition didactique.

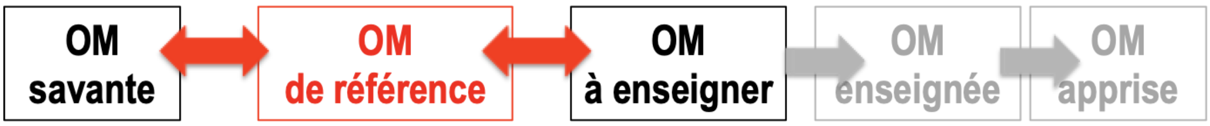
Si un tel processus pour l'algèbre élémentaire repose, comme pour d'autres domaines, sur l'utilisation préalable du schéma SFU, il recourt aussi à d'autres outils didactiques afin de porter et faire aboutir l'intention de rendre les élèves auteurs des mathématiques du domaine. Car pour être viable, c'est-à-dire pour pouvoir vivre dans le système standard des classes de mathématiques, il doit aussi tenir compte des conditions et contraintes propres à l'institution scolaire vers laquelle il est tourné.

En effet, y vivent d'ores et déjà et doivent être enseignés certains types d'organisations mathématiques. On peut recenser au moins deux grandes catégories de conditions et contraintes dont il faut tenir compte. Celles qui proviennent de la transposition didactique « déjà-là », résultant du programme et des médias utilisés (manuels et ressources diverses). Elles influent sur la nature des objets nouveaux à enseigner, sur ceux à ne pas enseigner, sur les appuis éventuels constitués des objets anciens définis par la progression ; par exemple qu'ont étudié les élèves sur les nombres et leurs opérations, quels problèmes « concrets » ont-ils résolus ? Et celles propres à l'organisation de l'école : nombre d'heures pour l'enseignement des mathématiques, formes didactiques en usage et habitudes professionnelles, contrats didactiques tournés tant vers l'institution que vers son extérieur, etc. Ces deux types de conditions et contraintes renvoient aux curriculums institutionnellement offerts et personnellement vécus par les élèves (Chevallard, 2021, Matheron & Méjani, 2021).

Une fois réalisée l'enquête sur le domaine *A* de l'algèbre, en suivant pour cela les entrées S et U du schéma SFU, se pose a priori une nouvelle série de questions pour la conception d'un enseignement bâti sur l'étude et la recherche. Parmi celles-ci, quel degré d'éloignement ou de proximité les éléments d'algèbre a*, produits ultérieurement par la classe en réponse à une question dévolue, entretiendront-ils avec les éléments d'algèbre A identifiés à partir de S et U ?

Dans la chaîne modélisant la transposition didactique, il devient alors nécessaire de travailler objectivement une nouvelle étape. Celle-ci reste le plus souvent invisible, implicite et subjective dans bien des transpositions didactiques actuelles en direction de l'institution scolaire ; une partie en fut visible lors de l'élaboration du programme de la réforme des mathématiques modernes.

Nous donnons ci-dessous un schéma qui montre la nécessité d'introduire l'étape de la définition d'une Organisation Mathématique de Référence A^* (OMR) dans la chaîne de la transposition didactique, pour un Parcours d'Etude et de Recherche tel que nous le concevons a priori.



A A^* a a^* a^{**}

Figure 1 : L'OM de référence dans la chaîne de la transposition didactique

L'Organisation Mathématique de Référence A^* (OMR) joue un rôle de vigilance épistémologique relativement au domaine A, tout en y intégrant les conditions de possibilité et les contraintes limitatives énoncées ci-dessus. L'OM de référence prend ainsi place entre l'enquête sur les éléments de A et la définition de ce que seront les éléments d'algèbre a à enseigner. Les doubles flèches indiquent les interactions réciproques entre d'une part OM de référence et OM savante, dans ce cas constituée des éléments de A et, d'autre part, entre OM de référence et OM à enseigner, c'est-à-dire, pour cette dernière, constitutive a priori de l'organisation mathématique a du PER. Les flèches concernant a, a^* et a^{**} deviennent doubles lorsque l'observation et l'analyse de a^* et a^{**} permettent, dans un second temps, lors d'une analyse a posteriori non mentionnée dans ce texte, de retoucher A^* et a.

Dans le cas général, au-delà du seul domaine de l'algèbre, l'OM de référence est constituée d'un ensemble de réponses, parfois partielles, à des questions telles que celles-ci : « que conserver des questions ayant engendré les réponses constitutives des éléments de l'OM savante et que conserver de celle-ci ? » ; « comment transformer sans dénaturer ? » ; « de quelles contraintes tenir compte, qui relèvent à la fois de la partie du curriculum à enseigner et du curriculum antérieurement offert aux élèves ? » ; etc. Pour chaque étape de la transposition didactique schématisée ci-dessus, vivent alors des organisations mathématiques différentes qui, entre elles, entretiennent des degrés de proximité et d'éloignement relatifs. Un exemple permet de l'illustrer.

2.3. L'exemple de l'organisation mathématique de référence pour les nombres relatifs

On sait qu'une construction algébrique formelle de Z consiste à symétriser N (Combes, 1998). On utilise pour cela une relation d'équivalence sur $N \times N$; ¿ est le groupe-quotient ainsi obtenu. Cette construction est un élément d'une organisation mathématique « savante » pour les entiers relatifs. Relations et classes d'équivalence, notions de groupe et de groupe-quotient, compatibilité d'opérations, ne sont pas des objets d'une transposition didactique pour l'actuel programme du cycle 4. Une question d'enseignement fondamentale, car de nature épistémologique, est pourtant celle de la proximité ou de l'éloignement de ce que l'on enseignera sur les entiers relatifs par rapport à une construction savante de Z.

Bien des activités des manuels l'ont résolue en recourant à l'analogie avec les températures, ou avec d'autres supports cognitifs imaginés et plus ou moins rigoureux (des jetons de couleur). Nous avons montré ailleurs les différents obstacles de nature épistémologique et didactique qui résultent de tels choix. La raison tient d'une part à une réalité mathématique : la grandeur évoquée n'obéit pas à l'axiome d'additivité d'une mesure, les températures de deux objets disjoints ne s'ajoutant pas. D'autre part, la métaphore devient obstacle didactique tournant à l'absurde à propos du produit de relatifs qu'il faudrait associer à… une température au carré !

Concevoir une proposition d'enseignement pour les entiers relatifs n'échappe pas aux questions de vigilance épistémologique et d'obstacle didactique. Dans le cas des entiers relatifs considérés comme une partie de l'algèbre élémentaire en tant que modélisation de programmes de calcul, la question à se poser est la suivante : « comment engendrer les entiers relatifs à partir de tels programmes de calcul, tout en conservant une compatibilité avec le curriculum actuel ? »

L'OM de référence permettant d'apporter réponse à ces questions, tout en assurant un contrôle sur l'organisation mathématique à enseigner, peut se décrire de la manière suivante. Elle part du programme de calcul consistant, à un nombre donné, à en ajouter un autre puis à en soustraire un second. Il se modélise simplement à l'aide de polynômes du 1er degré $P(x) = x + a - b$, où a et b sont des paramètres entiers qui deviendront variables didactiques dans le PER. Il en sera de même, dans un premier temps, pour la variable x des programmes de calcul dévolus aux élèves, afin que $P(x)$ soit toujours positif (on prend soin que l'on ait toujours $x \geq |a-b|$ lorsque $a < b$), car la soustraction d'un nombre plus grand à un autre est, à ce stade, considérée impossible.

L'entier positif est alors l'entier qu'il faut ajouter à x dans le cas où $a > b$; l'entier négatif est celui qu'il faut lui soustraire dans le cas où $a < b$. Il se trouve qu'un même nombre relatif est obtenu en donnant des valeurs différentes aux paramètres a et b. C'est une classe d'une relation d'équivalence. Celle-ci apparaît de la manière suivante : deux polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont équivalents si et seulement si quel que soit x : $P_1(x) = P_2(x)$. Soit $x + a - b = x + c - d$, ou encore $a - b = c - d$ qui donne $a + d = b + c$. C'est une relation d'équivalence pour symétriser N.

Ainsi, l'organisation mathématique à enseigner engagera-t-elle tout d'abord les élèves dans des calculs tels que 2023 + 35 – 36 ; 834 + 72 – 73, associés aux programmes de calcul « à un nombre, ajouter un second puis soustraire un troisième », afin qu'ils réalisent l'économie procurée en calculant non plus de gauche à droite, mais en commençant par la différence des deuxième et troisième nombres. Dans ces deux exemples, les calculs reviennent à soustraire 1, noté -1. On obtient ainsi + 35 – 36 = +72 – 73 = -1. On constatera qu'une infinité d'autres couples de nombres donnent -1. De même pour d'autres entiers relatifs que -1 qui sont traités comme des scalaires et non pas comme des mesures de grandeurs[29]. Pour télécharger le fichier complet du PER sur les relatifs proposé par l'IRES d'Aix-Marseille, utiliser le lien https://sciences.univ-amu.fr/fr/departements/ires#section-16914 où se trouve l'entrée « Parcours d'Etude et de Recherche sur l'enseignement des nombres relatifs au collège ».

3. Un exemple de processus de modélisation dévolu aux élèves

3.1. Illustration de la dialectique système-modèle : construire les entiers relatifs en 5e

On part du point de vue de Lebesgue dans l'introduction à *La mesure des grandeurs* (1975). Il explique que les premières praxéologies de comptage, celles issues de constations faites sur des « peuplades primitives », reposent sur la comparaison des collections « à une même collection type, la collection des mots d'une phrase. Ces mots sont appelés des *nombres*. […] Le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. » Lebesgue conclut, en italique dans le texte : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet*. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences […] »

Un nombre apparaît ainsi comme un modèle, un « compte rendu complet » d'un ensemble de praxéologies « expérimentales » ; elles sont désignées comme étant de dénombrement par des institutions, puis par la société. L'efficacité des résultats expérimentaux, comme les règles des quatre opérations qui modélisent certaines praxéologies, permet de se dispenser de recourir de nouveau à l'expérience.

Le passage de l'ouvrage de Lebesgue évoqué ci-dessus laisse voir non pas une seule modélisation, mais le début d'un ***processus continué*** de modélisations de praxéologies sur des systèmes. Le système premier, si tant est qu'il le soit, celui des praxéologies de comparaison des collections à la collection des mots d'une phrase, engendre un premier modèle : celui constitué par les nombres naturels. A son tour, le modèle des nombres devient système à propos duquel il devient plus économique de travailler les modèles de ses praxéologies : par exemple celles consistant à trouver le nombre issu du rassemblement de deux collections disjointes dont on connaît les nombres associés. On obtient ainsi un deuxième modèle : celui de l'addition. A leur tour, de nouvelles praxéologies sur le système des nombres aboutissent à d'autres modèles : les quatre opérations. On peut concevoir que, considérées ultérieurement comme des praxéologies de systèmes pouvant être modélisées, par exemple à partir de ce que permettent de travailler les propriétés, communes ou pas, des opérations, ces praxéologies fournissent des modèles d'un « niveau supérieur ». Par exemple, en poursuivant l'exemple, elles fournissent le modèle « supérieur » des structures algébriques, pour lequel des opérations deviennent des lois de composition interne sur des ensembles pouvant ne pas être numériques, munis d'opérations externes dépendant d'autres ensembles.

Une des questions fondamentales pour certaines des ingénieries didactiques basées sur l'étude par la recherche est la suivante : comment faire vivre auprès des élèves, dans des dispositifs d'ingénieries, la dialectique système-modèle, ***bâtie autour de praxéologies***, qui apparaît sur cet exemple comme étant propre au processus de construction des nombres ?

[29] Ce qu'indique l'expression « Les nombres relatifs : des nombres "au-delà de la mesure" », titre d'un des chapitres du document d'accompagnement « Les nombres au collège » de mars 2016, téléchargeable sur Eduscol.

Le schéma ci-dessous fournit la trame d'une réponse. Il évoque, sur l'exemple de la construction des relatifs dévolue aux élèves, le processus dialectique système-modèle issu du travail de l'organisation mathématique de référence (OMR) pour cette partie du PER sur l'algèbre au cycle 4. L'OMR a été décrite dans le paragraphe 2.3. et nous n'y revenons pas. Le schéma représente ce processus au soubassement de l'organisation mathématique du début du PER.

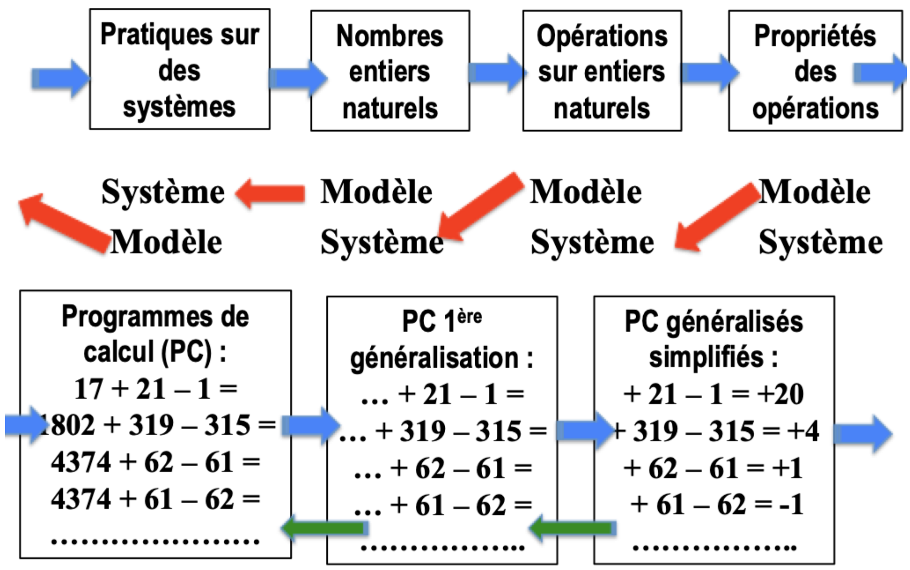


Figure 2 : Les entiers relatifs comme modèles à l'issue d'un processus dialectique système-modèle

Un schéma est toujours un modèle d'un système, et celui-ci n'échappe pas à cette caractéristique ! Il n'importe que quelques traits des systèmes de praxéologies qu'il modélise, beaucoup plus complexes dans la réalité qu'il évoque… Ainsi, la première ligne représente des grandes étapes du curriculum institutionnellement offert sur les nombres et leurs opérations, dans les classes du cursus qu'ont fréquentées les élèves avant l'entrée en 5e. Les rapports aux opérations, à leurs propriétés ou à la division euclidienne par exemple, restent, à ce stade, en cours d'élaboration.

La seconde ligne montre le processus dialectique système-modèle tel qu'il a pu, ou aurait pu, exister pour l'enseignement des différentes étapes du curriculum évoquées par la première ligne. Les flèches rouges, dirigées de droite à gauche, indiquent qu'un modèle donné provient du système antécédent. Il en est de même des flèches vertes de la dernière ligne.

Le schéma indique qu'un modèle, issu d'un système de praxéologies, devient à son tour un système de praxéologies qui, à l'issue d'un processus de modélisation, appellera un nouveau modèle, et ainsi de suite. Ainsi, reprenant l'exemple qui structure cette partie du texte, à l'origine de l'enseignement des nombres existent des praxéologies de dénombrement. Elles s'appuient elles-mêmes sur des praxéologies plus anciennes, sociales, rencontrées à l'intérieur ou hors du système scolaire, comme le comptage avec les doigts par exemple, et qui portent sur différents types de systèmes. Il s'agit par exemple des systèmes de praxéologies que l'on trouve dans les dispositifs didactiques en usage à la charnière de l'école maternelle et du cours préparatoire : travaux sur les gommettes, les dessins évoquant des objets, les bûchettes, les dés, etc., sur lesquels ou à partir desquels les élèves sont invités à agir, à contrôler et justifier leur action. Suivant l'entrée proposée par Lebesgue, le nombre apparaît ainsi comme « compte rendu complet » d'expériences, c'est-à-dire comme modèle des praxéologies accomplies sur les objets de ces systèmes. Le processus de modélisation de systèmes se poursuit, les modèles devenant à leur tour systèmes : les chiffres, les écritures de nombres, leurs décompositions additives en base 10, les opérations, etc., sont autant de résultats de modélisations de praxéologies sur les objets de ces systèmes.

La troisième ligne représente des éléments de l'organisation mathématique à enseigner à partir de l'intégration du processus système-modèle portant, au sein de l'organisation mathématique de référence, sur des polynômes du type $P(x) = x + a - b$. Le rapport antérieurement établi par les élèves aux calculs sur les entiers leur permet de s'engager dans les calculs proposés. Ils s'aperçoivent, dans un second temps, que le premier nombre sur lequel on ajoute puis soustrait importe peu. Les programmes de calcul revenant tous, en définitive, à ajouter ou soustraire un nombre au premier, quel qu'il soit, le résultat ne dépend que des deuxième et troisième nombres.

Ce résultat devient un élément technologique justifiant des techniques propres à ces calculs. Il en découle qu'on peut se dispenser d'écrire le premier nombre ; ce que modélise dans un premier temps l'écriture ostensive sous la forme des trois points de suspension. Puis, les points de suspension qui indiquaient un premier nombre dont on peut garder le souvenir – une possibilité de se souvenir qu'évoquent les flèches vertes –, disparaissent à leur tour pour des raisons d'économie. On aboutit ainsi à une nouvelle écriture, celle d'un nombre relatif comme modèle de l'ensemble des praxéologies de calcul aboutissant à ajouter ou soustraire un même nombre, par exemple +4 ou -1.

Dans notre proposition de PER, le processus qui vise à ce que les élèves considèrent les écritures du type +4 ou -1 comme celles de nombres, nécessite que les élèves agissent avec et sur elles comme on le fait avec des nombres : c'est-à-dire qu'on opère et qu'on compare. Autrement dit, en classe de 5^{e}, que les élèves construisent, sous la direction du professeur, une addition, une soustraction et un ordre sur les relatifs, compatibles avec l'addition, la soustraction et l'ordre sur les entiers et les décimaux positifs et qu'ils connaissent. Ce travail occupe environ une vingtaine de séances de 55 min, soit six à sept semaines, réparties sur l'année en plusieurs périodes. C'est le temps approximatif que consacrent les professeurs de ce niveau, et qui renouvellent chaque année avec succès cet enseignement : que ce soient les professeurs du groupe didactique ou ceux qui suivent notre proposition à l'issue des stages que nous animons.

3.2. La dialectique système-modèle

Evoquer modèle et modélisation suppose en préalable, et afin de ne pas parler dans le vide, que l'on en ait une définition. Nous la donnons à partir de la notion de système de praxéologies exemplifiée dans le paragraphe précédent. Dans le cas des mathématiques, un système de praxéologies est constitué d'un ensemble d'organisations mathématiques de divers types, comme on l'a vu dans l'exemple des nombres relatifs.

Un modèle est donc un système permettant d'obtenir, grâce à un changement de pratiques (ou plutôt de praxéologies) sur un changement d'objets, des informations sur le système de pratiques (praxéologies) antécédent qu'il modélise. Généralement, la modélisation s'accompagne d'un changement du système des objets (par exemple du système des symboles mathématiques) qui, en tant qu'outils, permettent de travailler le modèle et peuvent continuer d'évoquer certains éléments du système modélisé. Ainsi naît une dialectique système-modèle telle que celle qui a pu être décrite au niveau des organisations mathématiques sur l'exemple du paragraphe 3. 1.

Sur l'exemple précédent, une illustration de cette dialectique peut être donnée à partir du cas du symbole « – ». Dans un système initial comme ¿, il indique une soustraction, et donc la praxéologie qui lui est relative : associée à un type de tâches, au minimum une technique, son contrôle et sa justification. Puis dans les modèles qui suivront, le symbole « – » indiquera non plus un opérateur mais le signe d'un ***nombre*** relatif et les praxéologies qui sont attachées aux divers types de tâches dans lesquelles on rencontre ces nouveaux nombres : par exemple, comparer et opérer avec ces nombres. Ainsi dans le calcul de + 8 – 5, le signe « – » pourra être vu comme indiquant ***une soustraction*** dont le résultat se note 3, ou +3 si l'on sait identifier ces deux écritures. Mais dans un calcul comme + 8 – 15, si on voit le signe « – » comme une soustraction que l'on sait impossible dans le système constitué des praxéologies sur ¿, on pourra changer de point de vue, ou plus précisément de modèle, pour s'appuyer sur les praxéologies portant sur le modèle ***des programmes de calcul*** et donner le résultat. « A un nombre qu'on ne connaît pas, si on ajoute 8 puis on retranche 15, alors on lui retranche 7, que l'on note -7 », pourra dire un élève.

On voit, sur l'exemple du signe « – », que cette dialectique nécessite d'être prise en charge au niveau des organisations didactiques afin d'accompagner les élèves dans le passage récurrent du système au modèle. Autrement dit de les accompagner au sein d'un processus de modélisation dirigé par le professeur. On ne peut concevoir un tel accompagnement didactique a priori si, au préalable, une analyse mathématique de cette dialectique n'a pas été menée.

La définition proposée englobe la modélisation intra-mathématique si le système à modéliser relève de praxéologies mathématiques, et extra-mathématique selon la nature différente des praxéologies propres au système antécédent. La détermination du système antécédent provient, à l'origine, du découpage plus ou moins arbitraire du domaine de réalité praxéologique que l'on souhaite modéliser pour l'étudier : l'architecture d'une ville, les covariations de grandeurs, un système économique, etc.

Volontairement succincts dans ce texte, davantage de détails concernant le PER sur les nombres relatifs au collège peuvent être trouvés dans le fichier de l'IRES d'Aix-Marseille, téléchargeable à partir du lien indiqué au paragraphe 2.3.

4. Exemples issus d'un parcours d'étude et de recherche sur l'algèbre en classe de quatrième : modéliser à partir de problèmes de patterns

Le paragraphe suivant présente une partie du travail du groupe didactique de l'IREM de Clermont-Ferrand, en collaboration avec l'IRES d'Aix-Marseille, sur l'introduction en classe de 4^{e} des expressions algébriques comme modèles de programmes de calcul. Nous présentons une entrée fondée sur des problèmes de « patterns », à partir de la recherche de régularités dans des suites de motifs évolutifs. Le terme « pattern » est pris au sens du guide de « Résolution de problèmes mathématiques au collège » (MEN, 2021), tel qu'il le définit page 110 : « une suite d'objets appelés éléments reliés les uns aux autres par une règle spécifique. »

4.1. Description des deux tâches pour une même question génératrice

Deux tâches du même type, soit deux problèmes de patterns, sont proposées aux élèves en début de parcours. La première est composée d'une suite de petits carrés, dans lesquels trois carrés sont ajoutés à chaque rang. Dans la seconde, une maison supplémentaire, accolée aux autres, est bâtie à chaque nouvelle étape de la construction. La question génératrice commune à ces deux tâches est la suivante : « Peut-on déterminer le nombre de petits carrés (ou d'allumettes) à n'importe quelle étape de la suite de motifs ? Si oui, comment ? »

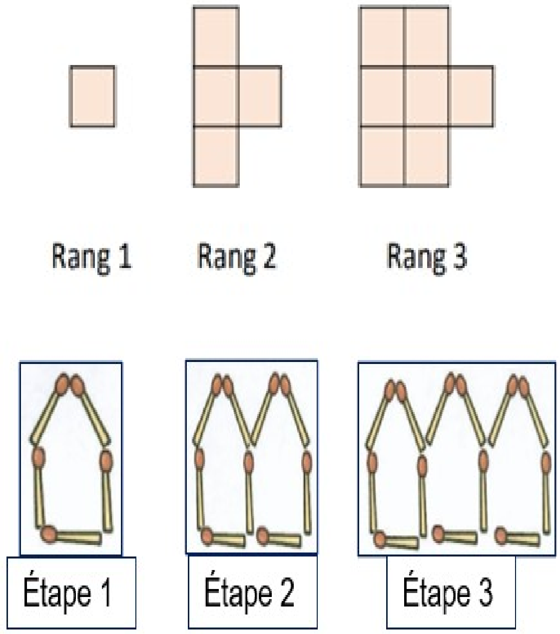


Figure 3 : Les supports, sous forme de patterns, pour deux tâches du même type

Notons que l'on n'engage pas seulement les élèves à chercher le résultat (le nombre de carrés ou d'allumettes), mais plutôt la technique de calcul qui y conduit. Il s'agit aussi de la décrire, c'est-à-dire de produire un premier discours technologique sur la technique, qui évoluera. En ce sens, il y a changement de contrat par rapport aux travaux numériques habituellement donnés. Il faut que les élèves produisent une ébauche de *système* de praxéologies qui permettent de compter les objets et décrire le système de comptage utilisé. Deux modélisations apparaîtront au cours d'un processus évolutif. Tout d'abord des programmes de calcul rédigés le plus souvent en français, qui modélisent la suite de motifs. Puis ces programmes de calcul sont à leur tour modélisés par des expressions algébriques.

Dans un premier temps, les élèves sont amenés à trouver individuellement le nombre de carrés (tâche 1) ou le nombre d'allumettes (tâche 2) pour un rang proche (rang 4 ou 5). Pour répondre à cette question, les élèves peuvent effectivement dessiner le motif à l'étape 4 à partir de ce qu'ils pensent être le prolongement des motifs et ainsi compter, une à une, les allumettes ou, un à un, les petits carrés. Dès le début de l'activité, il n'est pas rare qu'une deuxième technique apparaisse : celle qui consiste à ajouter trois carrés au nombre de carrés du rang 3 ou d'ajouter quatre allumettes au nombre d'allumettes de l'étape 3. Les erreurs sont écartées dans la classe en comptant les éléments. À ce stade, on peut aisément éliminer les dessins erronés, pour des élèves qui n'auraient pas compris la régularité implicitement suggérée. Cette entrée en matière permet de s'assurer que tous les élèves disposent, dans le milieu, des données suivantes :

pour les deux tâches, on compte, non pas le nombre de maisons, mais bien le nombre de petits carrés ou le nombre d'allumettes, pour la tâche 2, on compte le nombre d'allumettes correspondant au numéro de l'étape, et à chaque étape on construit une maison supplémentaire.

La suite est réalisée sous la forme d'un travail de groupes où, dans un deuxième temps, on demande aux élèves de trouver le nombre de petits carrés ou d'allumettes d'un rang plus lointain (rang 432 ou 123), puis, dans un troisième temps, de déterminer le nombre d'éléments du motif à n'importe quelle étape. Il est alors impossible de compter un à un le nombre d'éléments, comme on a pu le faire à l'étape 4, le rang étant trop grand et le motif difficilement représentable. Lors des passations, on a pu observer que les élèves de 4e s'engagent facilement et rapidement dans des techniques de comptage, souvent différentes d'un groupe à l'autre.

4.2. Réponses des élèves

Les groupes sollicitent en effet des rapports à des œuvres mathématiques différentes, antérieurement étudiées, et produisent des réponses à partir de ce que leur indiquent les ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) contenus dans la suite des motifs. Par exemple, certains dessinent en couleur des éléments dans le motif, montrant ainsi à chaque étape l'ajout de 3 carrés ou de 4 allumettes au motif précédemment dessiné.

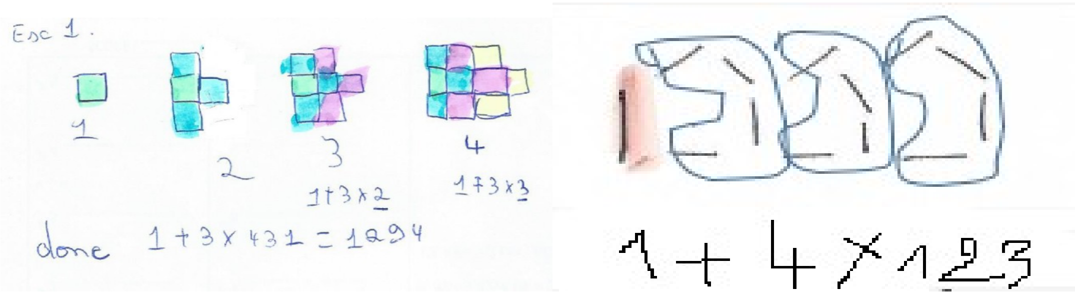


Figure 4 : Utilisation de divers ostensifs (couleur, regroupement) pour produire une technique

Pour la tâche 1, à gauche, les écritures des calculs indiquent ce qui est de l'ordre du « constant » et ce qui évolue : les nombres 2 et 3 sont soulignés, correspondant au rang de l'étape moins 1.

Pour cette technique de comptage, et depuis des parties de leur curriculum personnellement vécu, les élèves sollicitent des rapports anciennement établis envers la multiplication comme addition itérée. Cela leur permet de conclure qu'à chaque étape on a 4 allumettes de plus, et par suite, à l'étape 123, 123 fois 4 allumettes à ajouter. De manière tout à fait similaire, un autre groupe compte 5 allumettes pour la première maison, puis un ajout de 4 allumettes à chaque étape.

Dans une autre production, les élèves distinguent le nombre d'allumettes constituant « le toit », de celles horizontales (« sol ») et de celles verticales (nombre de « cloisons »).

Figure 5 : Autre technique de comptage et commentaire écrit associé

D'autres groupes recourent à un tableau de valeurs pour conclure à l'écriture rhétorique d'un programme de calcul. Si le tableau peut parfois déclencher de manière quasi-automatique des techniques liées à la proportionnalité erronées dans ce cas, comme on a pu l'observer parfois, cela ne l'a pas été pour ce groupe. Deux opérations sont indiquées : « multiplier par 4, ajouter 1 ».

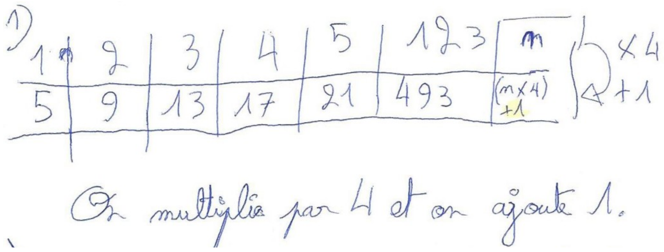


Figure 6 : Technique recourant à l'ostensif « tableau »

Des élèves peuvent aussi reformer des cloisons en déplaçant l'allumette formant le « sol » pour bâtir des maisonnettes de 4 allumettes, ce qui amène aussi à l'expression algébrique $4 \times n + 1$.

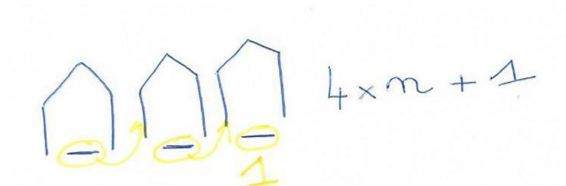


Figure 7 : Une autre technique aboutissant à une écriture littérale

Les réponses des groupes ainsi produites sont données sous différentes formes, sans nécessairement avoir recours à la lettre. Il peut s'agir : d'une suite d'instructions formulées en langage naturel, sous forme rhétorique ; d'un calcul générique ; d'un tableau ; d'une forme proche des expressions algébriques comme « *nombre de maisons* × 4 + 1 ».

Quelle que soit la façon de compter, les programmes de calcul, tous différents mais tous équivalents, apparaissent comme des outils techniques pour résoudre le problème. Les questions du choix des expressions algébriques, et du choix de la lettre pour modéliser ces programmes de calcul, se posent alors de manière prégnante dans la classe. Lors d'une mise en commun suivie d'un bilan, le professeur organise la mise en forme, mène un travail sur les lettres à partir de l'usage qu'ont commencé à en faire certains groupes, et promeut l'utilisation d'expressions algébriques. En effet, pour les élèves qui l'ont éprouvée, elles réalisent une écriture plus synthétique d'un programme de calcul écrit auparavant de manière rhétorique. Elles constituent aussi un média qui fournit l'information cruciale : « comment calculer le nombre d'allumettes ou le nombre de petits carrés, à n'importe quelle étape ». Elles synthétisent et indiquent, de manière condensée, le programme de calcul à exécuter. De surcroît, à travers l'économie qu'elles représentent pour des manipulations algébriques (développer, ordonner, réduire) que l'on fera par la suite, elles fourniront une nouvelle justification de l'avantage qu'il y a à utiliser des expressions algébriques plutôt que d'autres formes, rhétoriques par exemple. Elles apparaissent ainsi comme un aboutissement du processus de modélisation : la modélisation des suites de motifs par les programmes de calcul, puis la modélisation algébrique des programmes de calcul. Le modèle algébrique fournit une réponse économique pour les praxéologies de calcul du système antérieur.

4.3 Des conditions nécessaires

Toutefois il est nécessaire que certaines conditions relatives au contrat didactique soient remplies pour que les élèves s'engagent dans le processus de modélisation. Laisser les calculs aux différentes étapes sans les effectuer constitue une rupture franche avec les praxéologies attendues dans le domaine arithmétique. Les élèves doivent aussi faire le lien entre une opération et certaines grandeurs. Par exemple, le nombre d'allumettes constituant le « sol » est égal au numéro de l'étape, ou encore le nombre d'allumettes verticales est égal au numéro d'étape plus 1. Ils doivent aussi s'autoriser à déconstruire les motifs : déplacer des allumettes, rajouter ou enlever des petits carrés afin de mettre en évidence des ébauches de technique de comptage. Enfin, le temps de recherche laissé aux élèves doit être suffisant afin de ne pas « tuer dans l'œuf » le processus de modélisation.

L'observation des classes engagées dans ces tâches du même type montre qu'il est possible de dévoluer aux élèves un processus de modélisation, sans que ce soit l'apanage exclusif du professeur. La richesse des techniques induites chez les élèves par la perception des motifs aboutit à diverses expressions algébriques, certes équivalentes, mais écrites sous des formes différentes. Ce constat permet de poser la question de l'équivalence des expressions trouvées.

4.4 Poursuite du parcours ; équivalence des expressions algébriques

Les élèves poursuivent leur travail par la production d'autres expressions algébriques à partir d'autres problèmes de patterns analogues à ceux présentés. Ces problèmes ont été choisis au sein d'une progression raisonnée : d'abord des situations amenant à un polynôme du premier degré puis celles mobilisant un polynôme du second degré.

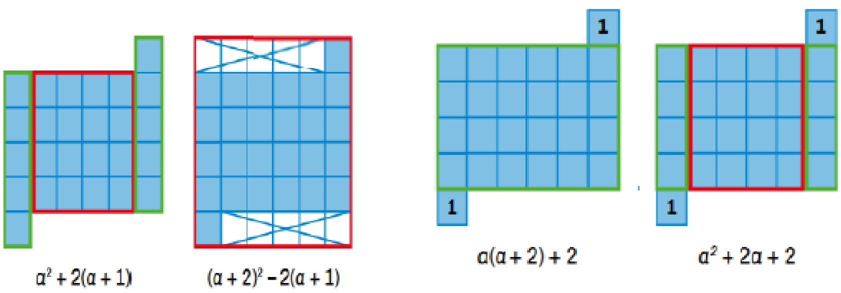


Figure 8 : Pattern pour une modélisation à l'aide de polynômes du second degré

Cette série de tâches du même type permet, d'une part, de mettre en évidence les premières règles d'écritures algébriques, par exemple la commutativité et les écritures simplifiées $4 \times n = n \times 4 = 4n$ et, d'autre part, de classer les problèmes entre premier et second degrés à partir de leurs formes canoniques $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres avec $a \neq 0$.

Est-il si évident que la forme « $a(a + 2) + 2$ » soit du second degré ? On sait que l'équivalence avec la forme « $a^2 + 2a + 2$ » permet de répondre par l'affirmative. Une question cruciale peut alors être posée à la classe : « Si, dans chaque cas, on trouve des expressions algébriques différentes, peut-on affirmer qu'elles sont ou non équivalentes ? » La réponse est indéniablement positive disent au premier abord les élèves, puisqu'elles comptent la même collection d'éléments ! A ce stade, il devient nécessaire d'envisager une série de nouvelles questions : « Comment pourrait-on expliquer cette équivalence des expressions algébriques, sans faire appel à la suite de motifs et aux grandeurs ? » Il s'agit alors d'oublier les situations initiales sur les patterns et les praxéologies associées pour ne travailler que sur les équivalences des expressions algébriques ; autrement dit d'oublier les systèmes pour ne travailler que les modèles.

Les grandeurs sont alors volontairement mises en retrait afin que les expressions algébriques deviennent objet d'étude en soi. Des questions nouvelles sont amenées par le professeur : « En les définissant sur des ensembles de nombres plus vastes, comme les négatifs ou les réels, les expressions algébriques trouvées sont-elles toujours équivalentes ? » Question qui amène la suivante : « Les expressions algébriques définies sur d'autres nombres que des entiers, existent-elles dans la réalité ou s'agit-il d'une question purement formelle ? »

Une brève recherche des élèves hors classe, sur l'Internet, dans leurs cahiers de SVT ou de physique, permet de répondre par l'affirmative. Ils y trouvent divers exemples : des conversions d'unités de températures (°C en °F), des calculs de l'IMC (Indice de Masse Corporelle), des formules du cours de physique ($U = RI$), etc.

Remarquons que chaque fois que le doute s'installe chez les élèves (par exemple, $4x+3$ est-il égal ou non, à $7x$?), le professeur peut les amener à se référer aux patterns pour redonner du sens aux expressions algébriques. Autrement dit, existe toujours la possibilité de revenir au système depuis le modèle.

La question demeure d'amener les élèves à montrer l'équivalence d'expressions algébriques. Les collégiens utilisent souvent des règles de transformation d'expressions algébriques sans savoir ce qui les justifie, pourquoi elles « fonctionnent ». Elles sont alors décrites comme des « recettes » à appliquer : comment développer, comment réduire… et les propriétés mathématiques qui les justifient sont au mieux montrées par le professeur, rarement établies par les élèves à partir de situations qui les nécessitent. Un rapide retour sur l'organisation mathématique de référence indique que l'organisation mathématique du PER est constituée de l'anneau des polynômes restreint aux polynômes des premier et second degrés. Aussi apparaît-il important pour ce PER en 4e de rétablir et d'expliciter les technologies au fondement des transformations algébriques.

On revient alors à la situation des allumettes en changeant les termes du contrat didactique. La question devient la suivante : « On a trouvé différentes façons de calculer le nombre d'allumettes à l'étape 123. Pouvait-on prévoir que ces calculs donnent le même résultat sans calculer le résultat final ? » Parmi les expressions trouvées par la classe, ont été choisies par le professeur celles qui permettront de rencontrer par la suite les questions par lesquelles passent les calculs algébriques élémentaires : Comment développer ? Comment réduire ? Comment enlever des parenthèses autour d'une somme précédée d'un signe « moins » ? Et, par suite, toutes les tâches qui en découlent.

Dans chacun des cas, les élèves se doivent de justifier leurs transformations à l’aide d’une propriété rencontrée au début de l’année, lors de séances de calcul mental (calculer par exemple 14×8¿,et consignée sur une affiche. Pour plus de simplicité, les propriétés ont été numérotées. Par exemple la propriété *R6* représente la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition/soustraction et la règle *R1* la définition de la multiplication comme addition itérée. Les élèves sont amenés à écrire les propriétés algébriques correspondantes et à réaliser le même travail avec les expressions algébriques, comme le montrent les deux exemples suivants de productions d’élèves.

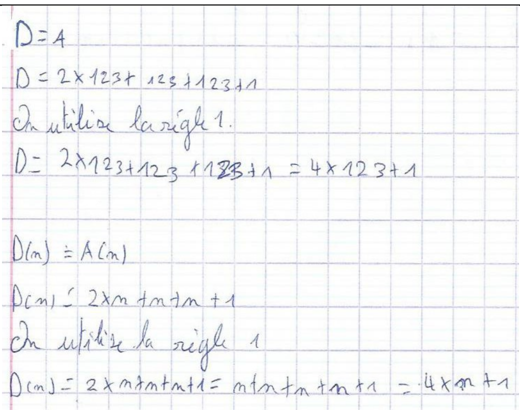
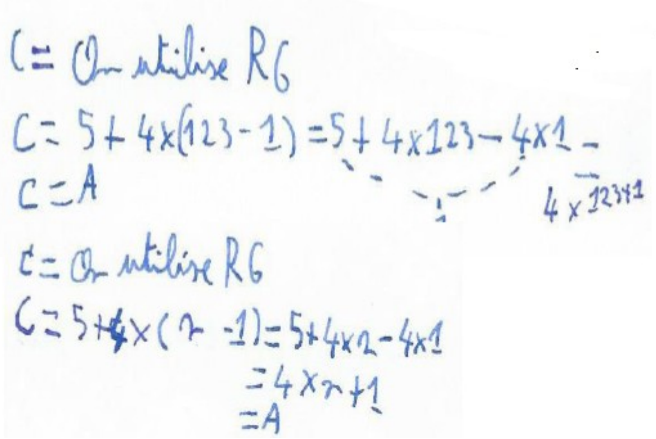
Réduction	Développement
 D=4 D = 2×123+123+123+1 On utilise la règle 1. D= 2×123+123+123+1 = 4×123+1 D(n) = A(n) D(n) = 2×n+n+n+1 On utilise la règle 1 D(n) = 2×n+n+n+1 = n+n+n+n+1 = 4×n+1	 C= On utilise R6 C= 5+4×(123−1) =5+4×123−4×1 − 4×123+1 C=A C= On utilise R6 C= 5+4×(n −1)= 5+4×n−4×1 =4×n+1 =A

Figure 9 : Justification des techniques de réduction et développement par recours aux technologies

4.5 Conclusion : la dialectique système-modèle

Ce parcours organise la mise à distance progressive du système des praxéologies initiales – sur la situation des allumettes et des carrés, sur des problèmes de patterns –, pour se pencher sur les informations recueillies à partir du modèle des expressions algébriques. Un retour sur le système est toujours possible pour vérifier certaines équivalences d’expressions algébriques : par exemple pour montrer que pour tout x, $2x + 1$ est différent de $2x + 1x$. Les propriétés des opérations sur les nombres servent d’appui pour construire « les règles » du calcul algébrique. On se réfère donc au système des calculs arithmétiques, tout en restant dans le modèle algébrique. Cependant, dans un calcul numérique on cherche en premier lieu l’opération prioritaire afin de l’effectuer. Dans un calcul algébrique on cherche la propriété, l’élément technologique, pour s’engager dans la technique : par exemple, est-on en présence d’une somme entre parenthèses multipliée par un facteur, afin de pouvoir utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition ?

Lorsqu’on pose la question de l’équivalence de deux programmes de calcul dans le système, le modèle algébrique, avec ses écritures littérales et leurs transformations, permet de conclure : la réponse produite dans le modèle s’applique au système. Les réponses obtenues à partir du travail sur le modèle sont valables sur tous les systèmes qu’il représente et donnent des informations sur les systèmes précédents. On retrouve en ce point une chaîne de systèmes qui modélisent d’autres systèmes, comme ce fut le cas pour les nombres relatifs dans le paragraphe 3.2. de ce texte.

5. Un processus de modélisation dévolu aux élèves : l'exemple des équations

5.1. Milieu dénué d'intentions et milieu du schéma herbartien : exemple

Ce paragraphe et le suivant se situent en prolongement des analyses menées sur la genèse du milieu du schéma herbartien par Farida Méjani dans sa thèse (2018). Le matériau empirique était constitué du PER « Un parcours d'étude et de recherche pour l'enseignement des équations du 1er degré en collège », téléchargeable à partir du lien https://sciences.univ-amu.fr/fr/departements/ires#section-16914. Il sert de nouveau de support pour ce paragraphe. On trouvera aussi des analyses utilisant le milieu du schéma herbartien dans la thèse de Laure Guérin (2020) sur le travail personnel des élèves ou dans Guérin (2021).

La question génératrice qui engendre l'organisation mathématique de référence pour ce PER est la suivante : « Si deux programmes de calcul ne sont pas équivalents, peut-on cependant trouver des valeurs pour lesquelles ils donnent le même résultat ? » Dans l'organisation mathématique à enseigner elle se décline selon trois tâches t_1, t_2, t_3 du même type T, bâties en modifiant un énoncé extrait du document *Du numérique au littéral* de la DGESCO.

La tâche t_1 est amenée par l'énoncé suivant : « Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice. Alice lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. Ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ? » L'équation associée à cette question peut s'écrire : $(x + 4) \times 7 = 2x + 13$ dont la solution est -3. En jouant sur les variables didactiques, les tâches t_2 et t_3, du même type, aboutissent pour t_2 à $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + 8x$ pour laquelle tout nombre est solution, et pour t_3 à $11x + 5 = 4x + 9$, dont la solution est $\frac{4}{7}$. Ce rationnel non décimal met en échec les techniques antérieures par tests d'entiers ou de décimaux. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux principes permettant la production par les élèves de deux modèles aboutissant à la résolution de ces tâches, en particulier à la résolution de t_3 qui conduit à la technique générale de résolution de $ax + b = cx + d$.

Les modèles obtenus par les élèves pour résoudre t_1 et t_2 sont identiques. On notera que t_2 se démarque de la question génératrice puisque les deux programmes de calcul sont équivalents ; ce qui est caché par l'expression des programmes de calcul, ce dont les élèves ne s'aperçoivent pas. Il s'agit qu'au-delà de la surprise provoquée, ils s'interrogent sur l'unicité de la solution trouvée pour t_1 et sur la fiabilité de la technique qu'ils utilisent pour t_1 et t_2. Nous indiquons ci-dessous le modèle didactique théorique sur lequel s'appuie cette partie du PER afin d'assurer la dévolution de la modélisation de la réponse.

La TSD fournit depuis ses origines une modélisation des situations didactiques et adidactiques en termes d'actions sur un milieu et de rétroactions de ce milieu. La finesse du grain d'observation des situations et des milieux a permis d'établir une théorisation du processus didactique en termes de « structuration du milieu ». Pour simplifier l'exposé qui suit, nous ne recourons pas dans ce texte à l'utilisation de ce modèle, ni à celui des moments didactiques proposé en TAD[30], bien que nous nous en servions pour concevoir nos propositions.

Un extrait de la définition large du milieu donnée en TSD pour les situations d'action, telle qu'elle figure dans le *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* de G. Brousseau (2003), énonce : « Dans une situation d'action, on appelle “milieu” tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit ». Ne considérer que l'action des élèves en situation, ***sous la direction du professeur***, suffit pour décrire l'essentiel des moments adidactiques de modélisation relatifs aux tâches t_1 et t_3.

La notion de milieu du schéma herbartien (Chevallard, 2011) relève d'une définition élargie du milieu. Il n'est plus interprété comme dénué d'intentions didactiques, mais joue aussi un rôle de média qui informe. Cette définition s'inscrit dans le cadre des systèmes didactiques où les sujets occupent des positions d'élèves et de professeurs autour de l'étude d'une question. Lorsqu'on souhaite lancer une classe dans une telle recherche, comme c'est le cas d'un PER, il faut *a priori* étudier de quoi sera fait le milieu sur lequel et grâce auquel les élèves agiront.

Le paragraphe précédent, sur la modélisation algébrique à partir de patterns, fournit un exemple. Le milieu est fait de réponses $R^{\lozenge}$ dites estampillées car, portées par divers types de médias (l'Internet, les cahiers, les manuels) ou des personnes qui jouent ce rôle (des propositions venant d'élèves), elles sont reçues comme telles, souvent non questionnées ; d'œuvres O sollicitées, faites de réponses à des questions considérées aidantes pour la question étudiée (dessiner, compter, calculer) ; de données D recueillies à partir du travail de la question initiale (on ajoute 3 ou 4 au motif précédent) ; de sous-questions Q qui adviennent au fur et à mesure de l'étude de la question principale (pourquoi des techniques ou des réponses différentes ?) L'ensemble des $R^{\lozenge}$, O, D et Q forme le milieu du schéma herbartien. Il se distingue de la notion de milieu donnée en TSD pour la situation adidactique comme étant dénué d'intentions didactiques et l'élargit.

5.2. Dialectique milieu-média, mémoire, modélisation sur l'exemple des équations

Revenant au PER sur les équations, remarquons que l'énoncé du type de tâches T contient, en tant que milieu dénué d'intentions didactiques, à la fois la question à laquelle répondre et, en tant que média qui porte une intention, une affirmation $R^{\lozenge}$ non questionnée : la réponse existe car Alice et Bertrand trouvent le même résultat.

Le milieu du schéma herbartien permet de décrire l'évolution du processus de modélisation sur l'exemple des équations. Pour t_1, une tentative immédiate de réponse des élèves passe par la convocation d'une œuvre O à propos de laquelle ils ont antérieurement établi un rapport, soit donc par la mobilisation de leur mémoire pratique (Matheron, 2001). Ils testent, à l'aide de différentes valeurs, les programmes de calcul d'Alice et Bertrand afin de trouver celle qui fournit le même résultat. L'observation montre que le choix des valeurs n'est pas organisé et ne concerne que des valeurs entières

[30] Le lecteur intéressé pourra, pour la structuration du milieu en TSD, se reporter à l'article « Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. » téléchargeable à l'adresse https://guy-brousseau.com/category/2travaux-classes-par-annees/annees-1986-a-1990/

Pour les moments didactiques, il pourra se reporter à l'article « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique » téléchargeable à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27.

positives ; ce qui conduit assez vite vers un constat d'échec puisque la réponse est -3. Le professeur propose, en tant que média et afin que le travail accompli ne soit pas perdu, de rassembler, malgré tout, les résultats obtenus. Ils deviennent des données *D* qui font maintenant partie du milieu ; celui-ci se modifie au cours de l'avancée du processus de recherche. Devant leur profusion désordonnée s'impose une nouvelle question *Q* : comment les présenter ? Une œuvre que les élèves ont antérieurement rencontrée fournit la réponse sous la forme d'un ostensif : un tableau. Son observation en tant que nouvel élément du milieu agit comme un média : les nombres rendus par les programmes de calcul d'Alice et Bertrand varient d'une manière intéressante. Ils croissent et « s'éloignent » les uns des autres au fur et à mesure que les nombres testés croissent. Ce n'est donc pas en utilisant des valeurs qui augmentent que l'on parviendra à la réponse, mais au contraire en testant sur des valeurs plus petites et décroissantes.

L'ordre sur *Z*, en tant qu'œuvre *O* dont on peut mobiliser le souvenir pratique, engage à recourir aux négatifs puisque la plus petite valeur positive testée et rejetée était 0. On continue donc à tester avec -1, -2 jusqu'à la réponse -3. Elle est validée car donnant le même résultat 7 pour chacun des programmes de calcul.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	…	-7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	…	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Figure 10 : Tableau des résultats obtenus à partir de tests de valeurs

Le travail mené en agissant sur et avec le milieu, et en interprétant les rétroactions obtenues, fournit la réponse sous forme de premier modèle technique pour t_1 et t_2 : un tableau de valeurs. Il constitue un modèle synthétique des praxéologies que l'on a mobilisées et qui s'appuient sur des œuvres antérieurement étudiées. Il en importe la mémoire, celle d'un savoir, et permet, à l'issue d'un petit travail technique de calculs, de lire la réponse recherchée. On rajoute à ce tableau une ligne montrant « l'écart » entre ce qui est lu par les calculatrices d'Alice et Bertrand : c'est un outil efficace indiquant, en tant que média, la voie vers la réponse.

Pour la résolution de t_2 et t_3, le principe du tableau ordonné des valeurs devient une nouvelle œuvre *O* que l'on va solliciter. Si pour t_2, la réponse fournie par *O* est immédiate et dérangeante – tout nombre est solution et « l'écart » est toujours nul –, *O* est fort utile pour t_3. Les données recueillies *D*, et organisées dans un tableau, indiquent assez rapidement que la solution n'est pas entière car comprise entre 0 et 1. Ce qui conduit vers une nouvelle question *Q* « peut-on accroître la précision ? », pour laquelle la réponse *R* trouvée consiste à subdiviser en dixièmes l'intervalle [0, 1]. Les données recueillies ne fournissent pas la réponse mais amènent une nouvelle question « comment accroître la précision ? » qui trouve sa réponse dans la proposition du professeur consistant à recourir au tableur.

A son tour le tableur, en tant que nouvel objet d'un milieu dénué d'intentions, devient un média donnant deux informations. D'une part, si les données *D* recueillies se rapprochent autant que l'on veut de la valeur décimale attendue, ce dont atteste un « écart » qui se rapproche autant qu'on le souhaite de 0, on ne parvient pas à trouver ce nombre. D'autre part, et devant cet échec, les formules que l'on a dû entrer dans le tableur nourrissent un certain degré de proximité avec des expressions algébriques en tant qu'œuvre *O* dont l'étude a débuté dans la classe de niveau précédent. Ces ostensifs évoquent le souvenir des praxéologies que l'on a précédemment travaillées. Elles conduisent à transformer les programmes de calcul en deux expressions algébriques : $11x + 5$ et $4x + 9$.

Une telle transformation suscite une question *Q*, cruciale, car elle s'inscrit naturellement dans la poursuite de la recherche. Elle est formulée par le professeur : « quand a-t-on l'égalité recherchée, c'est-à-dire l'égalité entre $11x + 5$ et $4x + 9$? » La réponse *R* est amenée par le travail antérieur sur les éléments d'organisations mathématiques consistant à rechercher le nombre rendant « l'écart » nul. Cette réponse *R* devient un élément technologique θ_1 précieux, et qui s'insérera dans l'organisation mathématique construite : « $11x + 5 = 4x + 9 \Leftrightarrow (11x + 5) - (4x + 9) = 0$ ». Les rapports antérieurement établis à l'œuvre *O* mobilisant les techniques de base du calcul algébrique ou, si ce n'est le cas, la nécessité de les étudier pour répondre à la nouvelle question surgissant du besoin de simplifier l'expression fournie par θ_1, conduit à l'écriture $7x - 4 = 0$. Rechercher x par test de valeurs est rapidement abandonné puisque cette technique a précédemment échoué. Une nouvelle question cruciale *Q* est posée par le professeur, si ce n'est plus maladroitement par les élèves : « que signifie le fait que la différence entre $7x$ et 4 est nulle ? » Question à laquelle des élèves répondent assez rapidement. Il suffit en effet de convoquer de nouveau θ_1 pour savoir qu'alors les expressions $7x$ et 4 sont égales et écrire la réponse *R* : $7x = 4$. La définition θ_2 du quotient de deux entiers, partie d'une œuvre *O* dont l'étude a débuté deux années auparavant, en classe de 6^e^, permet d'obtenir la réponse recherchée.

Le travail ainsi mené, ***sous la direction du professeur*** qui l'organise matériellement – ordonner les données, proposer le recours à la calculatrice et au tableur – et formule des questions qualifiées de cruciales, parce qu'elles s'imposent en raison à l'étape du processus de recherche dans lequel on est lancé, permet d'obtenir une modélisation de la résolution du problème porté par la tâche t_3. Le travail ultérieur de l'organisation mathématique sur d'autres tâches du même type aboutit au modèle général de résolution d'une équation du 1^er^ degré à une inconnue consigné sous la forme d'une écriture ostensive indiquant à la fois la technique et la technologie : $(ax + b = cx + d) \Leftrightarrow [(ax + b) - (cx + d) = 0)]$.

6. Brève conclusion

Brève, car travailler sur l'enseignement de, et la formation à, la modélisation, en algèbre comme sur d'autres domaines mathématiques, contribue à soulever à nouveau un voile sur le système éducatif et la manière dont les mathématiques y sont enseignées ; à partir de textes officiels et de manuels, donc dans les classes. La place accordée à ce texte manque pour développer l'analyse, renvoyée pour cela à d'autres travaux. On pourra, par exemple, se référer en annexe à l'absence des paramètres dans le curriculum, pourtant l'une des briques constitutives de l'algèbre (*cf.* Lagrange, 1808), dont l'enseignement fut rayé d'un trait de plume au tournant des années 1970-1980, et que la notion de programme de calcul permet de rétablir.

Les travaux que nous menons dans nos deux IREM montrent que l'algèbre peut être enseignée comme modèle du système formé par l'ensemble des praxéologies arithmétiques rencontrées par les élèves dans le curriculum antécédent : celui de l'école primaire et des premières classes du collège. Des praxéologies arithmétiques sur des systèmes de nombres deviennent objets d'étude : il est nécessaire de les modéliser afin de répondre à des questions. Le travail du modèle se mène avec de nouveaux ostensifs, en tant qu'instruments soumis à de nouvelles techniques de manipulation, afin de répondre aux questions émergeant de l'étude du modèle algébrique : formulations, équivalence, résolution d'équations-inéquations, variations, etc.

Références bibliographiques

Bosch, M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *19.1*, 77-124.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage éditions.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. DAEST, Université Bordeaux 2.

Chevallard, Y. (1985, éd. 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*. Publication n° 16 de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *In* C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81 – 108). La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (2021). La question curriculaire à la lumière de la TAD : défigement praxéologique et questionnement du monde. *In* H. Chaachoua et al. *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (p. 93 – 111). La Pensée Sauvage éditions.

Combes, F. (1998). *Algèbre et géométrie. CAPES. Agrégation. Licence. Maîtrise*. Bréal éditions.

Guérin, L. (2020). *Le travail personnel des collégiens en mathématiques hors classe. Une étude didactique.* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

Guérin, L. (2021). Analyse des techniques d'étude personnelles hors classe en mathématiques au collège. Etude didactique de deux cas, *Education & didactique, 15-3,* 27-45.

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Chez Courtier : Paris.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Matheron, Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21.3,* 207-246.

Matheron, Y. (2018-2019). Eléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4, *Petit x, 108,* p. 67-86

Matheron, Y., Méjani, F. (2021). Curriculums institutionnellement offerts, curriculums personnellement vécus : deux exemples. *In* H. Chaachoua et al. *Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (p. 315 – 333). La Pensée Sauvage éditions.

Matheron, Y., Noirfalise, R. (2011). Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire. *In* M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (p. 57 - 76). Barcelone : CRM.

Méjani, F. (2018). *Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré*. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. *In* C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 57 – 78). La Pensée Sauvage éditions.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? *In* C. Margolinas et al. (Éds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 175 – 205). La Pensée Sauvage éditions.

Annexe 1
Réintroduire des paramètres pour produire des formules

A propos de lettres que l'on peut trouver en usage dans le calcul littéral, on peut rencontrer les termes de variable, constante, inconnue, indéterminée ou encore paramètre. C'est l'usage, la fonction, qui détermine le statut de la lettre. Pour ce qui est du terme paramètre, nous trouvons par exemple, dans le Larousse : Définition de « paramètre » : « Elément en fonction duquel on explicite les caractéristiques essentielles d'un phénomène, d'une question : La pluie, l'obscurité, sont des paramètres dont il faut tenir compte » et « Nom donné à certains coefficients, à certaines quantités, autres que la variable ou l'inconnue, en fonction desquels on peut exprimer une proposition ou les solutions d'un problème ».

Pour argumenter en faveur de l'usage des paramètres, nous nous servirons d'un texte d'un ouvrage paru au début du siècle précédent. L'auteur du manuel est Gigot et son : « Traité d'algèbre élémentaire ; utilité de l'algèbre – emploi des lettres et des signes ».
Ci-dessous un extrait du manuel :

Problème : Trouver trois nombres dont la somme est 164, tels que le second surpasse le premier de 14 et que le troisième est la somme des deux premiers.

Solution 1 : *Le deuxième nombre est égal au premier augmenté de 14. Le troisième étant la somme des deux autres vaut le premier plus le premier augmenté de 14, c'est-à-dire deux fois le premier augmenté de 14. La somme de ces trois nombres se compose donc : 1° du premier nombre, 2° du premier augmenté de 14, 3° de deux fois le premier augmenté de 14. Ou de quatre fois le premier augmenté de 28. Si donc on retranche 28 de 164, le reste, 136, vaudra le quadruple du premier nombre ; le premier nombre est par conséquent 136/4 ou 34. D'où il résulte que le deuxième nombre est 34 plus 14 soit 48, et le troisième la somme des nombres 34 et 48 soit 82.*
Solution plus simple par l'emploi des signes : *La méthode précédente est longue et pénible ; elle se simplifie singulièrement lorsqu'on emploie des signes pour indiquer les opérations à faire. En effet, si on convient de séparer par le signe + les quantités qu'on ajoute entre elles, par le signe égal celles qui sont égales et si l'on représente le premier nombre par x on a tout de suite :*

Premier nombre $= x$
Deuxième nombre $= x + 14$
Troisième nombre $= x + x + 14$
Et par suite : $x + x + 14 + x + x + 14 = 164$
$4x + 28 = 164$
En retranchant 28 des deux membres de l'égalité, on obtient :
$4x=136$
D'où $x = 34$

Imperfection de la deuxième solution – Emploi de lettres dans l'énoncé du problème
La seconde méthode, déjà bien supérieure à la première, n'est cependant pas encore parfaite. Elle fournit un résultat isolé dont rien ne révèle l'origine ; les données ont disparu dans les réductions successives que l'on a faites pour découvrir l'inconnue et l'on est obligé de recommencer le même raisonnement pour résoudre tout autre problème analogue ne différant du premier que par les valeurs numériques données.

L'énoncé du problème prend alors la forme générale suivante :

Trouver trois nombres dont la somme soit S, tel que le deuxième surpasse le premier de a et tel que le troisième soit la somme des deux premiers.

Solution : - Si on représente le premier nombre par x on a :

Premier nombre = x

Deuxième nombre = x+a

Troisième nombre = x+x+a

Et par suite $x+x+a+x+x+a= S$

Ou $4x+2a=S$

En retranchant 2a dans les deux membres de l'égalité

$4x=S-2a$

Et en divisant par 4

$x=(S-2a)/4$

D'où l'on voit que le premier nombre est égal au quart de l'excès de la somme sur le double de la différence des deux premiers nombres

Cet extrait nous permet de revenir sur des raisons d'être du calcul algébrique :

La mise en formule, en remplaçant les données numériques par des paramètres, évite donc de « *recommencer le même raisonnement pour résoudre tout autre problème analogue* », une économie de pensée donc à mettre au crédit de l'usage de paramètres !

L'auteur souligne aussi la dimension ostensive de la formule : celle-ci montre la contribution au résultat des données du problème, la somme S et l'excès du deuxième sur le premier a.

$$x = (S – 2a)/4$$

D'où l'on voit que le premier est égal au quart de l'excès de la somme sur le double de la différence des deux premiers nombres.

Mais, car il y a un mais ! L'économie de pensée n'est ici que de l'ordre de la fiction. Pour qu'elle soit réelle, encore faudrait-il que le type de tâches proposé se reproduise avec diverses données numériques ! Trouver trois nombres dont la somme soit S, tel que le deuxième surpasse le premier de a et tel que le troisième soit la somme des deux premiers est un type de tâches anecdotique.

On peut cependant contourner cette difficulté en modifiant l'énoncé du problème de la manière suivante : **peut-on, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux données, trouver la valeur inconnue recherchée ?** L'obtention d'une formule procure alors une réponse à cette question ! Une piste à explorer ?

On pourrait donc algébriser les vieux problèmes arithmétiques en demandant de montrer que quelles que soient les valeurs numériques données, il est toujours possible de trouver la solution !

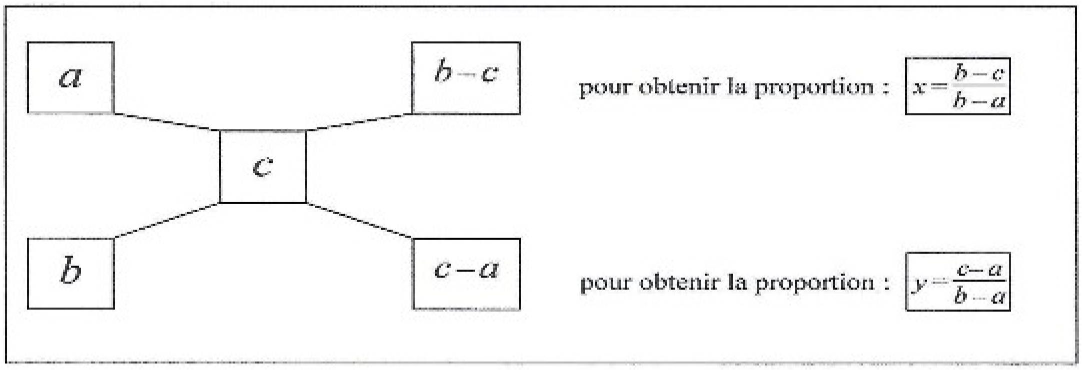
Une autre piste serait d'explorer celle des formations professionnelles dans lesquelles on peut rencontrer un usage de formules. Par exemple, dans la formation des soins infirmiers et dans le secteur agricole, les professionnels ont fréquemment des problèmes de mélange à résoudre. Nous donnons un exemple issu du milieu infirmier emprunté au document ressource sur la résolution de problèmes mathématiques au collège paru en décembre 2021 (site Eduscol) :

Une infirmière mélange une solution de 6% d'acide borique avec une solution de 12% d'acide borique. Combien lui faut-il de chaque solution pour avoir 4,5 litres de mélange à 8% ?

Nous donnons également un second exemple issu du monde agricole **:**
On souhaite obtenir un lait à 13g/L de matière grasse à partir de lait écrémé à 2g/L et de crème à 300g/L.
La formulation de ce type de problème se fait avec ce qui est appelé la croix des mélanges !

Notons x la proportion (en volume) de lait écrémé de concentration a, et y la proportion (en volume) de crème de concentration b, et c la concentration du lait que l'on souhaite obtenir.

On voit ici apparaître l'usage de paramètres, ce qui permet d'énoncer un résultat général :

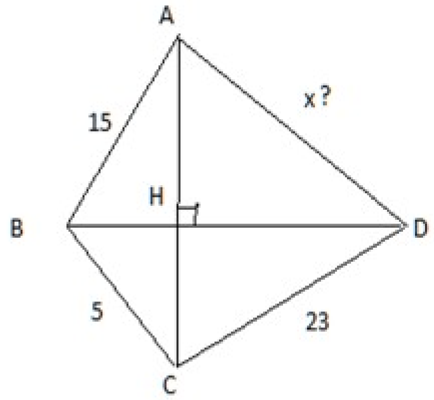


On peut aussi regarder l'usage que font nos collègues physiciens de formules avec des grandeurs quotients comme la vitesse en fonction de la distance et du temps pour ne citer que cet exemple.

Plus proche de notre discipline, la géométrie est aussi un gisement pour trouver des situations où l'on peut user de paramètres. Pensons à Pythagore, à Thalès.

Ci-dessous, un exemple rencontré au hasard d'une lecture d'un calendrier mathématique proposant chaque jour un petit problème : « Dans un quadrilatère ortho diagonal, les sommes des carrés des côtés opposés sont égales. »

Le fait de paramétrer le problème, ici avec la représentation classique des longueurs de côtés (AB, BC, CD et AD) permet d'avoir un résultat général, ce que ne fait pas apparaître une solution numérique !



$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$$

Modéliser avec des fonctions au collège. La bande de papier.

Catherine DESNAVRES[31]
IREM D'AQUITAINE

Marie GERVAIS[32]
IREM D'AQUITAINE

Résumé. Cet atelier présente le déroulement en classe d'une situation d'introduction du concept de fonction au collège, autour d'un problème intitulé « La bande qui se déroule ». Il s'agit d'une situation où la modélisation, très simple, est à la charge des élèves. Le problème choisi facilite l'entrée dans le mode de pensée fonctionnel de part l'aspect dynamique et visuel de la situation. De nombreux registres de représentation sont sollicités pour résoudre le problème, donnant ainsi du sens au concept de fonction. Trois fonctions sont rencontrées dans cette situation : une fonction affine, une fonction linéaire et une fonction ni affine, ni linéaire.
Mots-clés. modéliser, collège, cycle 4, fonction, affine, linéaire.
Abstract. This workshop presents the unfolding in class of a situation to introduce the concept of function in middle school, based on a problem entitled "The unrolling tape". It is a situation in which the modeling, which is very simple, is left to the students. The chosen problem facilitates entry into the functional mode of thinking due to the dynamic and visual aspect of the situation. Numerous registers of representation are called upon to solve the problem, giving meaning to the concept of function. Three functions are encountered in this situation: an affine function, a linear function and a function that is neither affine nor linear.
Keywords. model, middle school, function, affine, linear.
Resumen. Este taller presenta una situación de aula que introduce el concepto de función en la escuela media, a partir de un problema titulado "La cinta que se desenrolla". Se trata de una situación en la que la modelización, muy sencilla, se deja en manos de los alumnos. El aspecto dinámico y visual de la situación facilita la asimilación del pensamiento funcional. Para resolver el problema se utiliza una amplia gama de representaciones que dan sentido al concepto de función. En esta situación se encuentran tres funciones: una función afín, una función lineal y una función que no es ni afín ni lineal.
Palabras clave. modelo, escuela media, 3 ESO, función, afín, lineal.

Introduction

Les programmes français du collège mentionnent que les élèves doivent apprendre à modéliser des situations avec des fonctions en classe de 3ème (fin du cycle 4, 14-15 ans).

Les repères de progression (selon les programmes, ce que l'élève doit savoir faire en fin de troisième)[33] précisent :
- *Il [L'élève] modélise un phénomène continu par une fonction.*
- *Il modélise une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire.*
- *Il résout des problèmes modélisés par des fonctions en utilisant un ou plusieurs modes de représentation.*

Mais l'apprentissage ne commence pas là : le concept de fonction est à construire durant tout le cycle 4 (12-15 ans). On trouve déjà en 5ème (12-13 ans) et en 4ème (13-14 ans) dans

31 catherine.desnavres@gmail.com

32 mgervais@ac-bordeaux.fr

33 Attendus de fin d'année de 3ème p 17 https://eduscol.education.fr/document/37490/download

les attendus de fin d'année une partie intitulée « *Comprendre et utiliser la notion de fonction* ».[34] Il y est indiqué :

- pour la 5ème : *Il [L'élève] traduit la relation de dépendance entre deux grandeurs par un tableau de valeur, il produit une formule représentant la dépendance de deux grandeurs.*

- pour la 4ème : *Il [L'élève] produit une formule littérale représentant la dépendance de deux grandeurs. Il représente la dépendance de deux grandeurs par un graphique. Il utilise un graphique représentant la dépendance de deux grandeurs pour lire et interpréter différentes valeurs sur l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées.*

Les enseignants doivent donc mener de front la construction du concept de fonction, à travers différents registres de représentation (tableau de valeurs, graphique, formule algébrique...) mais aussi le registre formel via les notations et le vocabulaire associé (image, antécédent…) sans oublier la formation aux usages du numérique (tableurs, calculatrices…).
Le dernier exemple d'exercice donné dans les repères de progression de 3ème suggère que des situations où la tâche de modélisation est dévolue à l'élève doivent être proposées.
Un exemple est donné : *« On enlève quatre carrés identiques aux quatre coins d'un rectangle de 20 cm de longueur et 13 cm de largeur. Détermine la longueur du côté de ces carrés qui correspond à une aire restante de 208,16 cm², **par la méthode de ton choix**. »*
Un rapide regard dans les manuels de troisième nous permet d'identifier différents types de situations pour introduire la notion de fonction :
- Des activités qui présentent une fonction comme une machine qui transforme un nombre de départ en un autre nombre. Ces activités reprenant la définition ensembliste, donnent certes aux élèves une image de ce qu'est une fonction, mais ne renseignent en aucune façon sur l'utilité de cette notion pour résoudre des problèmes d'optimisation, de dépendance entre deux grandeurs, ...
- D'autres activités qui se composent de plusieurs courts exercices dans lesquels un ou deux registres de représentation d'une fonction sont mobilisés et où les notations et le vocabulaire sont introduits, sans que la résolution d'un problème soit demandée. Ces activités relèvent pour nous, davantage de l'entraînement que de l'introduction de la notion. Il peut être difficile pour les élèves d'y percevoir l'utilité du concept de fonction.
- Des activités dans lesquelles des fonctions sont utilisées pour résoudre des problèmes certes intéressants, mais difficiles (le volume de la boîte, l'aire de baignade, …)[35]. Dans ce cas, la modélisation de la situation est rarement laissée à la charge des élèves. On peut supposer que les auteurs la considèrent comme trop difficile pour des élèves débutants. Ces activités sont souvent constituées d'une liste de questions enchaînées dont les élèves ont du mal à comprendre les enjeux. L'utilisation de fonctions peut apparaître comme artificielle à leurs yeux. Ils ne voient pas l'utilité d'introduire un nouveau concept, faute de s'être posé eux-mêmes les questions pertinentes.
Comme l'affirment Job et Schneider (*Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?* À paraître dans les actes de ce colloque 2024), *modélisation et « résolution de problèmes » sont des activités fortement connectées. L'activité de modélisation vise à produire des modèles instrumentaux dans la résolution de problèmes.* Selon ce point de vue, nous proposons la découverte de la notion de

[34] https://eduscol.education.fr/document/37493/download pour la 4ème
https://eduscol.education.fr/document/37496/download pour la 5ème

[35] Ce seront d'excellentes situations à proposer à des élèves qui ont déjà fréquenté des fonctions. Ils pourront alors en prendre ne charge la modélisation.

fonction au travers de problèmes nécessitant l'usage de fonctions, pour lesquels la modélisation, très simple, pourra être dévolue aux élèves. Ainsi, la résolution du problème est gérée collectivement par la classe, sous la direction du professeur, à partir de questions que les élèves se posent eux-mêmes.
D'après R. Duval (1993) ce sont les liens entre les différents registres dans la résolution d'un même problème qui vont permettre l'acquisition du sens. En accord avec ces recherches, de nombreux registres de représentation interviennent au service de la résolution du problème. Le formalisme introduit par le professeur n'est pas porteur de sens en lui-même mais il intervient pour faciliter l'expression des calculs et des réponses trouvés par les élèves lors de la résolution du problème. Les notations et le vocabulaire relatifs au domaine des fonctions sont ainsi introduits dans une situation où ils prennent sens, comme formalisation du modèle utilisé pour résoudre le problème posé.
Dans ce texte, nous retranscrivons le déroulé de notre atelier en commençant par présenter les références sur lesquelles s'appuie notre travail puis en décrivant le déroulé d'une situation intitulée « La bande de papier » issue de la brochure « *Les fonctions du collège jusqu'en seconde* » Groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine 2012, et en parallèle nous reviendrons sur quelques points soulevés lors des échanges avec les participants.

1. Éclairage didactique

L'approche ensembliste de la notion de fonction est une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe. Cependant, l'analyse épistémologique conduit à poser que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable. Chez Leibniz (1646-1716), le mot "fonction" désigne une relation entre grandeurs dont les variations sont liées par une loi. Le fondement de la notion de fonction est l'étude des "lois de variations" de certains phénomènes et la recherche d'une modélisation de ces lois (Comin, 2005).

De plus, puisque dans les programmes du collège, seules les fonctions numériques de variables réelles sont abordées, nous nous limiterons à ces dernières. Nous choisissons de ne pas aborder la définition ensembliste qui bien qu'étant, selon nous, la définition la plus aboutie de la notion, ne permet pas aux élèves de comprendre l'idée de variation d'une grandeur en fonction d'une autre.

Dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle, entrer dans le mode de pensée fonctionnel implique de penser en termes de variations, ce qui a comme conséquence de donner aux lettres le statut de variables et d'intégrer de nouveaux registres de représentation (DUVAL 1993) pour rendre compte de ces variations :
• verbal : définition de la fonction en langage naturel,
• algébrique : expression littérale de la fonction,
• graphique : courbe représentative de la fonction,
• tableau : ensemble discret de valeurs,
• programmation : processus automatisé pour le calcul des images.

1.1. Fonction outil, fonction objet

Dans ses travaux, Douady(1986) met en avant la dialectique outil-objet qui contribue à donner du sens aux concepts mathématiques.
Deux facteurs contribuent au sens d'un concept :
- l'ensemble des questions où il est engagé (outil)
- l'ensemble des relations avec les autres concepts engagés dans ces mêmes questions (objet).

C'est la dialectique entre ces deux statuts, engendrée par des jeux de cadres au cours de la résolution de problèmes qui va permettre l'acquisition du concept.

Tout d'abord, la notion intervient dans les problèmes comme outil implicite, qui petit à petit devient explicite et permet de construire au fur et à mesure le statut d'objet de la notion qui à son tour redevient ancien outil dans un autre problème.

Une fonction peut être un outil pour résoudre des problèmes ou un objet d'étude pour elle-même.

Étudier les fonctions comme outils c'est les utiliser pour modéliser des situations fonctionnelles et répondre à des questions d'optimisation, de comparaison (tarif le plus avantageux), etc.

Étudier les fonctions comme objets c'est en étudier les propriétés mathématiques, par exemple en faisant des catégories (les fonctions croissantes, les fonctions linéaires, les fonctions continues, etc.).

1.2. Fonction processus, fonction structure

Sfard (1991) présente une autre dialectique dans la construction du concept de fonction. Une fonction peut être envisagée comme un processus ou comme une structure.

Dans un premier temps, l'élève peut rencontrer la conception d'une fonction comme un processus qui permet de trouver l'image quand on a la valeur de la variable (fonction outil implicite), ce processus s'exprimant dans plusieurs registres. Les activités de passage entre les différents registres devront être maîtrisées.

C'est un des objectifs du programme de fin de cycle 4 :

Il [L'élève]résout des problèmes modélisés par des fonctions en utilisant un ou plusieurs modes de représentation.

Dans un deuxième temps, ce processus pourra être identifié, généralisé et désigné par un nom.

Enfin, dans un troisième temps, l'objet fonction pourra se dégager du simple processus. Il sera alors intégré à une catégorie dont on peut étudier les propriétés (ex : fonction croissante) et dont on peut avoir des représentants (ex : fonction linéaire). La fonction est alors identifiée comme une structure que l'on reconnaît par sa représentation dans un des registres concernés.

Par exemple, une fonction linéaire est caractérisée par une formule algébrique de la forme

$f : x \mapsto f(x) = ax$.

Les fonctions engagées comme outil dans la résolution de problèmes acquièrent peu à peu un statut d'objet « procédural » à travers leurs différents registres de représentations avant de se constituer en objet « structural ». Certains registres peuvent favoriser l'aspect procédural, tableaux de valeurs, programmation, d'autres l'aspect structural, graphique, tableau de variation (qui n'est pas étudié au collège). La formule algébrique, selon la façon dont elle est vue par les élèves relève de l'un ou de l'autre de ces aspects. Comme traduction d'un programme de calcul, c'est l'aspect procédural qui est privilégié, comme formule algébrique, elle représente un statut structural.(Pihoué, 1997)

1.3. Rôle du professeur

Le rôle du professeur est crucial dans la gestion de la situation. Pour envisager ce rôle dans la mise en œuvre de la situation, nous nous appuyons sur les recherches de Guy Brousseau en mettant en avant différentes phases. Le professeur doit dévoluer la question qui permet de démarrer l'étude aux élèves, en suscitant leur curiosité mais il leur laisse la charge des modalités. C'est à lui d'aménager dans la situation les moments d'adidacticité, c'est-à-dire les moments où l'élève résout le problème sous sa seule responsabilité. Il relance l'activité des élèves en reformulant les réponses trouvées et les nouvelles

questions qui émergent au fur et à mesure de l'avancée du travail. C'est par ces échanges entre professeur et élèves, à différents moments cruciaux de l'étude du problème, que vont s'effectuer les changements de cadres de travail, à l'initiative des élèves. Il institutionnalise les notions découvertes durant l'activité au moment où elles sont utiles, à la fin de chaque étape, dans l'ordre où elles apparaissent dans la recherche du problème. C'est ainsi que, au fur et à mesure de l'avancée de la situation, l'objet fonction, en jeu dans le problème, implicite pour les élèves, va devenir explicite.
Maîtriser n'est pas synonyme d'imposer : pour cela, il faut faire confiance en la capacité des élèves à s'investir dans la résolution d'un problème. C'est la condition pour qu'ils se posent eux-mêmes les bonnes questions.
L'objectif de cet atelier est de montrer qu'il est possible de dévoluer la modélisation d'un problème à des élèves même débutants, pour introduire la notion de fonction et que cela favorise leur apprentissage car ils se posent eux-mêmes les questions pertinentes qui permettent l'émergence de l'outil dans différents registres de représentation. Le choix du problème à modéliser mais surtout la manière de gérer les interactions entre le professeur et les élèves sont importants. Le professeur doit avoir confiance, préserver des moments d'adidacticité, pour laisser les élèves prendre l'initiative. Le formalisme introduit par le professeur prend du sens relativement aux tâches effectuées par les élèves.

2. Le problème

2.1. Les objectifs de travail au collège

D'après les programmes, les objectifs à atteindre en fin du cycle 4 du collège sont :

- Faire prendre conscience des différents registres utilisés pour résoudre un même problème.
- Donner du sens à l'objet « fonction » au travers des différents registres.
- Mettre en place des passerelles pour passer d'un registre à l'autre.

L'objectif de la situation présentée dans cet atelier est de commencer à construire le statut d'objet de la notion de fonction par la résolution d'un problème où interviennent des fonctions comme outil. La situation permet de solliciter différents cadres de travail et registres de représentation, et de commencer à entrevoir les liens entre eux. La gestion de la situation par le professeur consiste à laisser les élèves proposer les cadres de travail.
La situation choisie est posée dans le cadre géométrique, les élèves se placent d'abord dans le cadre numérique pour effectuer des calculs de périmètres et d'aires. Puis ils suggèrent une représentation sous forme de tableau pour rassembler leurs résultats. Pour compléter le tableau, l'usage d'une formule apparaît utile et enfin le cadre graphique permet de conclure.
Le professeur relance la recherche, reformule les réponses obtenues, institutionnalise à chaque étape les nouvelles connaissances (notations, vocabulaire) afin de commencer à donner un statut d'objet à la notion de fonction.

2.2. Consigne pour les élèves

Le professeur a préparé une bande de papier de 3 cm de large, enroulée, qu'il déroule lentement devant les élèves, comme indiqué sur la figure ci-dessous, le cylindre de papier face à lui.
Il pose aux élèves la question : « Que voyez-vous lorsque je déroule la bande ? »
Puis dans un deuxième temps, il demande : « Qu'est ce qui reste fixe ? Qu'est ce qui varie ? »

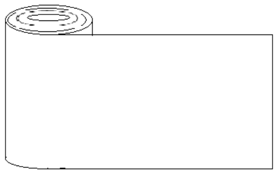


Figure 1 *: La bande de papier*

2.3. Choix du problème

Nous plaçant dans le cadre de la Théorie des Situations (Brousseau, 1998), nous avons choisi une situation où la notion de fonction va apparaître nécessaire pour rendre compte du grand nombre de rectangles possibles et de leurs variations, ainsi la variable considérée est continue.

Les grandeurs en jeu sont très faciles à identifier et les relations entre elles connues depuis longtemps par les élèves, au moins pour l'aire et le périmètre. La modélisation est très simple et peut donc être prise en charge par les élèves. Un contexte plus complexe peut créer des obstacles, susciter des interrogations sur les contraintes dues au problème réel, qui masqueraient le rôle des fonctions dans la résolution du problème mathématique.

Le principal objectif de la situation est la découverte du modèle fonctionnel et de ses registres de représentation. Ce modèle prend du sens par son efficacité à résoudre le problème posé.
La facilité de passage du problème réel au problème mathématique est au service de cet objectif. Elle permet une référence au problème réel, comme validation lors de la résolution du problème mathématique ou pour relancer les recherches.

2.4. Consigne pour les participants à l'atelier

Suite à la découverte de la situation par les participants, nous leur avons soumis les questions suivantes :
En quoi cette situation peut-elle amener à :
• rentrer dans la modélisation du problème par les fonctions ?
• mobiliser les différents registres de représentation des fonctions ?

Imaginez ce qui peut se passer avec les élèves.

Nous attendions des participants qu'ils proposent un déroulement de la situation en classe et surtout qu'ils imaginent quel serait le rôle du professeur. Nous faisions l'hypothèse qu'ils auraient tendance à vouloir guider l'étude en imposant les cadres de travail.

2.5. Premières réactions des participants

Les premières réactions des participants à l'atelier consistent à proposer aux élèves des valeurs à tester : quels sont l'aire et le périmètre pour telles valeurs ? L'aire ou le périmètre valent tant, quelle est la longueur de la bande ?
Ils pensent à proposer aux élèves de construire un tableau de valeurs ou d'utiliser la calculatrice pour tracer un graphique.
Nous verrons dans le déroulement de la situation tel que nous l'avons choisi, que ces interventions du professeur ne seront pas nécessaires.
Nous demandons aux participants de réfléchir à des questions que peuvent se poser les élèves et on se met d'accord sur la question qui va générer l'étude mathématique du problème : « comment varient les grandeurs en jeu ? ».
Nous verrons que cette question va aussi émerger avec les élèves, après identification des grandeurs en jeu en réponse aux questions du professeur : « que voyez-vous lorsque je déroule la bande ? » et « Qu'est ce qui reste fixe ? Qu'est ce qui varie ? »

3. Le déroulement dans la classe

Cette situation est régulièrement utilisée par les membres du groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine. Elle a été proposée de nombreuses fois et le déroulement que nous allons décrire est celui qui a été observé dans toutes les classes des différents établissements où elle a été testée.
C'est ainsi que procède notre groupe de travail. Avant de décrire une situation dans une brochure, nous la testons dans nos classes, puis nous la modifions, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à ce qu'elle présente une certaine stabilité dans son déroulement. C'est ce qui nous permet d'en faire une analyse approfondie et d'en proposer une gestion précise quasi « clé en main » aux participants de l'atelier.

3.1. Que voyez-vous au fur et à mesure que l'on déroule ?

Les élèves voient le cylindre de papier et un rectangle dont la longueur varie ou « plein de rectangles ».
Le professeur indique qu'on ne s'occupera pas du cylindre. Bien que cette question paraisse intéressante pour les adultes, nous avons fait le choix de ne pas nous en préoccuper avec les élèves. Les difficultés de modélisation ne correspondent pas à l'objectif fixé.
Une discussion s'engage rarement sur les rectangles :
- Est-ce que ce sont bien des rectangles ? largeur régulière de la bande, découpe de la bande bien perpendiculaire.
- Comment mesurer la longueur des rectangles ? On se met d'accord pour partir du « milieu » du cylindre.

Mais en général, la reconnaissance perceptive suffit. Si ces questions n'émergent pas des élèves, inutile de s'y attarder, ce n'est pas l'objectif principal de la situation. Mais cela permet aux élèves de s'approprier le modèle.

3.2. Qu'est ce qui est fixe ? Qu'est ce qui varie ?

Les élèves disent : la longueur, le périmètre, l'aire et la diagonale varient.
Le professeur indique que l'objectif est d'étudier les variations de ces grandeurs. Comment varient-elles ?
Les élèves disent que toutes ces grandeurs augmentent au fur et à mesure que la bande se déroule, en fonction de la longueur déroulée.
Le professeur relance en posant la question : comment ces grandeurs augmentent-elles ?

3.3. Choix de la variable

La discussion se poursuit sur le statut des différentes grandeurs les unes par rapport aux autres.

Pour étudier les variations de ces grandeurs, les élèves proposent de les calculer en choisissant des longueurs de bande. La longueur prend alors le statut particulier de variable indépendante.[36]

Le professeur peut commencer à introduire du vocabulaire sur les fonctions. La longueur, qui est la grandeur que l'on fait varier volontairement, s'appelle la variable. Les variations des autres grandeurs dépendent des valeurs choisies pour la variable.
Si ce n'est pas la première situation sur les fonctions, des élèves proposent par eux-mêmes d'utiliser des fonctions ; il faut alors préciser le choix de la variable. Le professeur demande ensuite ce qu'ils peuvent faire pour étudier les variations de ces

[36] Une **variable indépendante** est la variable qui est modifiée ou contrôlée dans le cadre d'une expérience scientifique afin de tester les effets sur la **variable dépendante.** (Data Science)

grandeurs grâce à ces fonctions : ils parlent dans ce cas de calculs d'images, de tableaux et de graphiques.

3.4. Premiers calculs

Les élèves calculent l'aire, le périmètre, dans plusieurs cas, deux ou trois maximum chacun, souvent des longueurs entières et souvent les mêmes. Ils font les calculs séparément, mais même après une mise en commun des résultats, ils constatent que cela ne suffit pas pour conclure sur les variations. Le professeur incite les élèves à choisir d'autres longueurs.

3.5. Vers le tableau de valeurs

Comment utiliser tous ces résultats de façon à pouvoir les comparer facilement ?
Des élèves proposent de les ranger dans un tableau. Une discussion s'engage sur la forme à adopter pour le tableau. Les élèves proposent de mettre la longueur sur la première ligne du tableau.
On peut faire un tableau où on regroupe toutes les grandeurs, ou plusieurs tableaux, un pour chaque grandeur. Dans ce cas il faut répéter la première ligne. Le professeur incite à faire des tableaux séparés.
Le professeur note un tableau commun à la classe. Pour chaque grandeur, il prend les valeurs proposées par les élèves, dans l'ordre où ils les donnent.
Les élèves constatent qu'ils ne peuvent toujours pas décrire les variations à partir de ce travail, certains proposent de classer les valeurs des tableaux dans l'ordre croissant des valeurs de la variable.
Pour l'instant, les tableaux obtenus ne sont pas des tableaux de valeurs de fonctions, mais seulement un moyen de ranger les valeurs obtenues lors des calculs. L'usage des tableaux comme registre de représentation d'une fonction va apparaître petit à petit au cours de l'étude.

3.6. Vers la formule

Le professeur fait remarquer que l'on a utilisé plusieurs fois le même calcul pour remplir les cases d'un même tableau. Il demande aux élèves de donner la formule qu'ils ont utilisée.
Pour le périmètre, les élèves disent : (longueur + largeur) × 2. Certains font remarquer que la largeur est toujours 3 cm, et proposent de noter la longueur L
La formule est donc : $(\mathrm{L}+3)\times 2=2\mathrm{L}+6$. Le professeur peut introduire la notation x pour la variable. La formule devient : $(x + 3) \times 2 = 2x + 6$
Pour l'aire, la formule longueur × largeur devient $3x$.

3.7. Utilisation de l'outil numérique

Le professeur peut suggérer l'utilisation d'un tableur ou montrer le fonctionnement de la calculatrice, pour construire une table de valeurs.
La syntaxe de la formule est à adapter au fonctionnement de l'outil.

3.8. Première institutionnalisation

Le professeur peut alors engager une institutionnalisation locale du vocabulaire et des notations.[37]
Dans notre problème , le périmètre varie en fonction de la longueur.
Dans le tableau, la variable, sur la première ligne, est notée x. Pour chaque valeur donnée à x,

[37] On parle d'institutionnalisation locale car elle se fait dans le contexte particulier de la situation proposée.

la valeur correspondante de la grandeur, sur la deuxième ligne, est appelée l'image de x.
Nous avons choisi de la noter $p(x)$ pour le périmètre ou $a(x)$ pour l'aire.
On introduit aussi les notations : $p(x) = 2x + 6$ et $p : x \mapsto 2x + 6$
Le professeur introduit les mots « image » et « antécédent » et les notations.
Ainsi, si la longueur est 5 cm, le périmètre est 16 cm.
On note $p(5) = 16$ ou $p : 5 \mapsto 16$.
Et on dit « l'image de 5 est 16 » ou « 5 a pour image 16 ».
Le mot « antécédent » peut également être introduit : quand 5 a pour image 16, on dit que l'antécédent de 16 est 5 ou que 16 a pour antécédent 5.[38]
Des difficultés d'expression en français rendent l'utilisation de ces phrases difficiles pour certains élèves et ainsi renforcent la confusion entre image et antécédent. De nombreux exercices d'application sont utiles, on en trouve facilement dans tous les manuels.

3.9. Étude des tableaux obtenus

Des élèves constatent que le tableau qui donne les valeurs des aires est un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité est 3.
Mais pour le périmètre, il n'y a pas proportionnalité. Ce qui n'est pas évident pour certains élèves.

3.10. Vers le graphique

Que dire de la variation du périmètre ? Comment l'étudier plus précisément ?

Des élèves proposent de faire un graphique.
Le professeur peut demander de tracer deux graphiques séparés (un pour l'aire et un pour le périmètre) car pour la variable, les valeurs sont les mêmes, mais les grandeurs étudiées, ne sont pas de même nature (longueur ou aire).

Comment faire le graphique ?

Le professeur peut laisser les élèves faire leurs graphiques sans donner d'indication.
Nous présentons en italique les questions que se posent les élèves lors de la construction de leur graphique.
Comment choisir les axes ?
Certains élèves mettent la longueur sur l'axe horizontal, d'autres sur l'axe vertical. Des échelles différentes sont choisies sur les axes.
Pour étudier la variation d'une grandeur, il est préférable de la mettre en ordonnée, ainsi, si la grandeur augmente, le graphique va vers le haut et vice-versa. On décide donc par convention de mettre la longueur en abscisse.
Où commence le graphique ?

[38] A ce stade de la situation, on n'a pas prouvé que les fonctions rencontrées sont des bijections, donc, rigoureusement, on devrait dire « **un** antécédent » cependant, à ce moment là, les élèves n'ont pas encore rencontré le fait qu'une même image peut avoir plusieurs antécédents. Nous proposons donc de faire une entorse à la rigueur du langage, jusqu'à ce que ce cas se présente, dans une autre situation, où les fonctions rencontrées ne seront pas des bijections. Cela permettra, au moment où les élèves se poseront la question, d'attirer leur attention sur ce point.

On obtient des points d'abscisses entières qui semblent alignés pour aire et périmètre, certains ont joint les points, d'autres non.
Certains élèves ont voulu prendre une abscisse 0 pour le périmètre et ont mis pour ce point une ordonnée 0 ou une ordonnée 3.
Ce qui donne le type de graphique de la figure 2 :

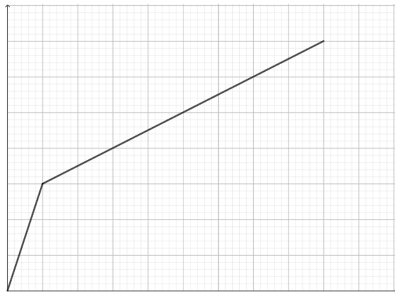


Figure 2 : *Graphique obtenu par certains élèves.*

Peut-on joindre les points ou non ?

Certains élèves disent que les points sont alignés et d'autres n'en sont pas sûrs.

Pour l'aire, on retrouve un résultat connu, le graphique qui représente une situation de proportionnalité est une droite qui passe par l'origine du repère. Les points sont donc alignés.

Pour le périmètre, le graphique est-il une droite ?

Le point qui a pour abscisse 0 correspond bien à la valeur 6, d'après la formule, et non 0 ou 3.

Le professeur peut expliquer également en montrant avec la bande de papier, que lorsque la longueur se rapproche de zéro, le périmètre se rapproche de 6 cm.
$p(0,1) = 6,2$; $p(0,01) = 6,02...$
On obtient les graphiques suivants :

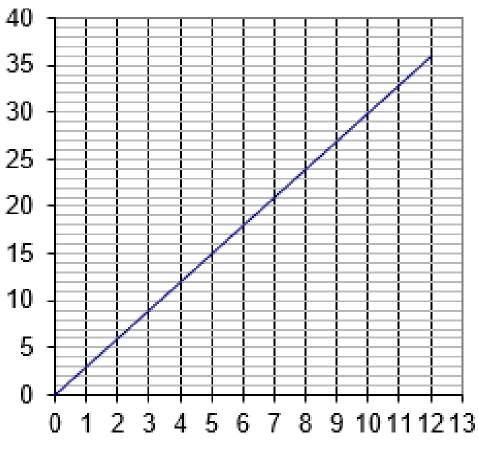


***Figure 3** : L'aire.*

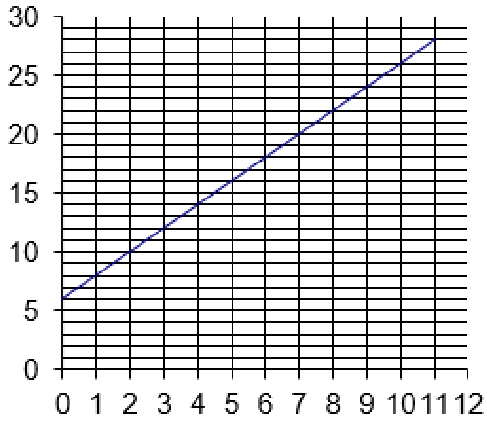


***Figure 4** : Le périmètre.*

Tous les graphiques sont-ils équivalents ?

Tous les élèves n'ont pas choisi les mêmes valeurs, certains se demandent s'ils ont le même graphique. Le choix de l'échelle change l'allure de la droite.
En revanche, tous les points obtenus, quelle que soit la longueur choisie, appartiennent à la même droite.

Le professeur incite les élèves à choisir des valeurs décimales. Une discussion s'engage sur les valeurs possibles, de zéro jusqu'à la longueur maximale de la bande (ensemble de définition de la fonction).

Si un point n'est pas sur la droite, c'est que le calcul est faux ou que le point est mal placé.
La relation entre les deux grandeurs détermine la droite : ce qui étonne beaucoup les élèves !
Une animation GEOGEBRA montrant un grand nombre de points se plaçant sur la courbe au fur et à mesure que la longueur des rectangles change, peut aider les élèves à se convaincre de ce lien entre la forme de la courbe continue et la fonction étudiée.

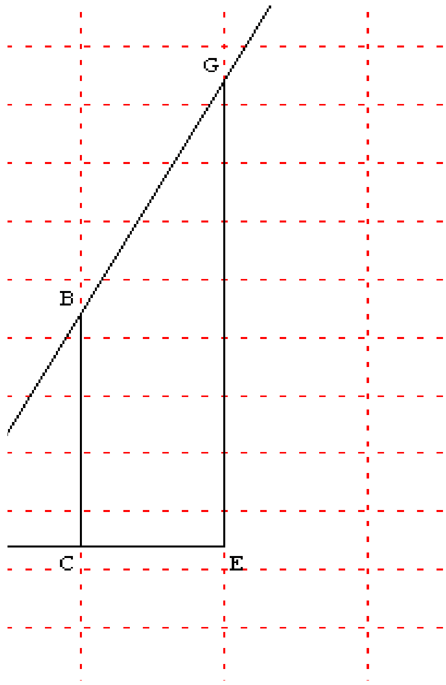


Figure 5 : *Alignement des points.*

3.11. Justification de l'alignement des points

Le professeur peut aider les élèves à formuler une démonstration, par exemple :
Dans les triangles ABC et AGE rectangles en C et en E, on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\tan \widehat{EAG} = \frac{EG}{AE} = \frac{20}{10} = 2$$

Ce qui induit que les angles aigus $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAG}$ ont la même mesure.

Par conséquent, les points A, B et G sont alignés car E, C et A sont alignés.

3.12 Le lien entre les différents registres

Pour l'aire :
Certains élèves remarquent le rôle particulier du nombre 3 ; le professeur les aide à faire le lien entre les différents registres.
La formule : $a(x) = \mathbf{3}x$
Le coefficient de proportionnalité est **3.**
Dans le tableau, pour un écart de 1 cm sur la longueur, l'aire augmente de **3 cm².**
Sur le graphique, si l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de ***3.***
Pour le périmètre :
La formule : $p(x) = \mathbf{2}x + \mathbf{6}$
Dans le tableau, pour un écart de 1 cm sur la longueur, le périmètre augmente de **2** cm.
Sur le graphique, si l'abscisse augmente de 1, l'ordonnée augmente de **2**.
L'ordonnée correspondant à une longueur de 0 est **6**.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point (0 ; **6**).

3.13 Institutionnalisation

Le professeur conclut en donnant le mot « fonction ».
On vient d'étudier deux fonctions a et p qui permettent de décrire les variations des mesures du périmètre et de l'aire des rectangles formés par le déroulement de la bande de papier en fonction de la mesure de la longueur de papier déroulée :

$$a : x \mapsto 3x \qquad\qquad p : x \mapsto 2x + 6$$

À chaque valeur x de la variable correspond une image $f(x)$. Cela définit une fonction f.

Pour étudier une fonction *f*, on peut effectuer des calculs à partir d'une formule pour remplir un tableau de valeurs. En utilisant les valeurs de ce tableau, on peut tracer une représentation graphique de la fonction.

3.14 Étude éventuelle de la diagonale

Si on étudie la diagonale, d'après le théorème de Pythagore, la formule est $d(x)=\sqrt{x^2+9}$.
On obtient le graphique suivant (figure 6).
On peut démontrer que, pour la diagonale, les points ne sont pas alignés en faisant un raisonnement par l'absurde.

Si les points étaient alignés, on pourrait utiliser le théorème de Thalès avec les points d'abscisses 0, 1 et 2, on aurait : $\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{13}-3}$

ce qui est faux.
Ou alors on comparerait les tangentes, on obtiendrait :

$$\sqrt{10}-3=\sqrt{13}-\sqrt{10}$$

ce qui est faux.
De simples valeurs calculées à la calculatrice permettent aux élèves de s'en persuader.

$\sqrt{10}-3\approx 0{,}1622\ldots$
et
$\sqrt{13}-\sqrt{10}\approx 0{,}4432\ldots$

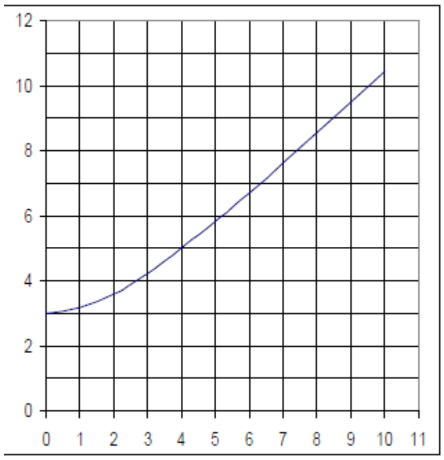


Figure 6 : *La longueur de la diagonale*

3.15 Proportionnalité des accroissements

On revient à notre bande de papier roulée. Après avoir tiré une première fois dessus, le professeur tire à nouveau de 1 cm cette fois.
Que constate-t-on ? Et si l'on tire encore de 1 cm ? Et encore...


Figure 7 *: L'expérimentation sur la bande de papier.*

Pour le périmètre, certains élèves remarquent assez vite sur le tableau de valeurs, qu'il y a un accroissement qui est le même si on augmente la longueur de la même quantité : « Si on augmente de 1, ça augmente toujours de 2 ».

+ 1   + 1   + 2   + 10   + k

x	0	1	2	3	4	6	7	17	x	$x+k$
$p(x)$	6	8	10	12	14	18	20	40	$2x+6$	$2x+6+2k$

+ 2   + 2   + 4   + 20   + 2k

Après réflexion et expérience sur la bande de papier, les élèves arrivent à expliquer l'augmentation de 3 cm² pour l'aire et de 2 cm pour le périmètre à chaque fois que l'on tire de 1 cm. Lorsque l'on tire de 2 cm, ils proposent une augmentation de 6 cm^2 pour l'aire et de 4 cm pour le périmètre.
L'enseignant peut poursuivre et demander ce qu'il se passe si l'on tire de k cm…

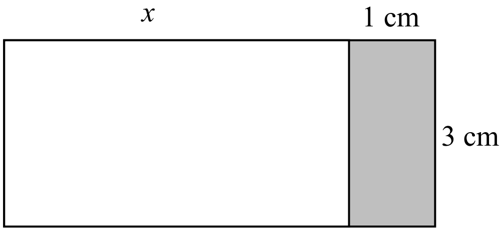


Figure 8 : *Retour à la bande de papier.*

Il fait le lien avec le graphique et montre les petits triangles rectangles.
Le professeur peut aussi aider les élèves à justifier ces résultats en reprenant la formule.
$p(x) = 2x + 6$, calculons $p(x + 1)$.

$$\begin{aligned} p(x + 1) &= 2(x + 1) + 6 \\ &= 2x + 2 + 6 \\ &= (2x + 6) + 2 \\ &= p(x) + 2 \end{aligned}$$

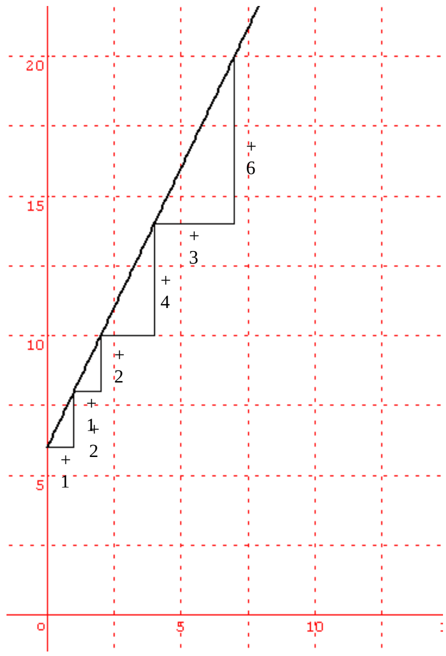


Figure 9 : Les petits triangles.

On évoque à nouveau la diagonale où les points ne sont pas alignés.
Les élèves constatent, en utilisant les valeurs approchées, que, pour un même accroissement de x, la diagonale ne croît pas régulièrement. Elle augmente d'abord lentement puis de plus en plus vite.

3.16 Dernière étape de l'institutionnalisation

Le professeur introduit le vocabulaire :
• Pour l'aire, la fonction est dite fonction linéaire.
• Pour le périmètre, la fonction est affine.
• Pour la diagonale, la fonction n'est ni affine ni linéaire.
Ces trois nouveaux mots sont mis en relation avec des caractéristiques qui ont émergé des différents registres de représentation, qui seront précisés.

4. Les questions des participants à l'atelier.

Les participants à l'atelier se sont interrogés sur des points clés de la situation, comme l'interprétation du périmètre d'un rectangle de longueur zéro et la discussion que le professeur doit engager avec les élèves pour les convaincre.
Le fait que les élèves ne se posent que tardivement la question de l'ensemble de définition des fonctions étudiées a intrigué.
Le choix que nous avons fait, d'abandonner la rigueur mathématique pour laisser vivre une définition non aboutie, comme la notion d'antécédent, tant que la question n'est pas venue des élèves, a suscité des commentaires.
Enfin, les participants ont remarqué l'importance de la gestion de la classe par le professeur dans ce type de situation : c'est ce qui a permis l'émergence des questions des élèves. Nous avons ainsi réfléchi sur la difficulté à communiquer sur le rôle du professeur dans ce type de situation. La diffusion de ce type de pratique reste donc difficile, dans une brochure et sera plus aisée dans un atelier ou une formation.

Conclusion

A travers cet atelier, nous avons voulu montrer qu'il était possible et même nécessaire dès le collège de laisser la tâche de modélisation d'un problème à des élèves, même débutants.

Pour introduire le concept de fonction, nous avons fait le choix de commencer par une situation où la modélisation est très simple et de ce fait, permet une prise en charge par les élèves de l'ensemble des étapes de l'étude. Notre proposition de gestion de classe laisse l'initiative aux élèves, car les actions à effectuer pour résoudre le problème sont toutes à leur portée dans des registres différents.

L'aspect visuel dynamique du problème posé facilite le passage à une pensée fonctionnelle. Lorsque le professeur déroule la bande de papier, il devient naturel pour les élèves de penser en termes de variations.

Le concept de fonction prend du sens, car de nombreux registres sont d'emblée sollicités pour étudier les fonctions en jeu dans le problème.

Ce n'est pas forcément par cette situation qu'on commence l'introduction des fonctions car elle ne présente que des bijections, ce qui limite la vision de ce qu'est un antécédent. Mais nous avons quand même choisi de présenter celle-ci car elle ouvre vers les fonctions linéaires et affines et la proportionnalité des accroissements.

On peut aussi commencer l'introduction des fonctions par exemple, par le problème plus classique de la ficelle avec laquelle on forme des rectangles de même périmètre. La question posée est l'optimisation de l'aire des différents rectangles formés avec la ficelle.
La démarche auprès des élèves est sensiblement la même que celle que nous avons présentée dans cet atelier.

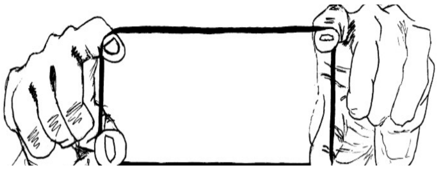


Figure 10 *: Le rectangle de ficelle.*

Le lecteur trouvera d'autres situations telle que « le carré dans le rectangle » dans la brochure de l'IREM d'Aquitaine intitulée « Les fonctions du collège jusqu'en seconde. ». Un carré de côté variable est inscrit dans un rectangle fixe et on cherche quand le carré a une aire qui vaut la moitié de celle du rectangle.

En général nous commençons plutôt par ces deux dernières situations et nous réservons « La bande de papier » pour l'introduction des fonctions affines et linéaires.

De toute façon, une seule situation ne suffit pas, c'est par la fréquentation de plusieurs tâches du même type que, petit à petit, le concept de fonction se construit.

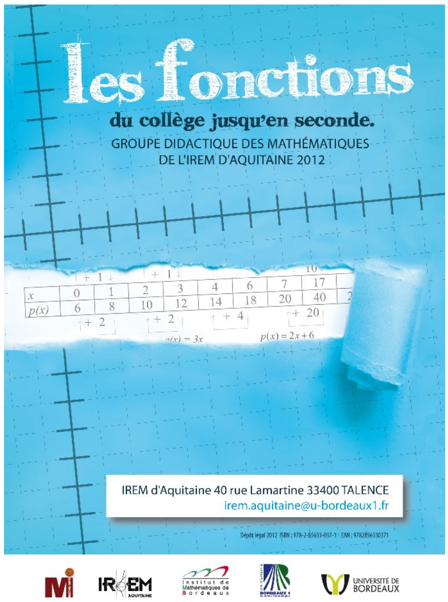


Figure 11 *: La brochure*

Références bibliographiques

Berté. A. (1993). *Mathématique Dynamique.* Nathan Pédagogie.

Berté. A. (1996). *Mathématique du collège au lycée.* Nathan.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter-institutionnel. *Petit x,* 67, 33-61. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/67x3_1560963277937-pdf

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5-31.https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 5, 37-65.

Groupe Didactique - IREM d'Aquitaine (2012). *Les fonctions du collège jusqu'en seconde*. Brochure 220 pages.

Pihoué. D. (1997). *L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde.* Cahier de DIDIREM n° 31. IREM de Paris.

Sfard. A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : reflections on processes and objetcts a different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Eduscol *Programmes de mathématiques du cycle 4 et attendus de fin d'année*. Bulletin officiel n°31 du 30 juillet 2020

Ministère de l'Education Nationale. Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques. Groupement National d'équipes de recherche en didactique des mathématiques. *Algèbre et fonctions*. Direction de l'Enseignement Scolaire (DESCO) Paris, 2000. Brochure 58 pages.

Un enseignement des mathématiques ancré dans la vie quotidienne à travers l'étude des grandeurs : représentation et modélisation à l'œuvre.

Jérôme COILLOT
Professeur de mathématiques
Collège Léon Huet, La Roche Posay (86)
Coordonateur d'un laboratoire de mathématiques
IREM&S de Poitiers

Résumé.

Depuis 2004, l'IREM&S de Poitiers travaille sur un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs au collège qui s'appuie principalement sur les travaux didactiques d'Yves Chevallard. La liaison écoles/collège, les échanges sur les pratiques et les observations d'enseignement dans les classes qui en ont découlé, ont amené à l'expérimentation de cette approche des mathématiques dans plusieurs écoles, depuis 2017, en classe de CM1 et CM2. Nos supports d'étude (situations et exercices) sont essentiellement issus de la vie quotidienne. Les manipulations et expérimentations y sont nombreuses, ainsi que la résolution de problèmes. C'est dire que représentation et modélisation sont sans cesse sollicitées, et donc les compétences qui leur sont associées sont continuellement travaillées (de façon implicite ou explicite). Cette communication vise à présenter notre démarche dans ces classes et la façon dont elle travaille la modélisation et la représentation.

Mots-clés. Modélisation, grandeurs.

Abstract

Since 2004, IREM&S de Poitiers has been working on teaching mathematics based on magnitudes in middle schools, based primarily on the didactic work of Yves Chevallard. The school/college liaison, exchanges on practices and teaching observations in classes that followed, led to the experimentation of this approach to mathematics in several schools, since 2017, in 4^{th} and 5^{th} grades (9-11 years old). Our study materials (situations and exercises) are essentially drawn from everyday life. There is plenty of experimentation and problem-solving. In other words, representation and modeling are constantly called upon, and the skills associated with them are continually worked on (implicitly or explicitly). The aim of this paper is to present our approach in these classes and how it works with modeling and representation.

Key words. Modeling, quantities.

Resumen

Desde 2004, el IREM&S de Poitiers trabaja en la enseñanza de las matemáticas basadas en las magnitudes en el primer ciclo de secundaria, basándose principalmente en los trabajos didácticos de Yves Chevallard. El vínculo escuela/colegio, los intercambios sobre las prácticas y las observaciones pedagógicas en las clases que siguieron, condujeron a la experimentación de este enfoque de las matemáticas en varios colegios, desde 2017, en las clases de 4º y 5º curso. Nuestros materiales de estudio (situaciones y ejercicios) se toman esencialmente de la vida cotidiana. Hay mucha experimentación y resolución de problemas. Esto significa que se recurre constantemente a la representación y a la modelización, y que se trabajan continuamente (implícita o explícitamente) las competencias asociadas a ellas. El objetivo de este artículo es presentar nuestro enfoque en estas clases y la forma en que trabaja la modelización y la representación.

Palabras clave. Modelización, cantidades.

Introduction

Depuis 2004, l'IREM&S de Poitiers (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques & Sciences) travaille sur un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs au collège[39]. La liaison écoles/collège, les échanges sur les pratiques et les observations dans les classes qui en ont découlé, ont amené à l'expérimentation de cette approche de l'enseignement des mathématiques dans plusieurs écoles depuis 2017 en classe de CM1 et CM2. Cette communication vise à montrer comment, dans notre démarche, modélisation et représentation sont sans cesse sollicitées.

Travailler à partir des grandeurs, c'est construire les mathématiques à enseigner à partir de situations de la vie. Nous essaierons de montrer sur des exemples, issus de la mise en œuvre de notre enseignement en CM1, comment la modélisation intervient pour accéder aux notions mathématiques et résoudre les problèmes[40].

1. Modéliser, mathématiser

1.1. Le cadre

Pour bien situer notre approche de la modélisation, reprenons les trois types d'approches qui sont dégagées dans le document de l'IREM de Paris, *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique* (Kuzniak et Vivier, 2011), et que nous résumons ainsi :

• ***Les approches « utilisatrices ».*** Les mathématiques sont un outil pour modéliser. On apprend des mathématiques puis on les applique à d'autres domaines. Cette approche qu'on pourrait qualifier d'« applicationniste » est celle de la quasi-totalité des manuels.

• ***Les approches par compétences***. La modélisation doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. Il s'agit alors d'apprendre des techniques de modélisation puis de les faire travailler.

• ***Les approches « critiques »***. Le travail de modélisation est au cœur du travail du mathématicien. C'est ainsi que s'élaborent les mathématiques. Pour Chevallard : « Le terme de mathématisé /…/ est là pour rappeler que tout objet mathématique est le fruit d'une mathématisation (éventuellement intramathématique). Son couplage avec le terme de mathématique, en outre, marque ce fait que tout objet mathématique peut, à son tour, être pris pour mathématiser, dans une étude de niveau supérieur, appelant d'autres outils d'étude. On aboutit ainsi à une succession de modélisations et à une suite de modèles. » /…/ « La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Grille de lecture et

[39] On trouvera une analyse du pourquoi de cet enseignement dans l'article de Guichard et Peyrot (2011).

[40] On trouvera une présentation détaillée de notre démarche en CM1 et CM2 comportant les questions et situations étudiées, les exercices et activités mentales associés, les temps de bilan, ainsi qu'une programmation sur 23 séances, dans la brochure Coillot (2019).

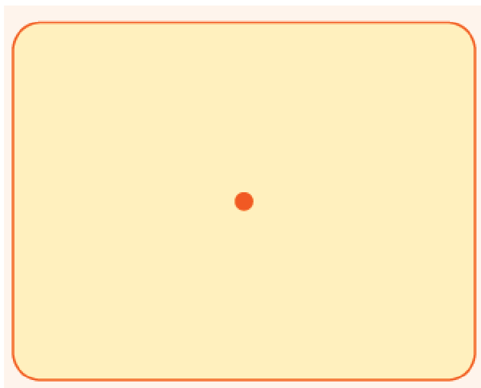
d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives entre arithmétique et algèbre notamment. » (Chevallard, 1989, p. 57 et p. 61).

C'est dans ce dernier courant que nous nous situons, et plus précisément dans l'approche de la TAD (Théorie Anthropologique du Didactique[41]) de Chevallard. L'organisation de notre enseignement des mathématiques à partir de l'étude des grandeurs nous amène à questionner des situations du monde : « L'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. » (Chevallard et Bosch, 2001). C'est la mathématisation de ces situations, utilisant modélisations et modèles, qui va permettre de construire les objets et techniques mathématiques au programmes en leur donnant du sens.

Donnons-en quelques exemples.

1.2. Un exemple de mise en œuvre avec les Longueurs en CM1, notion de distance

Prenons pour exemple le début de l'étude des longueurs en CM1 consacré à la question de la comparaison des distances : *comment savoir qui est plus près, qui est plus loin ?*

Situation pétanque *1) A la pétanque, il faut placer sa boule le plus près du cochonnet pour marquer des points.* *Comme un bouliste amateur, indiquer (sans instrument de mesure) quelle équipe remportera la manche et combien de points elle marquera en s'appuyant sur les photos ou en expérimentant.*	 
2) Placer plusieurs points à la même distance du cochonnet (représenté par le point orange) *3) Indiquer la figure géométrique formée par tous ces points.*	

[41] Yves Chevallard, la Théorie Anthropologique du Didactique, en ligne : https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard-la-theorie-anthropologique-du-didactique/ .

L'enjeu de cette première situation est de construire une notion mathématique de distance qui va permettre de comparer des distances à un point donné, de définir le cercle comme ensemble des points à la même distance du centre, de connaitre des techniques de comparaison de distances, de se réapproprier le compas comme outil de report de longueurs.

La comparaison des distances se fait avec une ficelle, une bande de papier, un morceau de bois ou de crayon. Ce qui est comparé ce sont les longueurs de ficelle, bande, bois. Les distances se modélisent par des segments dont on compare les longueurs (réinvestissement du cycle 2). Le cercle modélise l'ensemble de tous les points à la même distance d'un point fixe. C'est le segment défini par les deux pointes du compas qu'il faut avoir en tête comme modèle pour pouvoir comprendre son utilisation pour le report des distances ou des longueurs.

Il y a aussi la modélisation du cochonnet par un point, pour le tracé du cercle. Mais aussi du cochonnet et des boules si on prend les distances à partir de leurs sommets.

On voit bien le travail de modélisation à la lecture de cet exemple d'institutionnalisation noté sur un cahier d'élève :

- La distance entre 2 points c'est la longueur du segment qui joint ces 2 points.

- Pour comparer des distances, on peut utiliser un compas, une bande de papier, une ficelle, un crayon, un morceau de bois…

- Le compas permet de comparer des distances, de reporter une distance, de tracer un cercle.

- Tous les points qui sont à la même distance d'un point (cochonnet, ville…) forment un cercle qui a pour centre ce point. La distance entre un point du cercle et son centre est le rayon du cercle.

On peut remarquer que lorqu'on compare des distances avec les différentes méthodes notées, portion de ficelle, morceau de bande de papier ou de bois, écartement du compas sont des modèles du segment. On retrouve les deux sens du mot modèle et le lien avec la notion de représentation : représentation concrète (code tendue, bande de papier, règle…) d'un objet abstrait (ici un segment) ou repésentation abstraite (segment) d'un objet concret (morceau de ficelle, …).

Ce travail de modélisation est remis en œuvre à travers une série d'exercices permettant des va et vient entre réalité et mathématiques : comparer la distance entre des oies lors d'un vol, classer des voiliers sur une carte de course en fonction de leur distance à l'arrivée sur l'île de Madère, comparer sur une carte de France des distances de villes, et trouver celles qui sont à la même distance de Bourges que Rennes, trouver des positions de départ équitables pour un jeu (1, 2, 3 soleil).

1.3. Suite de la mise en œuvre avec les Longueurs en CM1, notion de périmètre

L'étude des longueurs se poursuit avec la question de la comparaison des périmètres : *comment comparer les longueurs de lignes brisées ou courbes ?*

Situation champs

Lequel des champs A ou B nécessitera la plus grande clôture ?

Le report de distances est réutilisé, en prenant pour support des demi-droites, et en comparant les longueurs des segments représentant les côtés des champs. On passe ensuite de la clôture d'un champ au contour d'une figure géométrique, de la longueur de la clôture à la longueur d'un segment de droite, et donc à la notion de périmètre d'une figure.

C'est le travail fait dans le cadre de la géométrie qui permet de répondre à la question posée dans le monde réel. On remarquera que l'on a travaillé sur une photo, qui est une représentation de la réalité, distincte de la représentation géométrique que serait la figure géométrique représentant la situation réelle. On voit donc que le travail de modélisation se fait à plusieurs niveaux : de la réalité à la photo, de la photo à la géométrie, de la réalité à la géométrie (notion de périmètre, mathématisation des réalités de clôture, tour, contour…).

Le travail de comparaison de périmètres se fait sur des exercices parlant de situations réelles (circuits de balades, encadrements de miroirs, croix de pharmacie, cerceau), dans lesquelles le travail de modélisation est toujours présent.

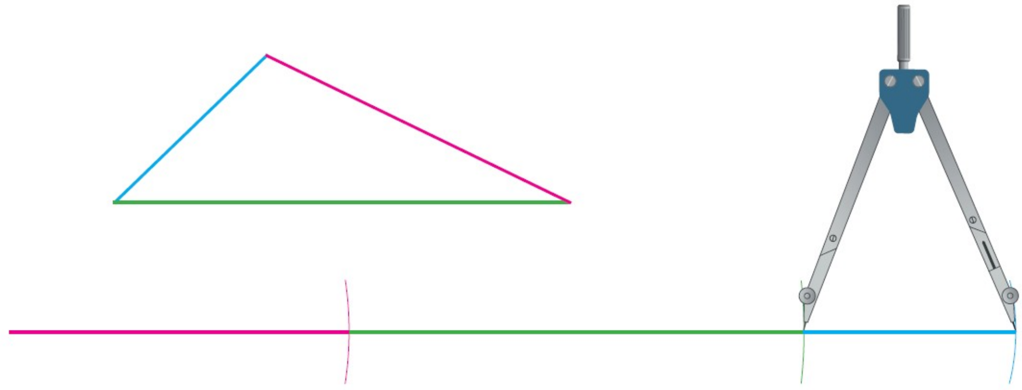
Voici l'institutionnalisation proposée :

- Le tour d'une figure peut être une ligne brisée (pour un polygone) ou une ligne courbe (pour un cercle).

- Ce tour peut être « déplié » avec une ficelle, ou une bande de papier pour en faire un segment de droite de même longueur. Cette longueur est appelée le périmètre de la figure.

- Pour comparer les périmètres de deux figures, on peut comparer la longueur des segments de droite représentant les périmètres.

Pour obtenir un segment de droite de même longueur que le périmètre d'un polygone, on reporte les longueurs de chaque côté les unes à côtés des autres sur une droite.



On peut remarquer que, pour cette première rencontre avec la notion de périmètre, sont conservés dans la définition des éléments utilisés dans le processus de modélisation, ce qui permet de rendre opératoire la méthode de comparaison qui est institutionnalisée.

On peut remarquer aussi que le type de travail fait permet d’aborder en même temps, et de façon naturelle, la notion de longueur d’une ligne brisée ou de ligne courbe, grâce à l’addition des longueurs

1.4. Les Longueurs, outil de modélisation

Nous venons de voir que c’est l’addition des longueurs qui permet de définir le périmètre d’une figure, ou la longueur d’une ligne brisée. Mais c’est elle aussi qui valide l’utilisation des barres ou des segments dans la modélisation de problèmes additifs. Pour bien comprendre une modélisation avec des barres, il est indispensable d’avoir compris que la somme des longueurs de deux barres est égale à la longueur des deux barres mises bout à bout ainsi que toutes les autres relations associées. Il est donc primordial d’avoir fait avant, avec les élèves, le travail d’arithmétisation de la grandeur Longueur, c'est-à-dire d’avoir travaillé l’addition, la comparaison additive et multiplicative, et le partage des longueurs, sans référence à leurs mesures.

1.5. Du réel aux mathématiques, des mathématiques au réel

Nous espérons avoir montré comment le parti que nous avons pris d’enseigner les mathématiques à partir des grandeurs en questionnant la vie des hommes, nous amène à placer les élèves constamment dans des situations de modélisation de la réalité, et que les notions mathématiques visées (ici les notions de distance entre 2 points et de périmètre d’une figure) s’élaborent à partir d’un travail de mathématisation de la réalité. Et en retour ce sont les notions mathématiques élaborées qui permettent de résoudre les problèmes de la vie associés à la question étudiée.

Si nous privilégions, dans notre approche, ce travail de mathématisation, nous pourrions ensuite rester à l’intérieur du domaine mathématique et ne travailler que de façon formelle. C’est ce qui est souvent le cas des manuels où une situation réelle sert à introduire le chapitre, mais une fois l’institutionnalisation faite, on s’entraine dans un cadre mathématique. Or nous privilégions le fait de rester dans le domaine réel et donc de retravailler dans chaque exercice le passage de la réalité aux mathématiques, et par là de montrer que les mathématiques élaborées sont un outil pour résoudre les problèmes des hommes (liés aux grandeurs dans notre cas, et à notre niveau).

Mais ce travail de modélisation a parfois besoin d'être explicité et travaillé comme nous allons essayer de le montrer.

2. Modéliser de façon explicite

2.1. Expliciter le travail de modélisation

Dans les exemples précédents, le va et vient entre problème réel et géométrie s'est fait sans rendre explicite le travail de modélisation qui a été nécessaire pour résoudre le problème. L'objectif visé était la construction de nouvelles notions mathématiques (distance entre 2 points, périmètre d'une figure) ayant du sens, et de techniques pour répondre à la question faisant l'objet de l'étude (comment comparer des distances entre points ? comment comparer des périmètres ?). Il nous semble cependant important, au fil des exercices, d'expliciter, de temps en temps, un travail de modélisation. En effet ce travail permet de prendre conscience de la façon de mathématiser le réel et de la place des mathématiques dans la résolution des problèmes.

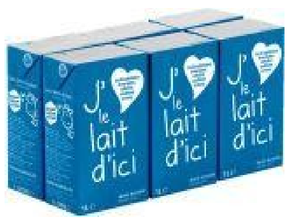
2.2. Un exemple, le pack de lait

Voici une situation de travail expérimentée en classe de CM1. Cette situation fait partie de l'étude de la grandeur volume, la huitième et dernière de l'année. C'est l'un des exercices de la troisième séquence initiée par l'étude de la question : *Comment doubler, tripler… le volume d'un pavé ?*

<table>
<tr>
<td>

4 Pack de lait

Voici un pack de 6 briques de lait de 1L.



a) **Complète :**

La forme d'une brique de 1L de lait est ……….

La forme du pack est ………………

Le volume d'une brique de lait est … du volume du pack.

</td>
<td>

b) Une brique a pour dimensions 9 cm×5,9 cm×19,2cm.

Calcule puis **écris** les dimensions du pack.

…….. cm×…….. cm×……..cm

c) **Trace** en rouge, sur la photo, le pavé correspondant au pack en perspective.

d) **Reproduis** une perspective ressemblante ci-dessous.

</td>
</tr>
</table>

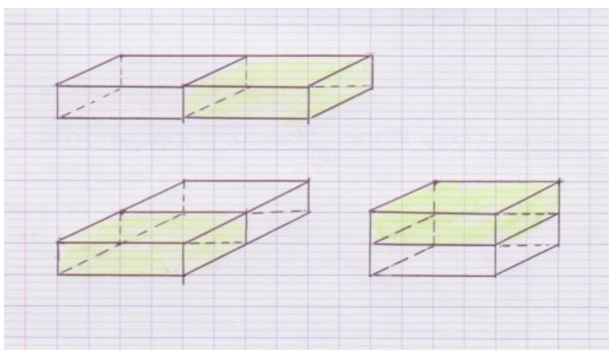
Cette situation fait travailler la modélisation à chaque étape du questionnement.

Dans la question a), l'élève doit trouver la figure géométrique (forme spatiale) qui est la représentation mathématique (abstraite) de l'objet réel (pack ou brique). C'est la première étape du schéma classique du processus de modélisation. La figure géométrique (le pavé) est le modèle de l'objet. On dégage le modèle abstrait de l'objet concret. L'identification de la forme à partir d'un objet concret est facilitée par le fait que l'on peut imaginer (voire manipuler) cet objet dans différentes positions et donc savoir qu'il a six faces qui ont toutes la forme d'un rectangle. Donc la définition du pavé peut être « expérimentée ». Il est à noter que si l'on substitue à la photo du pack un dessin en perspective cavalière d'un pavé (partagé en 6), il n'y a pas de travail de modélisation. C'est alors seulement la reconnaissance d'une forme parmi des représentations (mathématiques) de formes standardisées, avec les problèmes inhérents à ces représentations qui risquent de faire obstacle à leur reconnaissance, comme pour le carré en « position de losange ». Pour la dernière question, on travaille sur le modèle mathématique du pack (un pavé divisé en 6 pavés de même volume) pour trouver la fraction 1/6, dans le cadre de la géométrie euclidienne, modèle du monde où se trouve le pack, dont le pavé est un objet (abstrait).

Dans la question b), on continue en travaillant dans le modèle mathématique : les calculs sont faits sur un pavé partagé en 6 pavés identiques. Mais la réponse est donnée dans le cadre de la situation concrète : les dimensions sont celles de l'objet réel (le pack).

Dans la question c), on essaie de retrouver la représentation en perspective du pavé dans la représentation plane de l'objet réel (sa photo). On schématise la représentation de l'objet concret à l'aide d'un dessin géométrique qui sera une vue en perspective du pavé. La perspective du pavé a été obtenue par un travail de modélisation de la photo, et non comme une représentation conventionnelle soumise à des règles à suivre. C'est l'analyse du schéma de modélisation de la photo qui va permettre de réaliser la vue en perspective du pavé demandée dans la question c), et de dégager des règles de construction.

Cet exemple montre bien le va et vient incessant de l'objet au modèle et du modèle à l'objet, en lien avec le processus de modélisation. Mais par rapport aux exemples précédents, on peut noter que les questions c) et d) demandent un travail explicite de modélisation, sans rapport avec l'objectif de l'exercice : identifier le volume d'une brique de lait comme le sixième de celui du pack, et calculer les dimensions du pack. Ce travail vise à donner à l'élève des moyens de construire des représentations d'objets tridimensionnels. Pour la question a) on aurait pu omettre les deux premières demandes et laisser la modélisation à la charge de l'élève. Nous avons fait un autre choix visant à rendre explicite les objets mathématiques pour lesquels ont été institutionnalisés des propriétés de partage.

Pour **doubler** le volume d'un pavé, il suffit de doubler une seule de ses dimensions : la longueur, ou la largeur, ou la hauteur. De même pour tripler, quadrupler, ... son volume. Pour **partager** un pavé en deux pavés de même volume, il suffit de partager une de ses dimensions en 2 parties égales : la longueur, ou la largeur, ou la hauteur. De même pour partager en 3 (tiers), en 4 (quart)….	

3. Utiliser des outils de modélisation

Dans les exemples qui vont suivre il s'agit de montrer l'utilisation explicite que nous pouvons faire d'outils de modélisation.

3.1. La droite graduée

Cet objet mathématique est bien souvent utilisé comme support d'exercices formels de placement de nombres dans le but de les comparer, ranger, encadrer[42]. Pour nous, les élèves la rencontrent dans la lecture de graphiques, mais aussi comme outil de mesure, essentiellement dans l'étude des grandeurs longueurs et volumes, et comme outil de modélisation de problèmes additifs liés aux horaires dans l'étude de la grandeur durées (la septième dans notre organisation de l'année). En voici un exemple.

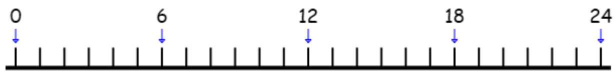
Il s'agit de la troisième séquence initiée par l'étude de la question : *Comment calculer des durées quand on en connait le début et la fin ?*

Situation boulangerie

Horaires : lundi	Fermé
mardi	07:00–13:30, 15:30–19:00
mercredi	07:00–13:30, 15:30–19:00
jeudi	07:00–13:30, 15:30–19:00
vendredi	07:00–13:30, 15:30–19:00
samedi	07:00–13:00, 16:00–19:00
dimanche	07:00–13:00

Quelles sont les durées d'ouverture de la boulangerie le mardi ?

1) Je place des flèches aux heures d'ouverture et de fermeture du mardi sur la droite graduée.



2) Je colorie, sur la droite graduée, .les durées d'ouverture du matin en vert et de l'après-midi en bleu.

3) Je complète les durées d'ouverture :

mardi matin :……. mardi après-midi :……

4) J'écris en ligne les opérations qui donnent les durées d'ouverture du mardi :

mardi matin :…………………………

mardi après-midi :…………………….

La droite graduée, comme outil de modélisation de la situation, est imposée d'emblée pour en montrer l'intérêt : une représentation linéaire du temps, la représentation du lien entre horaire et durée depuis une origine, l'identification de la nature du problème (un problème additif dont l'opération est une soustraction). Donc cette première modélisation débouche sur une deuxième modélisation de la situation par une opération, en l'occurrence une soustraction.

Il nous semble important d'apprendre à l'élève à visualiser la situation à l'aide d'une droite graduée (image de la ligne du temps), même si pour des durées de moins de 12h l'horloge pourrait être utilisée (image circulaire du temps). Et de faire que cette droite graduée devienne un outil qu'il utilise de sa propre initiative, sous forme d'un schéma à

[42] Voir par exemple les attendus de fin d'année de CM1, partie Nombres et calculs : https://eduscol.education.fr/document/13990/download

main levé qu'il gradue lui-même, en utilisant éventuellement le quadrillage de ses feuilles de cahier. Donc nous avons imposé l'usage d'une droite graduée dans la situation de départ pour que l'élève puisse bien en mesurer l'intérêt. Il peut à partir de la graduation compter les intervalles de temps formant la durée cherchée, ce qui est une façon de résoudre le problème, à ne pas négliger. Mais l'important est que l'élève comprenne que cette durée, qu'il peut évaluer ainsi, peut se calculer à partir des deux dates ou horaires (instants, dans le programme) donnés, et que, pour cela, il faut soustraire les données. Pour bien appréhender l'aspect soustractif du problème on peut utiliser des barres, bien positionnées, figurant les deux durées correspondant aux deux dates ou horaires : il y a là une difficulté importante, car ce ne sont pas les dates que l'on va soustraire, mais les durées de ces dates à partir de l'origine commune qui a permis de les obtenir. Au lieu d'utiliser des barres on peut utiliser des segments représentant ces durées en coloriant le segment reliant l'origine à l'horaire ou à la date. Mais là encore une difficulté surgit : il y a souvent conflit entre le choix d'un pas de la graduation qui permettrait de placer exactement les dates ou horaires (et de calculer directement le nombre de pas), et la possibilité de faire figurer l'origine de l'horaire ou de la date sur la graduation. Ce problème ne doit pas être éludé : au contraire, car, in fine, c'est lui qui montre la nécessité de la soustraction. Ceci ne rend pas caduque l'utilisation d'une graduation, au contraire. Mais ce n'est alors qu'un schéma qui permet de retrouver le type de calculs qu'il y a à faire.

Dans les exercices qui suivent, et dont l'objectif est le même (savoir trouver la durée entre deux horaires), le travail de modélisation du temps par une droite graduée est demandé, mais laissé à la charge de l'élève de façon de plus en plus autonome : *représente les 7 heures sur une droite graduée, schématise la journée,* puis pour les exercices suivants il n'y a plus qu'un cadre avec pour titre *mon schéma, mes calculs, mes explications*. On peut remarquer que l'on passe d'une droite graduée donnée, à une droite que l'élève gradue lui-même, en adaptant la graduation à la situation étudiée.

Il s'agit bien alors de développer une compétence de modélisation sur ce type de problèmes (décalage horaire, durée du jour, âge d'une personne, durées de règnes) : modélisation visuelle (droite graduée, schéma), puis abstraite (soustraction).

3.2. Les barres

Les barres ou segments sont depuis très longtemps utilisés pour modéliser des problèmes additifs et aider à les résoudre. Nous ne négligeons par cet outil dont l'utilisation est validée par la construction de la grandeur longueur. Nous voudrions montrer l'utilisation que nous en faisons dans un autre contexte : des problèmes de comparaison multiplicative et de partage en lien avec les fractions. En voici un exemple dans une séquence sur *Problèmes et fractions* qui termine l'étude de la grandeur masses (la troisième dans notre organisation de l'année).

L'hibernation de l'ours

Durant l'hibernation un ours peut perdre jusqu'à un quart de son poids.

a/ Je représente le poids d'un ours par une barre de 4 carreaux.

b/ Je colorie en rouge la partie de la barre correspondant à sa perte de poids

c/ Je colorie en vert son poids au printemps, quand il sort de son hibernation.

d/ Je complète :

Pour un ours de 200 kg, sa perte de poids est de …… kg et son poids de printemps est de ….. kg.

Pour un ours de 90 kg, sa perte de poids est de …… kg et son poids de printemps est de …… kg.

Mes calculs :

Comme dans le paragraphe précédent, l'objectif est de faire utiliser aux élèves un outil de modélisation pour des situations de partage d'un tout : une barre formée de carreaux, dont le nombre correspond au nombre de parts du partage qu'indique la fraction. On peut noter que si un quadrillage est donné, ainsi que le nombre de carreaux, la représentation de la barre est à la charge de l'élève. Comme précédemment, le travail de modélisation est petit à petit dévolu complètement à l'élève. La représentation visuelle de la situation permet d'identifier la nature du problème, et des opérations à mettre en œuvre pour le résoudre : division, puis multiplication.

Là aussi il s'agit de développer, de façon explicite, des compétences de modélisation, au service de la résolution de problèmes de la vie.

4. En conclusion

Les exemples donnés ont essayé de montrer que notre démarche globale d'apprentissage des mathématiques[43] repose sur un travail de mathématisation de la réalité comme celui mis en avant par Chevallard dans la TAD : les mathématiques à enseigner sont construites pour modéliser et résoudre des problèmes. Donc de fait elles sont des outils de modélisation. Mais nous ne négligeons pas d'expliciter et de faire travailler des méthodes et des outils de modélisation pour résoudre les grands types de problèmes que nous étudions. Nous retrouvons ainsi les préoccupations des deux autres types de démarches citées au début de l'article : apprentissage de techniques de modélisation et utilisation des mathématiques pour modéliser. Mais nous les intégrons à notre travail, nous n'en faisons pas des chapitres à part.

[43] On pourra se reporter aux brochures de l'IREM&S de Poitiers consacrées à l'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs en cycle 3 et cycle 4 : https://irem.univ-poitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=article&id=180&Itemid=197

L'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs accorde un temps important au travail de la grandeur en tant que telle. Les concepts sont construits sans aller trop rapidement vers la mesure et les calculs. En agissant ainsi et en utilisant de nombreux leviers (manipulation, expérimentation, situations concrètes, travail très « spiralaire », activités mentales contextualisées, …), nous visons une meilleure assimilation des notions, savoir-faire et méthodes, tout en développant de très nombreuses compétences (non pour elles-mêmes, mais en situation), en particulier les compétences de représentation et de modélisation.

Terminons par ces mots de la brochure de l'IREM de Paris cité en début d'article que nous faisons nôtres : « Les mathématiques participent à une modélisation de la réalité qui permet un contrôle, au moins partiel, du monde réel. Ainsi, la compréhension de l'utilité des mathématiques pour la société ne peut s'affranchir d'une référence à un processus de modélisation. » (Kuzniak et Vivier, 2011, résumé, p. 106)

Références bibliographiques

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x, n°19, p.45-75. IREM de Grenoble.

En ligne sur le site de l'IREM de Grenoble https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/fr/ ou https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR89002/IGR89002.pdf.

Chevallard Y., Bosch M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. partie 1. Une Atlantide oubliée. Petit x, n° 55, p.5-32. IREM de Grenoble

En ligne sur le site de l'IREM de Grenoble https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/fr/ ou https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR01021/IGR01021.pdf.

Coillot J., Gaud M., Redondo C., & Rebourg-Fert L. (2019). Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Matériaux pour expérimenter. Fascicule 1 : CM1 & CM2. IREM&S de Poitiers.

Groupe collège. Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs en cycle 3 et en cycle 4, IREM&S de Poitiers : https://irem.univ-poitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=article&id=180&Itemid=19

Guichard J.-P., Peyrot S. (2011). Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens. Bulletin de l'APMEP n°492, p. 67-72. En ligne : https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAA/AAA11009/AAA11009.pdf

Kuzniak A., Vivier L. (éds) (2011). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique. IREM de Paris. En ligne : https://hal.science/hal-02110170/document ou https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS11001/IPS11001.pdf.

Modéliser avec des barres à l'école et au début du collège

Christine CHAMBRIS[44]
IREM de Paris, INSPé de l'académie de Versailles (site Evry), LDAR, CY Cergy Paris Université, F-95000, France

Résumé. Depuis 2018, les textes officiels ont introduit des représentations avec des lignes (ou des barres) pour la résolution de problèmes arithmétiques à l'école et au début du collège. L'atelier a pris appui sur une situation de formation pour le premier degré conçue pour répondre aux nouveaux besoins de formation. Le colloque a été l'occasion de revisiter la situation au regard des enjeux de la modélisation et de questionner ou de préciser ces enjeux dans la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires, enjeux dont la visibilité est renouvelée avec l'arrivée des « modèles en barres ». Certains choix institutionnels sur les « modèles en barres » ont été évoqués.

Mots-clés. Résolution de problèmes arithmétiques, modèles en barres, construction et valeur d'un attribut, construction d'un modèle, utilisation d'un modèle, notion mathématique de quantité.

Abstract. Since 2018, official texts have introduced representations with lines (or bars) for word problem solving in school and early middle school. The workshop was based on a training situation for primary school teachers designed to meet the new training needs. The conference provided an opportunity to revisit the situation in terms of the modelling issues at stake, and to question or clarify these issues in the solving of elementary word problems, issues whose visibility has been renewed with the introduction of "bar models". Some institutional choices concerning "bar models" were discussed.

Keywords. Word problem solving, bar models, construction and value of an attribute, construction of a model, use of a model, mathematical notion of the quantity.

Resumen. Desde 2018, los textos oficiales introducen representaciones con líneas (o barras) para resolver problemas aritméticos en la escuela primaria y al inicio de la escuela secundaria. El taller se basó en una situación de formación del profesorado de educación primaria diseñada para satisfacer las nuevas necesidades de formación. El coloquio fue una oportunidad para repensar la situación desde el punto de vista de lo que está en juego en la modelización y para cuestionar o clarificar esto en la resolución de problemas aritméticos elementales, sabiendo que la visibilidad de lo que está en juego en la modelización se ha renovado con la llegada de los "modelos de barras". Se discutieron algunas opciones institucionales en relación con los "modelos de barra".

Palabras clave. Resolución de problemas aritméticos, modelos de barras, construcción y valor de un atributo, construcción de un modelo, utilización de un modelo, noción matemática de cantidad.

La préparation, le travail réalisé au cours de l'atelier et la réflexion sur le thème de la modélisation qu'il a amorcée font l'objet d'un texte en cours d'écriture qui sera soumis à une revue du réseau des IREM dans quelque temps. Par ailleurs, l'activité de formation sur laquelle l'atelier a pris appui a fait l'objet d'une publication dans le bulletin de l'APMEP Au fil des maths (Chambris, 2023). Les trois pages qui suivent constituent un résumé long de l'atelier.

[44] christine.chambris [at] cyu.fr

L'atelier s'est déroulé en plusieurs étapes. Tout d'abord, une rapide présentation du contexte institutionnel a été faite ainsi que celle du contexte de l'atelier puisqu'il s'appuie sur une tâche de formation conçue précisément en réponse à ce contexte. De quoi s'agit-il ? Une injonction véhiculée par des textes institutionnels a fait irruption depuis 2018 dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques : *enseigner la résolution de problèmes* avec *les modèles en barres* à moins qu'il ne s'agisse d'*enseigner les modèles en barres*. En réponse à cette injonction, nous avons mis au point une tâche, que nous appellerons « Boucle d'or », pour la formation des formatrices et des enseignantes du primaire (Chambris, 2023). Des productions des enseignantes et formatrices qui ont participé aux formations (que nous désignerons ci-après par *les formées*) ont été récoltées au cours des nombreuses mises en œuvre de la tâche. L'atelier prend appui sur une sélection de ces productions qui permet aux participants (désignés par *les participants*) de revisiter des enjeux de la modélisation qui émergent au fil de l'atelier.

Quelques minutes ont été laissées aux participants pour qu'ils s'attellent à la tâche Boucle d'or. Elle est présentée comme suit.

> Voici un extrait d'un conte :
>
> *En arrivant dans la salle à manger elle remarqua sur la table trois bols de soupe. Elle s'approcha du grand bol, celui du grand ours, goûta la soupe et la trouva bien trop chaude.*
>
> *Elle s'approcha alors du moyen bol, celui du moyen ours, goûta la soupe et la trouva bien trop salée. Elle s'approcha enfin du petit bol, celui du petit ours, goûta la soupe et la trouva tellement à son goût qu'elle la mangea jusqu'à la dernière goutte. (Boucle et les trois ours, texte de Rose Celi, Gerda Muller, éd. Père Castor Flammarion)*
>
> **Représenter par des lignes droites, les grandeurs du texte, ce qui peut être plus ou moins grand.**

Dans un deuxième temps, des productions (figure 1) ont été examinées, au filtre d'une diversité de critères que j'évoque maintenant. Tout d'abord c'est la multiplicité des « grandeurs du texte » identifiées qui retient l'attention. Nous avons parlé d'« attributs « quantitatifs » variés ». Si certains attributs sont attendus, comme les tailles des bols, les tailles des ours ou encore les quantités de soupe, d'autres le sont un peu moins, comme le sel ou la température de la soupe et d'autres sont totalement surprenants comme « Intensité du plaisir de boucle d'or devant telle ou telle soupe » (I, figure 1.f). Des constructions relativement sophistiquées sont aussi proposées comme la comparaison de la taille de la table avec la place occupée par les bols posés sur la table.

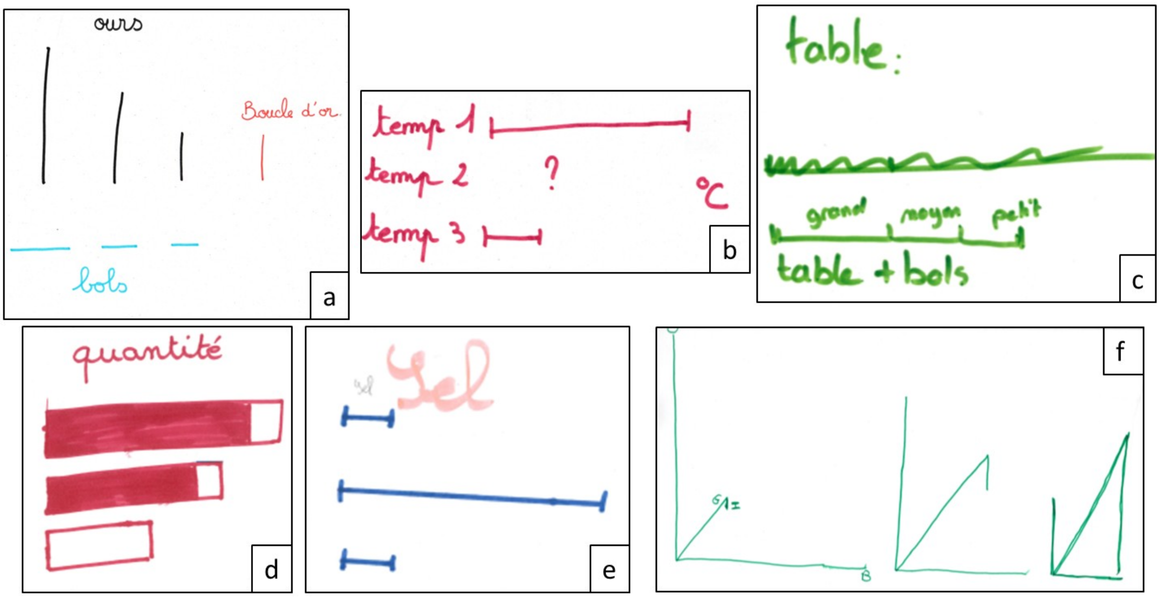


Figure 1 *: une sélection de productions réalisées par les formées*

La diversité des productions permet alors d'interroger, au filtre de la modélisation, le travail réalisé par les formées pour produire les lignes. Pour commencer nous nous focalisons sur la construction d'un attribut. Ce cas se présente avec l'examen des productions sur le thème de la « préférence » ou du « rejet » (type f) de la soupe, qui montre que l'attribut n'est pas un donné mais que c'est bien une construction intellectuelle qui permet d'aboutir à la production de lignes plus ou moins longues et d'une désignation (*le rejet*, *la préférence*, etc.) pour ce qui est représenté. Ensuite, nous discutons de la représentation des « bols ». En effet, selon les productions il est clair que le mot « bols » renvoie à une superficie (ou à un diamètre) pour un bol posé sur la table (c), quand dans d'autres cas c'est la hauteur du bol ou son volume qui doit être considéré. Ainsi, on voit que si le texte évoque les *grandeurs des bols* (petit, moyen, grand), la représentation des lignes engage, au moins certaines fois, les formées à spécifier un attribut de l'objet *réel* même si cela reste implicite sur les productions. Ces éléments suggèrent que l'identification ou la construction des attributs relève bien de l'activité de modélisation.

L'identification d'un attribut va souvent de pair avec l'identification de ce que nous avons appelé les « valeurs de l'attribut ». C'est particulièrement évident dans le cas de la « préférence » où la définition même de l'attribut engage à se poser la question et à choisir *ce qui est préféré* entre une soupe « trop chaude » et une soupe « trop salée ». On voit bien souvent que la détermination des valeurs des attributs est l'objet d'investigations au-delà des « valeurs » (e.g., petit, moyen, grand) données par le texte. Ainsi, certaines formées s'interrogent sur la taille de Boucle d'or et la mettent en relation avec celle des ours (a). Le « sel » et la « température » de la soupe du petit ours sont identifiés comme des normes par rapport auxquelles les autres valeurs sont situées (e) (ou non ! (b)). Pour un bol donné, les variations des quantités de soupe au fil du temps font l'objet d'un intérêt particulier où l'on voit souvent que seulement deux des trois quantités engagées (quantité initiale, variation, quantité finale) sont représentées contrairement à ce qui apparaît sur la figure 1.d. C'est en effet un raisonnement d'un type particulier qui permet de mettre en relation les trois quantités : la quantité initiale, la quantité bue et la quantité finale. Pour résumer, l'étude des productions met en évidence un travail nécessaire pour produire les « valeurs » des attributs, valeurs qui bien souvent traduisent une relation d'ordre entre deux « référents » selon le point de vue imposé par l'attribut, plutôt qu'une « valeur ».

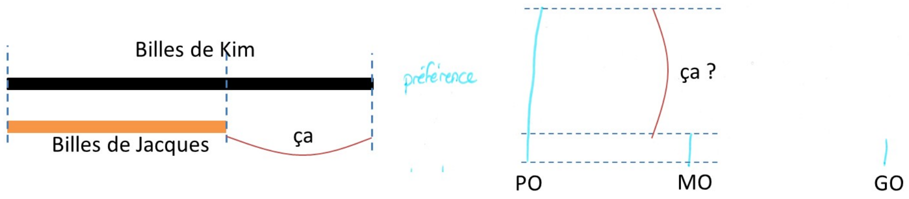


Figure 2 *: L'écart*

Un nouveau regard sur les productions permet, ensuite, de revenir sur les types de relations qui sont sollicitées dans les productions entre les valeurs d'un attribut pour un attribut donné et sur les moyens utilisés pour les représenter. Les relations qui apparaissent sont en premier lieu la relation d'ordre binaire (A est plus grand que B : les tailles des ours, etc.) avec des lignes parallèles. La transformation d'un état initial en un état final (par exemple pour les variations des quantités de soupe) traduit un autre type de relation. Il s'agit de représenter une relation ternaire dont nous avons dit qu'elle ne va pas de soi (la quantité initiale de soupe est diminuée d'une certaine quantité et il en reste – ou pas). La représentation est alors une ligne en deux parties à partir de laquelle trois « valeurs » peuvent être identifiées (figure 1.d, parties blanche, rouge et tout). Les « bols » accumulés (figure 1.c) composent une certaine superficie (comparée à la table) : la ligne des bols est en plusieurs parties. Il s'agit alors de représenter une relation de composition entre un tout et ses parties. Finalement, un quatrième type de relation est introduit, qui n'apparaît qu'à la marge dans Boucle d'or (figure 1.c). Il s'agit d'une relation ternaire, la comparaison de deux quantités et *l'écart* entre les deux quantités. L'examen de cette question permet de se rendre compte que la notion « d'écart » n'a pas, par exemple, de pertinence pour l'attribut « préférence » (figure 2).

Ces réflexions sur les relations nous amènent alors d'une part à expliciter des normes de représentation pour les modèles en barres dans le champ des problèmes additifs car nous retrouvons les trois premières catégories des structures additives (Vergnaud, 1986). Ces normes sont communes aux curricula qui ont développé un usage des modèles en barres (figure 3) (e.g., Kaur, 2019 à Singapour, Polotskaia, Gervais & Savard, 2019, dans une ingénierie qui s'inspire des travaux de Davydov dans le domaine de la pré-algèbre). D'autre part, la réflexion sur l'impossibilité d'inclure la préférence dans les normes de représentation amène à interroger plus avant ce qui est représenté avec les barres dans les curricula qui les utilisent. Les barres représentent ce qui peut être comparé, ce qui peut être ajouté. On retrouve les propriétés classiques des « quantités » : « ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution » (Bézout, 1764). Finalement les barres pourraient représenter **le modèle mathématique** de la quantité, notion nécessaire pour apprendre l'arithmétique à l'école, et donc l'enseigner.

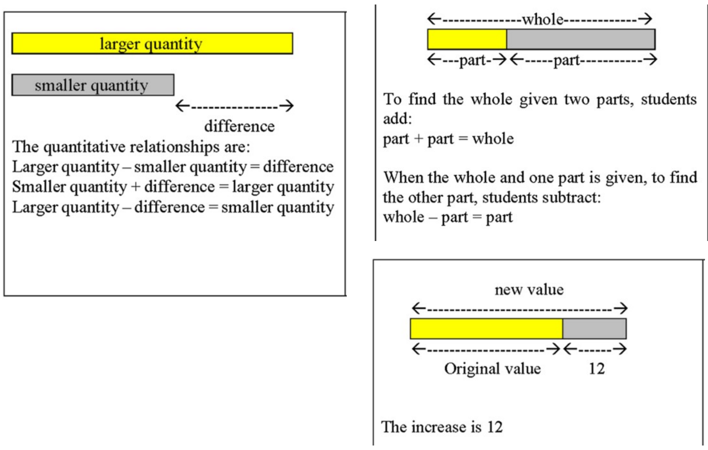
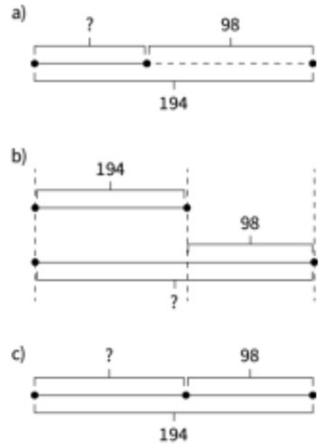
	
Comparaison, composition, transformation. (Kaur, 2019, p.5, p.4, p.6)	Transformation, comparaison, composition. (Polotskaia, et al., 2019, p. 149)

Figure 3 *: Les normes des modèles en barres pour les problèmes additifs*

Un épilogue nous conduit à revenir sur la situation en France. En effet, les normes introduites pour les barres (e.g., MEN, 2020) (figure 4) ne sont pas celles que nous avons évoquées à la figure 3. Elles ne représentent alors plus le modèle de la quantité. Ce fait permet d'ouvrir une triple réflexion : par l'introduction des barres la mise en évidence de la nécessité de considérer les quantités pour enseigner et apprendre l'arithmétique scolaire, l'invisibilité de la notion mathématique de quantité dans notre curriculum, l'invisibilisation de la notion même de quantité au moment où elle est rendue visible par les barres.

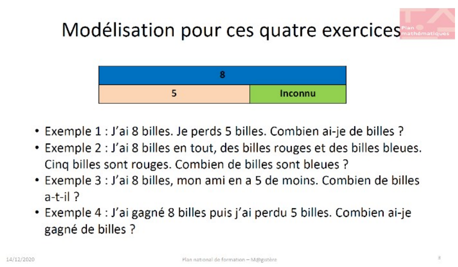


Figure 4 *: « Les règles de construction du schéma en barres » (PNF – MEN, 2020, diapo 3)*

Références

Bézout, E. (1764 / 1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*. (9e éd.).

Chambris, C. (2023). Boucle d'or et les modèles en barres. *Au fil des maths (APMEP), 550*, 64-73.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method. *ZDM*, *51*(1), 151-168.

Polotskaia, E., Gervais, C., & Savard, A. (2019). *Représenter pour mieux raisonner.* JFD éd.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Grand N*, *38*, 21-40.

MEN (2020) Moment 4. Règles construction du schéma en barres (partie 1). *M@gistère Plan national de formation des RMC – Plan mathématiques*. Ministère de l'éducation nationale.

Ateliers centrés sur l'activité de modélisation

Modéliser au collège : quels obstacles ?

Cécile BEZARD-FALGAS [45]

IREM de Caen

Loïc COULOMBEL[46]

IREM de Caen

Résumé. À partir de situations travaillées en classe et des productions des élèves qui les accompagnent, nous nous sommes intéressés à différents obstacles que les professeurs et les élèves du collège peuvent rencontrer lorsqu'ils sont confrontés à la compétence modéliser. Nous avons questionné le schéma du cycle de la modélisation de Blum et Leiss (2005), en particulier dans les phases de mathématisation horizontale (passer d'un problème « réel » à un problème mathématique) et de mathématisation verticale (recherche du modèle). L'objectif de cet atelier est de rendre compte des réflexions issues de ces questionnements à partir de situations proposées en classe sur diverses notions, et de certaines productions d'élèves qui peuvent être analysées à l'aide d'outils didactiques issus de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques.

Mots-clés. Modéliser, collège, compétences, obstacles, productions d'élèves.

Abstract. Based on situations worked on in class and the accompanying student productions, we have looked at the various obstacles that middle school teachers and students may encounter when confronted with the skill of modeling. We questioned Blum and Leiss's (2005) schema of the modeling cycle, , particularly in the phases of horizontal mathematization (moving from a "real" problem to a mathematical one) and vertical mathematization (search for the model). The aim of this workshop is to report on reflections rised by these questions based on classroom situations involving different concepts, and on certain student productions that can be analyzed using didactic tools derived from the anthropological theory of didactics and the theory of didactic situations.

Keywords. Model, middle school, skills, obstacles, students' productions.

Resumen. A partir de situaciones trabajadas en clase y de las producciones de los alumnos que las acompañan, nos hemos interesado por diferentes obstáculos que los profesores y los alumnos de enseñanza secundaria pueden encontrar cuando se enfrentan a la competencia de modelar. Hemos cuestionado el esquema del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2005), especialmente en las fases de matematización horizontal (pasar de un problema "real" a un problema matemático) y de matematización vertical (búsqueda del modelo). El objetivo de este taller es dar cuenta de las reflexiones surgidas a partir de estos cuestionamientos, a partir de situaciones propuestas en clase sobre diversos conceptos, y de algunas producciones de los alumnos que puedenn ser analizadas utilizando herramientas didácticas derivadas de la teoría antropológica de la didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas.

Palabras clave. palabra clave, palabra clave, palabra clave, palabra clave, palabra clave.

Introduction

Il y a plus de vingt ans Girard (1999) se posait déjà la question de savoir si les enseignants de mathématiques doivent enseigner la modélisation ou seulement les modèles. La question de la modélisation en tant qu'objet d'enseignement, Alain Kuzniak et ses collègues se la posaient aussi en 2011 dans « La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique » (Kuzniak & Vivier, 2011).

Dans la perspective du colloque, nous avons interrogé nos pratiques et pour cela nous avons questionné le schéma du cycle de la modélisation de Blum et Leiss (2005), en particulier dans les

[45] e-mail

[46] e-mail

phases de mathématisation horizontale (passer d'un problème « réel » à un problème mathématique) et de mathématisation verticale (recherche du modèle).

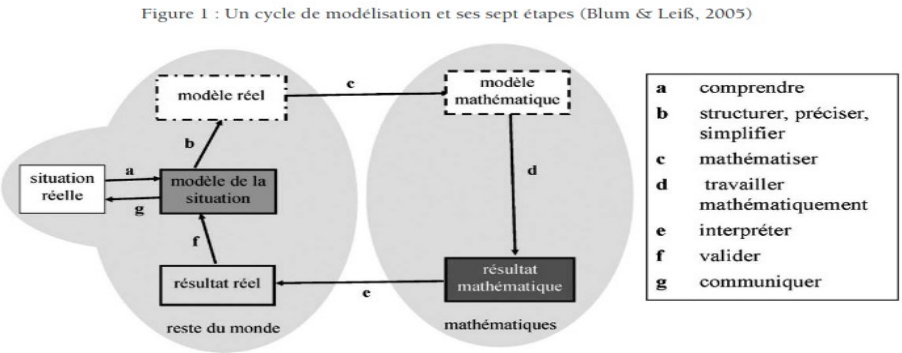


Figure 15*: Cycle de modélisation de Blum & Leiss*

Nous avons utilisé ce schéma tel que complété par Sonia Yvain-Prebiski dans sa thèse (2018) en y intégrant les phases de mathématisation horizontale et verticale.

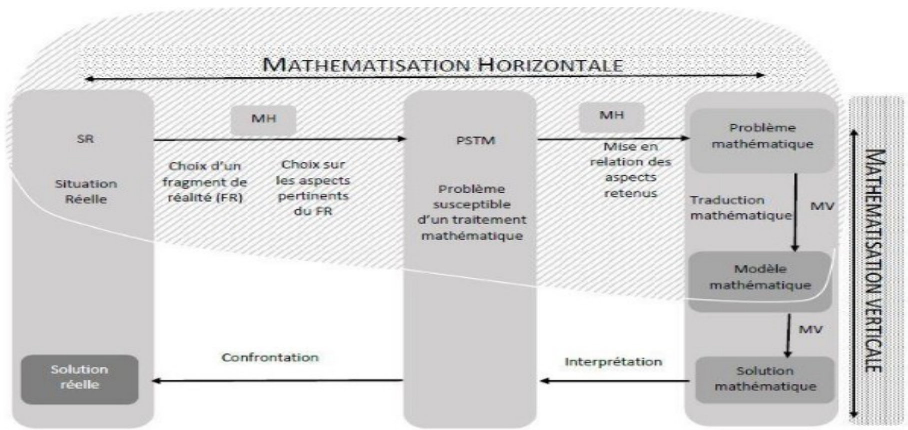


Figure 16*: Complément de Yvain-Prebiski (2018)*

Yvain-Prebiski (2018, p,79) définit la mathématisation horizontale comme relevant du choix d'un fragment de réalité, de l'identification et du choix de certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique et la mathématisation verticale comme relevant du travail mathématique à l'intérieur « du monde des symboles », c'est-à-dire du traitement mathématique d'un problème mathématique.

A partir de ces schémas et de ces définitions nous nous sommes posé quelques questions.

- Comment l'enseignant peut-il choisir une situation « réelle » pour laquelle tous les élèves peuvent se mettre en activité ?
- Quelles difficultés rencontrent les élèves du collège lorsqu'ils sont placés dans une situation « réelle » (mathématisation horizontale) ?
- Est-ce que modéliser (mathématisation horizontale et verticale) n'est pas aussi une occasion pour l'enseignant de donner du sens à la construction d'un modèle ?
- Est-il nécessaire que les élèves maîtrisent les modèles (mathématisation verticale) pour les placer dans une situation de modélisation ?
- Est-il possible pour l'enseignant de penser un parcours d'apprentissage-enseignement de la modélisation au collège ?

L'objectif de ce texte est de rendre compte des réflexions issues de ces questionnements à partir de situations proposées en classe sur diverses notions, et de certaines productions d'élèves qui ont été analysées. Nous tenterons de répondre à ces questions en regardant comment chacune de ces situations s'insère dans les schémas présentés ci-dessus et nous chercherons à comprendre ce qu'elles nous en disent. Notons cependant que les situations n'ont pas été construites à partir de ces schémas de la modélisation.

1. Des situations pour travailler la mathématisation horizontale

Dans le schéma de Yvain-Prebiski (2018) le premier passage à l'intérieur de la mathématisation horizontale est le choix d'un fragment de réalité. Dans sa thèse, elle cherche à proposer des outils afin que ce choix de fragment de réalité soit dévolu aux élèves. Cependant, au collège la dévolution aux élèves du choix de fragment de réalité nous paraît relativement complexe.

1.1. « La rumeur »

La situation « la rumeur » vécue en classe de 4ème nous paraît en être une illustration. Cette situation a été présentée lors de l'atelier et en voici le déroulé proposé par l'animateur :

- Au temps 0, je décide de lancer une rumeur qui sera matérialisée par un papier. Avoir un papier signifie être au courant de la rumeur.
- Au temps 1, je mets au courant trois personnes de la rumeur en leur distribuant un papier jaune.
- Au temps 2, les trois personnes qui viennent d'apprendre la rumeur vont à leur tour mettre trois nouvelles personnes au courant en leur distribuant un papier bleu.
- Au temps 3, les trois personnes qui viennent d'apprendre la rumeur vont à leur tour l'apprendre à 3 nouvelles personnes en leur distribuant un papier vert.
- Combien de personnes sont mises au courant au temps 3 ?

A propos du milieu dans lequel sont installés les élèves, plusieurs participants ont évoqué la distance avec le réel, la situation étant à leurs yeux trop éloignée de la réalité. Nous avons précisé qu'il s'agissait d'un milieu pseudo-réel. Selon nous, la réalité a trop de contraintes qui rendraient le travail de l'élève trop compliqué au vu de l'objectif visé, construire le sens de la puissance pour des élèves de 4ème. Cet écart entre la réalité et la situation proposée est discuté avec les élèves en classe : ils s'accordent rapidement sur le fait que la propagation d'une rumeur ne répond pas à une règle mathématique.

Selon nous, le choix de cette pseudo-réalité effectué par le professeur et discuté avec les élèves permet à tous les élèves de rentrer dans l'activité (tous proposent un résultat) et à ceux qui utilisent le modèle additif d'en comprendre l'inefficacité. L'utilisation du matériel (papiers de couleurs) permet l'autocontrôle et la rétroaction. La situation est vécue une seconde fois par les élèves avec comptage des papiers verts à l'issue de l'expérience (retour au monde pseudo-réel). Le cycle de la modélisation est à notre sens enclenché et va continuer à fonctionner avec la même situation mais avec 4 personnes mises au courant à chaque temps (« La rumeur par 4 ») puis 5 personnes puis 6… C'est à partir des écrits d'élèves sur lesquels apparaissent des produits de plusieurs fois le même facteur que la notion de puissance va être abordée.

La situation réelle de la rumeur capte l'attention de tous les élèves, le passage au fragment de pseudo-réalité qui permet d'obtenir un problème susceptible d'un traitement mathématique est à la charge du professeur car trop complexe pour des élèves de cycle 4. Les élèves doivent mobiliser un modèle de multiplications itérées.

1.2. « Le château de cartes »

La situation du château de cartes a été, dans un premier temps, proposée aux élèves à partir d'un support qui correspondait à un problème susceptible d'un traitement mathématique. Aucune situation réelle correspondante ne leur était montrée.

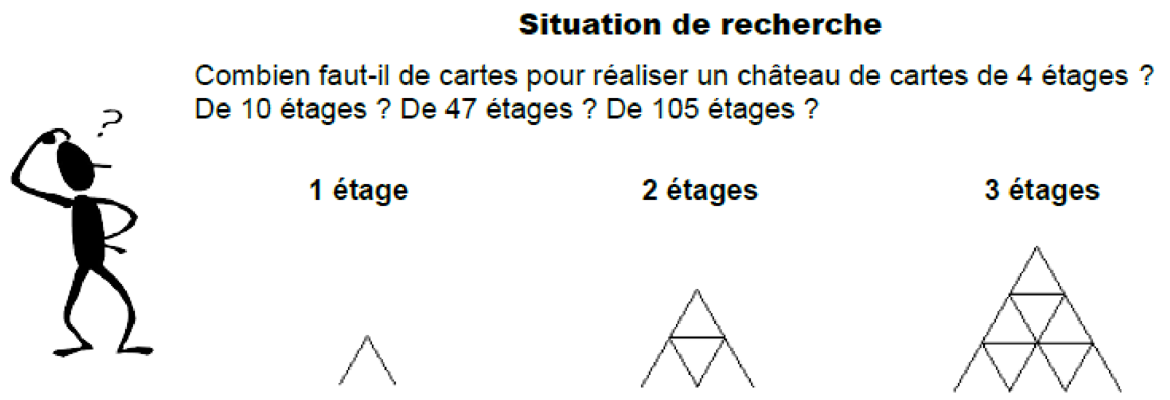


Figure 17 : *Problème donné initialement*

Nous avons alors constaté que tous les élèves ne réussissaient pas à se mettre en activité, ne comprenant pas les représentations qui leur étaient imposées. Le professeur a donc cherché une situation réelle pour permettre au cycle de la modélisation d'être déclenché dés le départ.

De la même façon la situation est proposée dans l'atelier comme elle peut l'être en classe.

Une vidéo[47] récupérée sur Youtube est visionnée par les participants. On peut y voir un homme qui construit un château de cartes de 6 étages. Il faut noter que le numéro des étages apparaît dans la vidéo.

Il est demandé aux élèves de représenter la situation. Nous avons pu observer que les productions obtenues lors de l'atelier sont identiques à celles obtenues en classe. Les élèves ont fait deux types de représentation. L'une est correcte, l'autre ne l'est pas car des cartes sont représentées à la place de la table qui sert de support.

***Figure** 18:Une image de la vidéo.*

La représentation de la situation par les élèves permet de passer de la situation réelle à un problème susceptible d'un traitement mathématique. La représentation peut être vue comme un choix d'un fragment de réalité et de ses aspects pertinents.

Il est ensuite demandé aux élèves de calculer le nombre de cartes pour un château de cinq étages. Cette étape vise la dévolution du problème. Lorsque la réponse est validée, on demande de

[47] https://www.youtube.com/watch?v=XsLW48hX4o4

calculer le nombre de cartes pour un château de cartes de dix étages, puis toujours après validation de quarante-sept étages et enfin de cent cinq étages.

La recherche du nombre de cartes du château de cinq et dix étages permet aux élèves de mettre en relation des aspects retenus et de pouvoir entrer dans la mathématisation verticale, c'est-à-dire de chercher un procédé permettant de calculer le nombre de cartes. (figure 5)

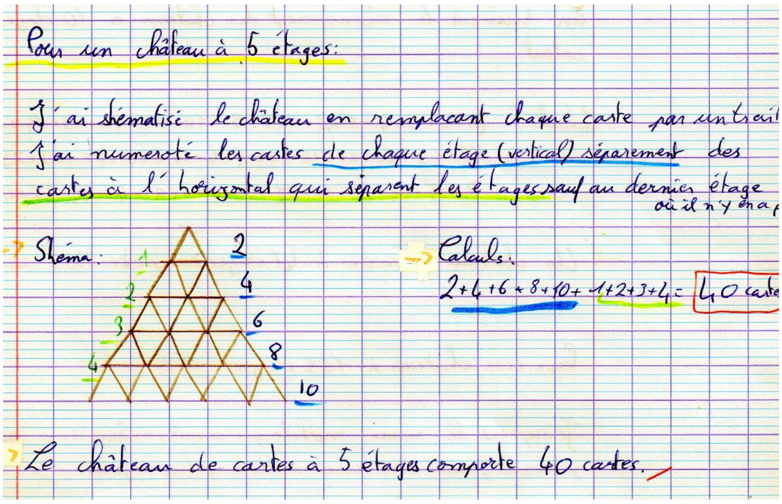
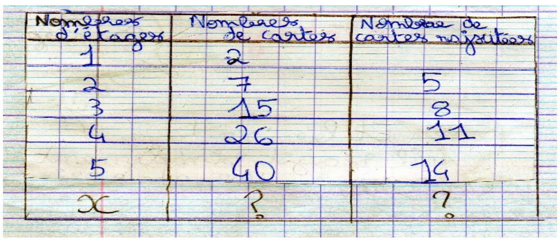


***Figure 19**: Calcul séparant les cartes horizontales et verticales*

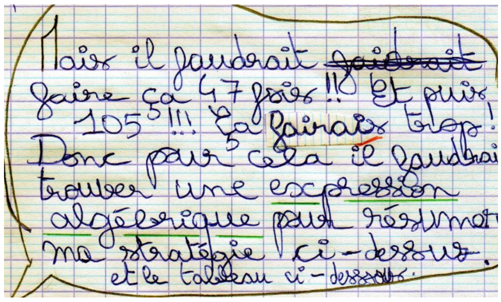
Certains élèves passent de la mathématisation horizontale à la mathématisation verticale après le château de cinq étages en pensant au modèle de la proportionnalité. C'est en faisant fonctionner le modèle dans sa totalité avec la confrontation à la situation réelle que les élèves prennent conscience de l'inefficacité du modèle choisi. Un des objectifs d'enseignement est ici de les amener à avoir un regard critique sur les modèles qu'ils utilisent.

Le saut dans la variable didactique du numéro de l'étape disqualifie le comptage. Des élèves cherchent à utiliser un modèle algébrique non maîtrisé à ce moment de l'année (figure 6). D'autres élèves cherchent un modèle algorithmique (le tableur) qui sera développé dans la suite de l'activité. La situation permet de donner du sens à ces modèles sans que les élèves ne les maîtrisent complètement.

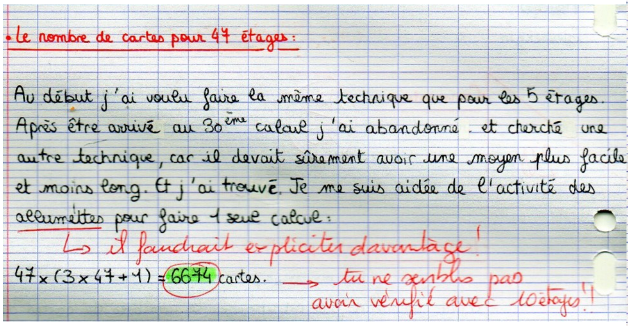


Nombres d'étages	Nombres de cartes	Nombre de cartes rajoutées
1	2	
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5	40	14
x	?	?

***Figure 20:** Production d'un élève*



Quelques élèves (figure 7) ont pu réinvestir une activité précédente et utiliser un modèle algébrique qu'ils pourront ensuite présenter à la classe et qui pourra être discuté.



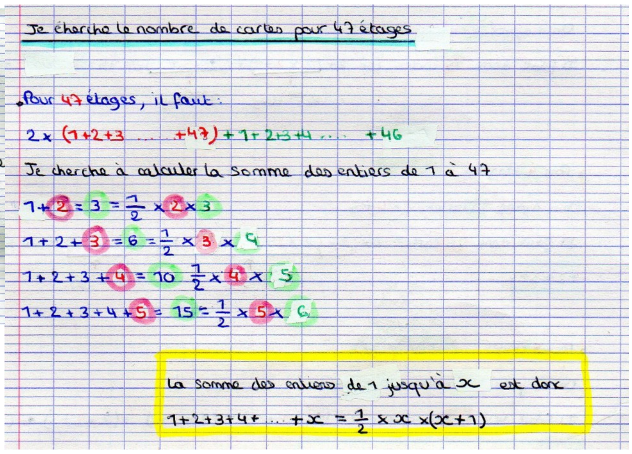


***Figure 21**: Deux productions d'élèves qui cherchent à utiliser un modèle déjà travaillé en classe.*

1.3. « Les dés du diable »

C'est une situation de jeu inspirée d'un document de l'académie de Nantes (TraAm ; 2019-2020) qui est lui-même inspiré d'une vidéo[48] de Bernard Delyon, chercheur au centre Henri Lebesgue (2016).

La règle du jeu est la suivante : « un joueur choisit un dé, le second joueur choisit un des deux dés restants ; les deux joueurs lancent leur dé et le vainqueur est celui qui a le plus grand résultat ».

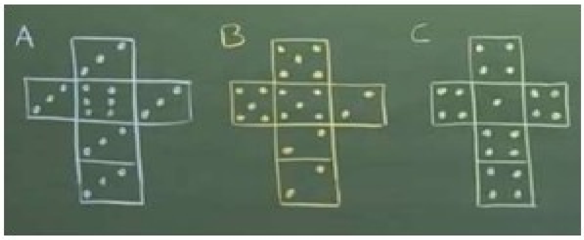


***Figure 22**: Les dés du diable*

La consigne donnée à des élèves de 3ème est : « tu joues contre un élève de la classe, tu as envie de gagner, quelle est ta stratégie ? » Dans cette activité, qui est selon nous une situation réelle, les élèves n'ont pas de modèle à leur disposition. Ils donnent d'abord des réponses intuitives, assez courtes, plutôt non argumentées.

Ils sont ensuite mis en situation par deux avec les trois dés et la pratique du jeu va leur permettre d'approfondir leur réflexion notamment en prenant conscience que, pour chaque dé, la victoire dépend du dé contre lequel on joue.

Se posent alors les questions du choix d'un fragment de réalité et du choix de ses aspects pertinents. Ce sont les productions d'élèves qui amènent l'enseignant à proposer une étude plus restreinte : qui gagne entre le dé A et le dé B ?

En effet, certains élèves restent dans l'expérience du jeu avec des propositions en relation avec ce qu'ils ont vécu (« Le dé C gagne majoritairement contre le dé A »). Ils se placent alors sans le savoir dans le modèle fréquentiste. D'autres commencent à se placer dans le modèle probabiliste avec des propositions du type « Le dé B a 3 chances sur 6 de gagner ». Après discussion autour de ces nouvelles productions, les élèves ne réussissent pas à se mettre d'accord sur la stratégie à adopter avec les dés A et B.

Le professeur propose alors une nouvelle consigne pour les amener à explorer le modèle probabiliste : « Combien y a-t-il de chances d'obtenir 3 et 2 avec les dés A et B ? ». A ce stade le professeur propose un problème susceptible d'un traitement mathématique (cycle de Yvain-Prébiski). Les élèves trouvent sans difficulté (« parce que ça se voit » disent-ils) qu'il y a 5

[48]https://www.youtube.com/watch?v=LbGTGZ_Gm44

chances sur 6 d'obtenir 3 avec le dé A et 3 chances sur 6 d'obtenir 2 avec le dé B mais ils sont face à une difficulté pour répondre à la consigne. Cette gestion de l'activité amène les élèves à entrer dans la mathématisation verticale à ce moment.

Différentes solutions pour le nombre de chances d'obtenir 3 et 2 en même temps sont proposées et trois modèles sont utilisés : la moyenne avec la réponse « 4 chances sur 6 », la multiplication avec « 15 chances sur 36 » et l'addition avec « 8 chances sur 12 ». Pour valider ou invalider ces réponses, les élèves disent, comme pour les cas jugés faciles, « que ça se voit ». Les élèves ont alors besoin de passer par une représentation de la situation pour évaluer les modèles et valider le produit des probabilités. La représentation à leur disposition est le tableau à double-entrée (qui est objet d'enseignement dès la 6ème), l'arbre des possibles n'ayant pas encore été abordé et n'apparaissant jamais de manière intuitive dans les productions (cette activité sera d'ailleurs l'occasion d'introduire cette représentation). La lecture des tableaux, comme représentation du monde réel, permet alors de confronter les solutions issues des modèles, d'en valider une et de conclure sur la stratégie à adopter pour jouer.

Pour finir, un retour sur les expériences avec les dés permet de confronter le modèle fréquentiste avec le modèle probabiliste, tous les deux en construction. Cette situation a permis aux élèves de vivre le cycle de modélisation dans son intégralité sans qu'ils aient la maîtrise du modèle visé. Elle permet ainsi de lui donner du sens.

2. Des situations pour travailler la mathématisation verticale

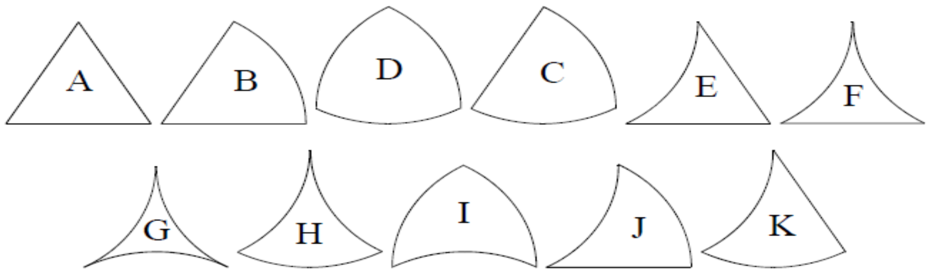
Les situations précédentes peuvent être perçues comme des situations-problèmes et l'on pourrait aussi analyser plus finement la mathématisation verticale correspondante. Mais nous proposons de regarder cette mathématisation verticale sur de nouvelles situations qui ne sont pas des situations réelles mais qui sont dès le départ des situations mathématiques. Il s'agit alors d'une modélisation interne aux mathématiques.

2.1. « Les curvicas triangulaires »

Dans ce problème (figure 9), il s'agit ici de comparer des grandeurs. Pour l'aire, on attend un recours à l'inclusion et au découpage-recollement : un calcul algébrique permet alors d'évaluer toutes les aires en fonction de celles du triangle et de la lunule. Pour le périmètre, une évaluation en deux unités, la longueur d'un bord droit et longueur d'un bord courbe avec, de plus, l'hypothèse qu'un bord courbe est plus long qu'un bord droit, permet de classer les périmètres.

Cette situation est donnée en classe de 4ème. Elle est gérée en deux temps. On prévoit un premier temps individuel d'une heure à l'issue duquel les productions sont ramassées. Les productions sont analysées pour constituer des groupes pour un deuxième temps pendant lequel les élèves se mettent d'accord sur les stratégies et les réponses à donner. Les groupes sont constitués pour qu'il y ait une hétérogénéité des stratégies dans chacun des groupes afin de permettre des débats. Les productions des groupes sont aussi ramassées et analysées pour être montrées aux élèves.

Les pièces du Curvica Triangulaire s'obtiennent à partir d'un triangle équilatéral dont on peut choisir de creuser, bomber ou laisser en l'état chaque côté :



Classer ces pièces dans l'ordre croissant de leurs périmètres, puis dans l'ordre croissant de leurs aires.

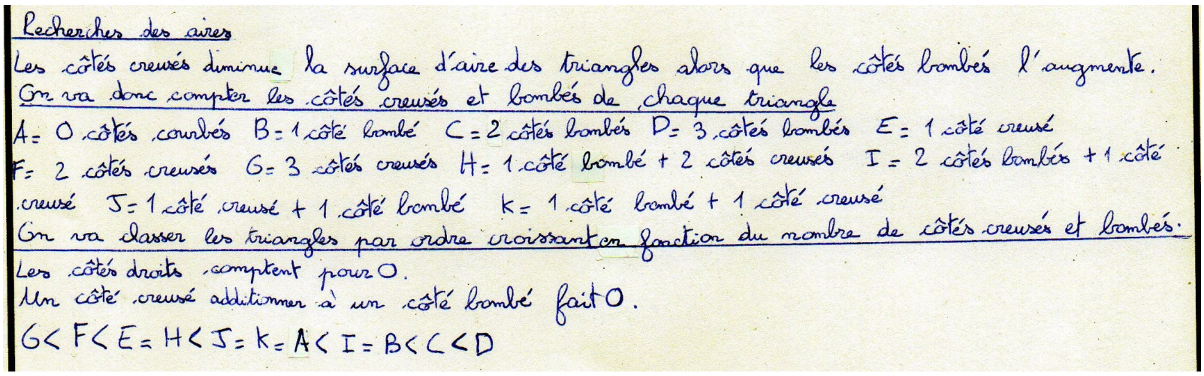
Figure 23*: Texte du problème inspiré de Fromentin (1982).*

Quelle traduction mathématique les élèves font-ils du problème posé ?

Pendant le premier temps individuel, une grande partie des élèves cherchent à calculer l'aire et le périmètre des figures. Ils utilisent d'abord un modèle calculatoire à partir de formules apprises les années précédentes avant de reconnaître que ce modèle n'est pas pertinent ici. Pour quasiment tous les élèves une situation concernant les aires et les périmètres mobilise nécessairement un modèle calculatoire. Un des objectifs de la situation est de rompre avec cette traduction. Il est à noter que certains élèves réussissent à donner une estimation du périmètre de chacune des figures mais ils sont beaucoup plus en difficulté pour en calculer l'aire.

Une fois que les élèves ont compris que les calculs des deux grandeurs sont trop difficiles pour eux, ils se mettent à chercher d'autres modèles.

Le modèle le plus utilisé par les élèves est la comparaison des aires à partir des surfaces en observant qu'un côté bombé donne une aire plus grande qu'un côté droit ou creusé (Figure 9). Pour les périmètres, ils les comparent à partir de la définition du périmètre en prenant conscience que la longueur d'un côté droit est inférieure à celle d'un côté creusé ou bombé.



Recherches des aires

Les côtés creusés diminue la surface d'aire des triangles alors que les côtés bombés l'augmente.

On va donc compter les côtés creusés et bombés de chaque triangle

A= 0 côtés courbés B= 1 côté bombé C= 2 côtés bombés D= 3 côtés bombés E= 1 côté creusé F= 2 côtés creusés G= 3 côtés creusés H= 1 côté bombé + 2 côtés creusés I = 2 côtés bombés + 1 côté creusé J= 1 côté creusé + 1 côté bombé k= 1 côté bombé + 1 côté creusé

On va classer les triangles par ordre croissant en fonction du nombre de côtés creusés et bombés.

Les côtés droits comptent pour 0.

Un côté creusé additionner à un côté bombé fait 0.

G< F< E= H< J= k= A< I= B< C< D

Figure 24*: Compensation des côtés bombés et creux pour l'aire*

Dans certaines productions (figure 10), les élèves donnent une valeur numérique aux différents côtés puis effectuent des opérations pour obtenir un résultat pour les grandeurs aire et périmètre. Ils se rapprochent ainsi de leur premier modèle calculatoire.

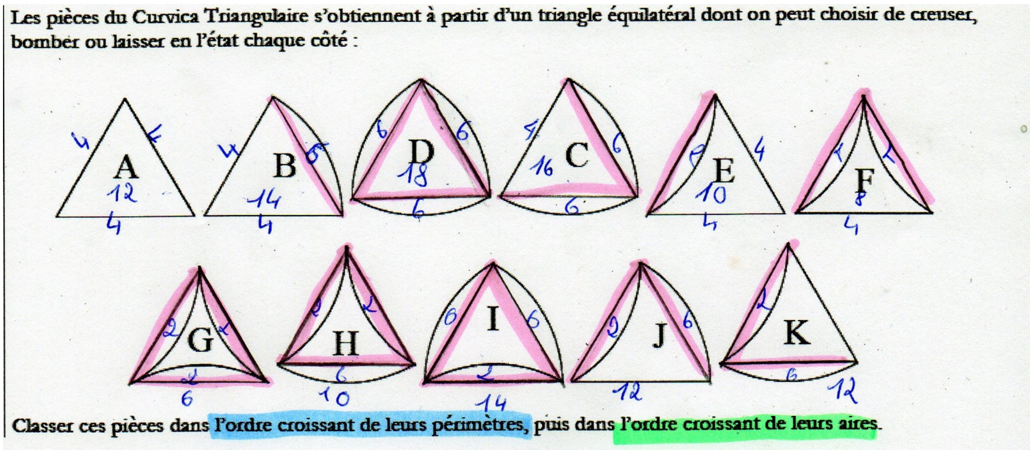


Figure 25: *Production d'un élève avec des codages entiers.*

Dans d'autres productions (figure 11), on retrouve la même stratégie mais des nombres relatifs sont utilisés pour les côtés bombés et creusés afin de comparer les aires. La valeur zéro est alors donnée au côté droit.

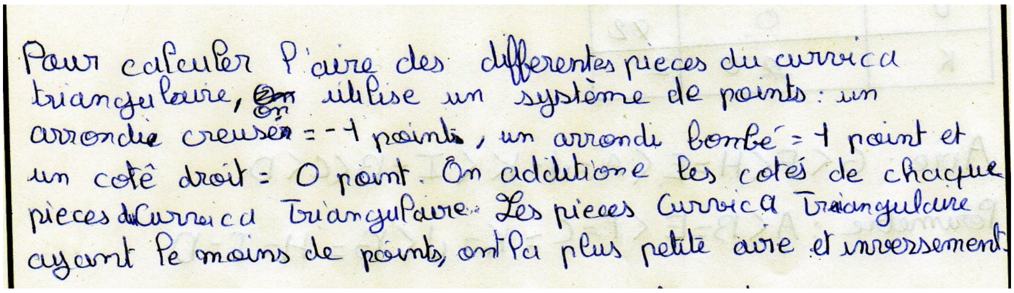

Pour calculer l'aire des differentes pieces du curvica triangulaire, ~~On~~ On utilise un système de points : un arrondie creusée = -1 points, un arrondi bombé = 1 point et un coté droit = 0 point. On additione les cotés de chaque pieces du Curvica Triangulaire. Les pieces Curvica Triangulaire ayant le moins de points, ont la plus petite aire et inversement

Figure 26*: Production d'un autre élève avec des relatifs.*

Cette situation est clairement à placer dans les cycles au niveau de la mathématisation verticale. Les élèves travaillent sur des figures géométriques qu'ils ne connaissent pas mais qu'ils cherchent à intégrer dans un cadre mathématique : ils proposent et choisissent des modèles. Ils cherchent à utiliser les modèles qu'ils connaissent, avant de prendre conscience de l'inefficacité de certains et peuvent nous surprendre en utilisant des modèles inattendus et performants pour cette situation particulière, mais qui échoueraient dans d'autres cas.

« Démontrer qu'on obtient toujours 6 »

Cette situation est donnée en classe de 4ème comme situation diagnostique pour le parcours d'apprentissage-enseignement de l'algèbre à ce niveau.

Choisir un nombre, ajouter 3 à ce nombre, multiplier le résultat par 2 et enfin retrancher le double du nombre choisi au départ.
Démontrer que l'on obtient toujours 6 comme résultat final quel que soit le nombre choisi au départ.

Les productions des élèves nous montrent les différents paliers d'apprentissage mais aussi les différentes compétences mobilisées. La consigne demande de démontrer que l'on obtient toujours 6, il est donc attendu que les élèves mobilisent le modèle algébrique. Mais ce modèle est encore en construction pour une grande majorité d'élèves de 4ème.

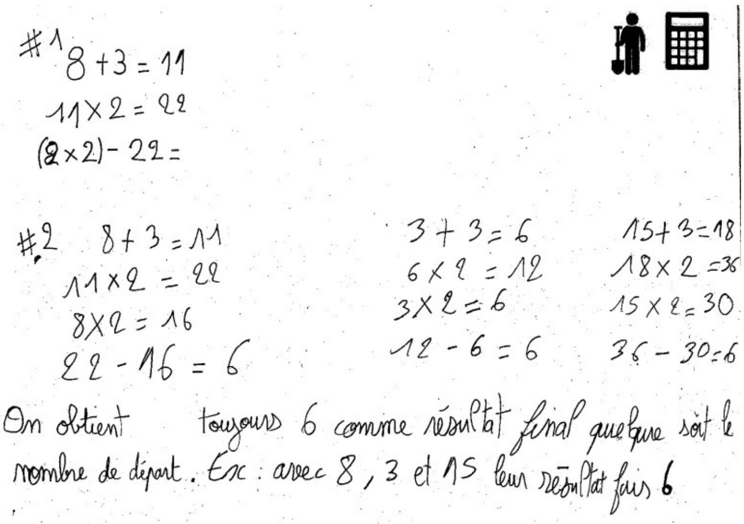


***Figure 27**: Production d'un élève qui indique les calculs pas à pas.*

Certains élèves utilisent des exemples pour démontrer. Parmi les productions, certaines diffèrent par les écritures mathématiques des calculs. La compétence « Représenter » est mobilisée dans ces productions mais elle n'est maîtrisée que pour certains (figure 14), d'autres effectuant les calculs pas à pas (figure 13). Cette présentation des calculs est un palier d'apprentissage important et son absence est un véritable obstacle à l'écriture d'expressions algébriques.

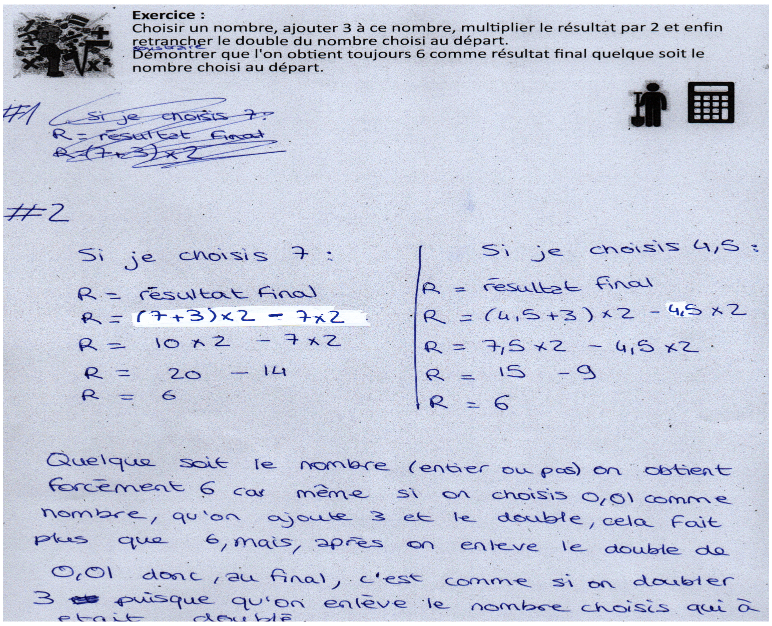


***Figure 28**: Production d'un élève qui élabore un raisonnement*

Ces élèves sentent qu'il existe une raison – le mot « logique » est certaines fois utilisé. Ils essayent d'expliquer cette « logique » avec leurs mots, ce qui rend la compréhension difficile. Par exemple, la démarche présentée après les calculs dans la figure 14 relève de ce que Balacheff (2019) appelle exemple générique. Les élèves mobilisent ici la compétence « Raisonner ».

On peut voir à travers ces différentes productions que la compétence « Modéliser » est la compétence experte, elle ne peut être mobilisée que si les autres compétences le sont aussi.

On peut voir aussi qu'il est possible de faire travailler les élèves sur ces compétences sans qu'ils maîtrisent complètement les modèles attendus. Il nous semble que ce travail sur les productions permet de donner du sens au modèle à construire.

3. Modéliser au collège à l'aide de modèles déjà construits

Les propriétés de Pythagore et de Thalès, et la trigonométrie, permettent de travailler plus particulièrement la compétence « Modéliser ». Ces connaissances, une fois construites, peuvent être mobilisées dans des situations « réelles » ou « pseudo-réelles ». Un travail est proposé en classe pour différencier trois types de situations :

- des situations réelles que les élèves vont devoir apprendre à représenter pour effectuer des choix de fragments de réalité,
- des situations à partir d'une configuration géométrique de base,
- des situations à partir d'une figure complexe, composée de plusieurs configurations de base.

Une configuration de base est une figure géométrique correspondant à un savoir travaillé en classe. Par exemple le triangle rectangle pour le théorème de Pythagore (Figure 15).

Un travail régulier doit être fait en classe pour que les élèves lient les propriétés géométriques à leur configuration de base. Ce travail permet aux élèves d'acquérir une praxéologie qu'ils peuvent mobiliser lorsqu'ils sont confrontés à une figure complexe.

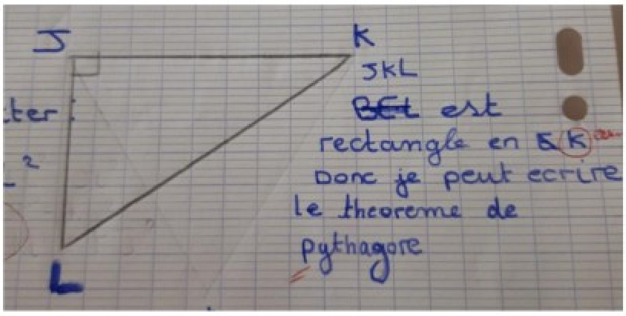


Figure 29*: Exemple de configuration de base*

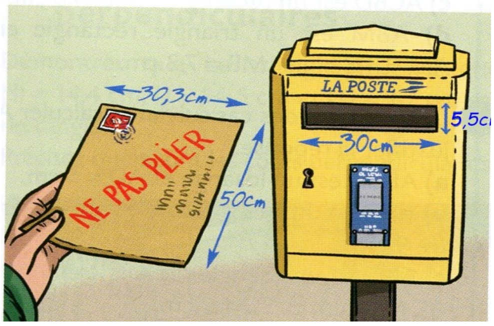


Figure 30*: La boîte aux lettres*

Voici deux situations réelles (Figure 16 et Figure 17) données dans nos classes et qui permettent de travailler la compétences « modéliser » après que les modèles ont été construits.

> Alice veut installer un panier de basket sur un mur à 3,05m de haut.
> Elle utilise une échelle pour pouvoir fixer son panier.
> Si l'angle entre l'échelle et le sol est inférieur à 45°, l'échelle risque de glisser.
> Alice prend-elle des risques en posant l'échelle à 2,5m du mur ? Justifie ta réponse.

Figure 31*: Le panier de basket*

Ces situations amènent les élèves à des représentations qui peuvent s'apparenter à des configurations de base ou des figures complexes.

Voici deux exemples (figures 18 et 19) de figures complexes données par les enseignants.

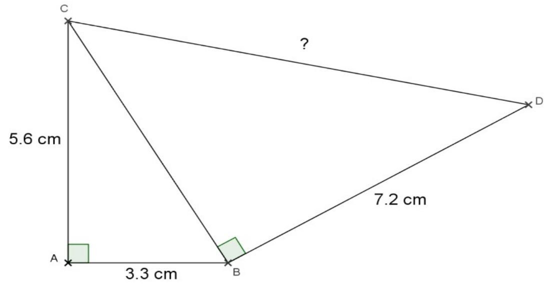


Figure 32: *Figure complexe utilisant Pythagore*

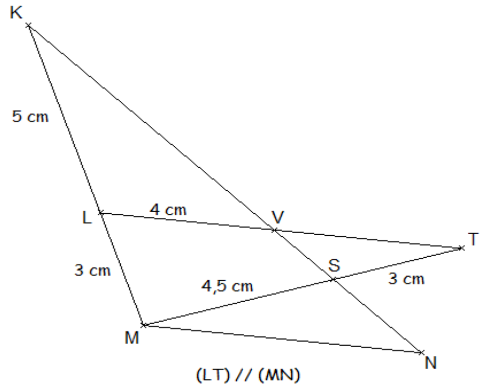


Figure 33*: Figure complexe utilisant Thalès*

Voici deux exemples (Figure 20) de figures complexes créées par les élèves pour travailler la propriété de Pythagore à partir de la consigne suivante : « créer une figure complexe à partir de laquelle il sera possible d'extraire une ou plusieurs des configurations de base de la propriété de Pythagore ».

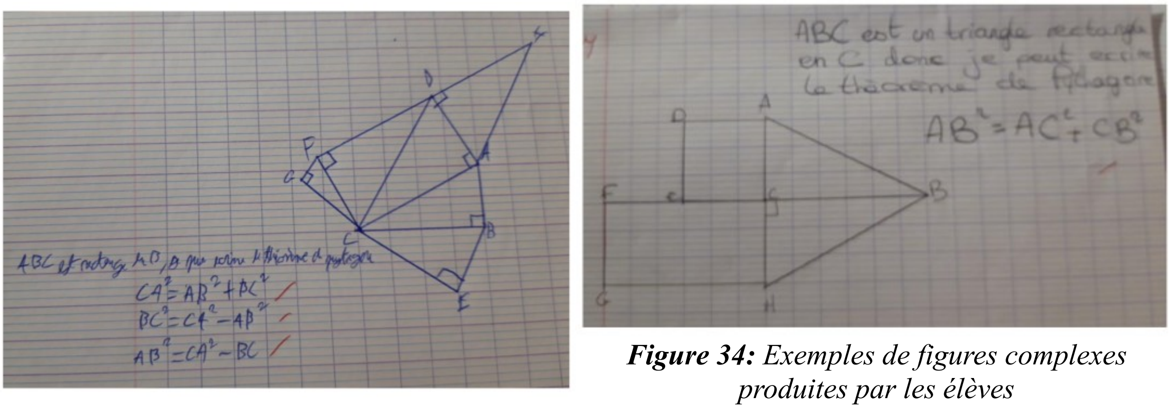


Figure 34: *Exemples de figures complexes produites par les élèves*

Représenter une situation réelle puis en extraire une configuration de base c'est faire un choix pertinent à partir du fragment de réalité choisi. C'est l'apprentissage d'une praxéologie qui nécessite d'être travaillé dans un parcours d'apprentissage-enseignement.

Ces connaissances (propriétés de Pythagore et de Thalès, trigonométrie ...) donnent l'occasion de faire ce travail plusieurs fois au cycle 4 afin de maîtriser davantage les compétences mathématiques.

Conclusion

Nous rappelons que les situations présentées dans ces actes n'ont pas été construites à partir du cadre didactique utilisé dans cet article. Il nous a semblé intéressant de confronter les cadres de modélisation présentés en introduction à nos situations pour lesquelles la modélisation n'est pas un objectif principal d'apprentissage. Nous avons cherché à comprendre où chacune de ces situations peuvent se placer dans ces cadres et de mieux comprendre leur impact dans un travail plus large sur la modélisation.

Nous pouvons ainsi situer les situations propres à notre travail dans un cycle inspiré des références théoriques présentées dans l'introduction (figure 21).

Les situations proposées dans cet article et lors de l'atelier nous permettent d'esquisser quelques réponses aux questions posées en introduction.

« La rumeur », « le château de cartes » et « les dés du diable » nous montrent que la dévolution de la situation aux élèves peut être difficile car le choix de fragments de réalité et le choix de sa pertinence sont complexes pour des élèves de cycle 4. La situation réelle de la rumeur est trop complexe pour être entièrement dévolue aux élèves. Celle du jeu de cartes pourrait l'être mais prendrait du temps et risque d'être difficile à gérer sur le plan de la discipline. Celle des dés peut l'être mais le dépassement de l'expérimentation nécessite l'intervention du professeur.

Afin de permettre la dévolution de la situation aux élèves, l'enseignant se doit de leur proposer un travail spécifique sur son choix de fragments de réalité avant d'amener les élèves à proposer l'utilisation de modèles connus ou pas.

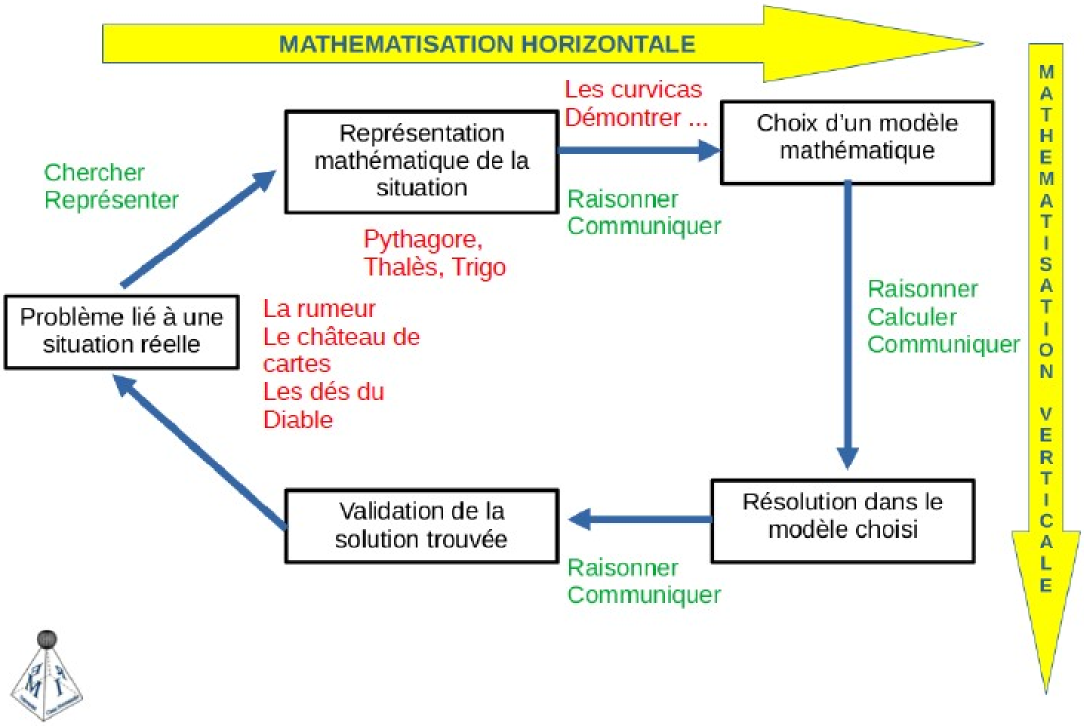


Figure 35: *Un cycle de modélisation adapté à notre travail*

Les situations proposées ont aussi montré que les élèves n'ont pas toujours besoin de connaître le modèle utile à la résolution du problème posé mais qu'ils peuvent participer à la construction de ces modèles et que par l'étude qui en est faite, particulièrement à partir de leurs productions , ils prennent du sens. Un nouveau modèle est toujours une économie de pensée et se construit dans une situation où d'autres modèles perdent leur pertinence. La difficulté pour l'enseignant réside alors dans le choix d'une situation pour laquelle la résolution montre la pertinence d'un nouveau modèle qui n'appartient pas encore au bagage praxéologique des élèves. Cette situation doit par contre permettre aux élèves de comprendre le problème et d'amorcer une première solution en utilisant des modèles intégrés les années précédentes.

Le travail sur les productions des élèves permet au professeur de prendre connaissance des modèles à disposition de ses élèves et ainsi de pouvoir construire un parcours dans lequel un nouveau modèle pourra être construit. Le cycle de Sonia Yvain Prébiski peut être un support théorique pour penser un parcours d'apprentissage-enseignement sur la modélisation.

Références bibliographiques

Balacheff (2019). *L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration.* XXVIe Colloque CORFEM, Juin 2019, Strasbourg, France. hal-02981131

Cabassut, R. (2010) – *Démarche d'investigation et modélisation*. Actes des colloques C2IREM collège - IREM de Strasbourg.

Fromentin, J. (1982). Le curvica. In *Jeux I. Les jeux et les mathématiques*, pp. 136-138. APMEP. https://www.apmep.fr/de-Jeux-1-a-Jeux-4#Jeux-1-les-jeux-et-les-mathematiques.

Girard, J-C. (1999) – *Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation ?* Repères IREM n°36 - IREM de Lyon.

Hankeln, C. & Hersant M. (2020). Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée. *Éducation et Didactique.*

Kuzniak, A., & Vivier, L. (Dir.) (2011). *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique.* Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz. IREM de Paris.

Rivière, D. (2019). https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupes-de-recherche/traam/2019-2021/les-des-du-diable-1283653.kjsp?RH=PEDA

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématiques à l'école, une étude cas. *Education et Didactique.*

Yvain-Prebiski, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.* Thèse, Université de Montpellier.

Introduction de l'algorithmique dans le cadre d'enseignements interdisciplinaires au cycle 2 du primaire en France

Michèle COUDERETTE[49]
LDAR, Univ Paris Est Créteil, F-94010 Créteil, France
IRL CRM-CNRS, Université de Montréal, Canada
Dominique LAVAL[50]
CY Cergy Paris Université, F-95000 Communauté d'Agglomération de Cergy-Pontoise, France
INSPE de l'académie de Versailles, F-78100 Saint-Germain-en-Laye, France

Résumé. Depuis la rentrée 2016, une initiation à la programmation informatique est inscrite dans les programmes de l'école primaire en France. Celle-ci permet d'associer des activités de repérage dans l'espace, comme le codage du déplacement d'un robot. Par ailleurs, une telle initiation offre l'opportunité d'un travail interdisciplinaire dans le domaine de la littérature de jeunesse, avec la compréhension et la transcription de récits en programmes informatiques implémentables dans un environnement numérique. Dans cet atelier, les participants sont amenés à résoudre deux tâches de programmation informatique distinctes, pour des élèves de 6 à 8 ans : déplacement d'un robot dans un tunnel et transcription d'un conte en des séquences algorithmiques afin de créer une animation implémentable dans Scratch Junior. La résolution de ces tâches nécessite un cycle de modélisation connectée à l'informatique. Se pose alors la question des obstacles que les élèves peuvent rencontrer, lors des différentes phases de modélisation connectées à l'algorithmique et à la programmation.

Mots-clés. Algorithmique au cycle 2, Interdisciplinarité, Modélisation, Robotique, Déplacement dans un tunnel, Scratch Junior, Espace de travail algorithmique, Codage, Logique, Raisonnement, Conte.

Abstract. Since the start of the 2016 school year, an introduction to computer programming has been included in the French primary school curriculum. This makes it possible to associate spatial location activities, such as coding the movement of a robot. Furthermore, such an initiation offers the opportunity for interdisciplinary work in the field of children's literature, with the understanding and transcription of stories into computer programs implementable in a digital environment. In this workshop, participants are asked to solve two distinct computer programming tasks, for students aged 6 to 8: moving a robot in a tunnel and transcribing a story into algorithmic sequences to create an animation implementable in Scratch Junior. Solving these tasks requires a modeling cycle connected to IT. The question then arises of the obstacles that students may encounter during the different modeling phases connected to algorithms and programming.

Keywords. Algorithmic, Interdisciplinary work, Modelling, Robotic, Moving in a tunnel, Scratch Junior, Algorithmic Working Space, Coding, Logic, Reasoning, Tale.

Resumen. Desde el inicio del año escolar 2016, se ha incluido en el plan de estudios de la escuela primaria una introducción a la programación informática. Esto permite asociar actividades de localización espacial, como por ejemplo codificar el movimiento de un robot. Además, dicha iniciación ofrece la oportunidad de realizar un trabajo interdisciplinario en el campo de la literatura infantil, con la comprensión y transcripción de cuentos en programas informáticos implementables en un entorno digital. En este taller, se pide a los participantes que resuelvan dos tareas distintas de programación informática, para estudiantes de 6 a 8

[49] michele.couderette@u-pec.fr

[50] dominique.laval@cyu.fr

años: mover un robot en un túnel y transcribir una historia en secuencias algorítmicas para crear una animación implementable en Scratch Junior. Resolver estas tareas requiere un ciclo de modelado conectado a TI. Surge entonces la pregunta de los obstáculos que los alumnos pueden encontrar durante las diferentes fases de modelado relacionadas con los algoritmos y la programación.

Palabras clave. Algorítmica, Trabajo interdisciplinario, Modelado, Robótica, Moverse en un túnel, Scratch Junior, Espacio de trabajo algorítmico, Codificación, Lógica, Razonamiento, Cuento.

Zusammenfassung: Seit Beginn des Schuljahres 2016 ist eine Einführung in die Computerprogrammierung Teil des französischen Grundschullehrplans. Dadurch ist es möglich, räumliche Standortaktivitäten zuzuordnen, um beispielsweise die Bewegung eines Roboters zu kodieren. Darüber hinaus bietet eine solche Einführung die Möglichkeit zur interdisziplinären Arbeit im Bereich der Kinderliteratur mit dem Verstehen und Schreiben von Geschichten in Computerprogramme, die in einer digitalen Umgebung umsetzbar sind. Die Teilnehmer sollen zwei unterschiedliche Computerprogrammieraufgaben für Schüler im Alter von 6 bis 8 Jahren lösen: einen Roboter in einem Tunnel bewegen und eine Geschichte in algorithmische Sequenzen umwandeln, um eine in Scratch Junior umsetzbare Animation zu erstellen. Zur Lösung dieser Aufgaben ist ein mit der IT verbundener Modellierungskreislauf erforderlich. Es stellt sich dann die Frage, auf welche Hindernisse Lernende während der verschiedenen Modellierungsphasen im Zusammenhang mit Algorithmen und Programmierung stoßen können.

Schlüsselwörter: Algorithmen, Interdisziplinarität, Modellierung, Robotik, Bewegung in einem Tunnel, Scratch Junior, Algorithmischer Arbeitsbereich, Kodierung, Logik, Argumentation, Märchen.

Introduction

Depuis la rentrée 2016, une initiation à la programmation informatique est inscrite dans les programmes de l'école primaire en France. Alors qu'au cycle 4, la programmation est un thème d'étude à part entière, au primaire, algorithmique et programmation sont désignés comme des objets transversaux pouvant être travaillés dans le champ des mathématiques, des sciences et technologies, du langage au travers d'activités de codage, de repérage et déplacements dans l'espace utilisant ou non des objets numériques tels que des robots de planchers ou des applications logicielles. Le document Eduscol « initiation à la programmation au cycle 2 et 3 » (MEN, 2016, p. 1) précise qu'une « initiation à la programmation pourra être une opportunité pour des travaux interdisciplinaires : avec le champ questionner le monde au cycle 2, par exemple, autour de la question du repérage ou avec le français, dans le développement des usages du langage oral ou écrit, notamment en créant des histoires illustrées par de courtes animations créées par les élèves ».

Dans notre atelier, nous avons présenté deux situations distinctes introduisant des concepts informatiques au cycle 2, l'une utilisant des robots Blue-Bot (situation des tunnels présentée par Michèle Couderette), l'autre l'environnement numérique ScratchJr (le conte « Le lion et les trois buffles » de Dhouib et Angeli présentée par Dominique Laval). Il s'agit dans ces recherches de réfléchir à l'introduction de concepts algorithmiques dans des contextes d'interdisciplinarité. L'atelier s'est focalisé plus particulièrement sur les obstacles rencontrés par les élèves lors des phases de modélisation.

1. Programmer la traversée d'un tunnel par une Blue-Bot (M. Couderette)

Nous présentons dans cette première partie une situation, que nous appelons « traversée de tunnels » par commodité de langage. Les deux tâches issues de cette situation sont testées lors de deux séances de classe au cycle 2 (6, 7 ou 8 ans).

Précisons tout d’abord que la situation des tunnels prend son origine dans une recherche collaborative en cours avec trois enseignants d’école primaire. Le questionnement initial porte sur « comment l’informatique et notamment l’algorithmique peuvent-elles contribuer à la construction d’autres apprentissages, en particulier en mathématiques ? ».

Mise en contexte

Dans un premier temps, une vidéo d’un métro automatique entrant dans un tunnel est présentée aux élèves. Cette vidéo montre clairement l’absence de conducteur. Cette mise en contexte permet aux élèves d’entrer plus rapidement dans la compréhension des tâches telles qu’elles sont ensuite énoncées aux élèves.
Les deux situations de classe proposent de programmer un Blue-Bot pour que celui-ci se déplace d’une station A à une station B en traversant un tunnel droit ou un tunnel coudé (fig.1).

***Figure 1** : mise en contexte*

Les tunnels proposés aux élèves sont fabriqués de manière contraignante : (i) en carton sans la moindre marque pouvant indiquer leur longueur, (ii) suffisamment longs pour que les élèves ne puissent pas agir sur le Blue-Bot au cours de son déplacement. De ce fait, les élèves sont amenés à anticiper les déplacements dans leur entièreté et donc à produire puis tester un programme complet. Les situations répondent ainsi à un premier principe au cœur de la programmation, l’anticipation.

Deux séances précèdent les séances de « traversée de tunnels ». L’objectif de ces deux séances est de faire émerger le fonctionnement du robot, en particulier le repérage des différentes touches ainsi que leurs fonctions, en particulier les touches « effacer » pour vider la mémoire, « pause » pour suspendre quelques secondes le déplacement du Blue-Bot et la touche « GO » pour lancer le programme (fig.2). Le robot avance pas à pas, chacun des pas étant de 15 cm.

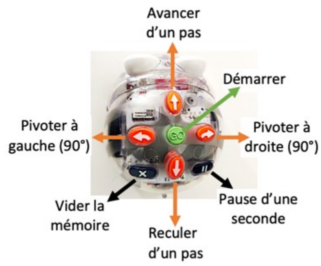


***Figure 2 :** Robot Blue-Bot*

1.1. Description des tâches

Première tâche : programmer un robot pour traverser un tunnel droit de 60 cm de longueur

Pour résoudre cette tâche, les élèves disposent de bandes graduées différentes (fig. 3).

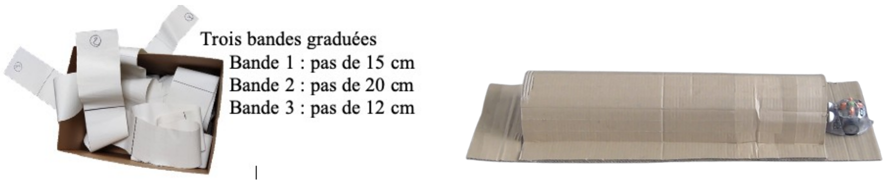


Figure 3 *: Tunnel droit et bandes graduées.*

Ces bandes sont construites de telle façon qu'elles peuvent toutes convenir pour mesurer les tunnels : avec la bande A, le tunnel mesure 4, mais avec la bande B, il mesure 3 et avec la bande C, il mesure 5. Pour autant, seule la bande A, graduée tous les 15 cm, convient car dans le pas du robot Blue-Bot.

La consigne formulée aux élèves est de « *programmer le déplacement d'un robot d'une station A (à l'entrée du tunnel) à la station B (à la sortie du tunnel)* ».

Pour pouvoir répondre à cette consigne, les élèves doivent donc basculer d'un cadre mathématique (mesure dans un système d'unité non conventionnel puis démarche d'investigation pour déterminer la bande idoine), à un cadre de programmation informatique (programmer les déplacements du robot).

Deuxième tâche : programmer un robot pour qu'il traverse un tunnel coudé

Les dimensions du tunnel sont indiquées sur la figure 4 ci-contre. Les élèves ont cette fois-ci à leur disposition des plans quadrillés différents. A l'inverse de la tâche précédente, plusieurs plans (plans 1 et 4) permettent de résoudre la situation et de produire un programme correct.

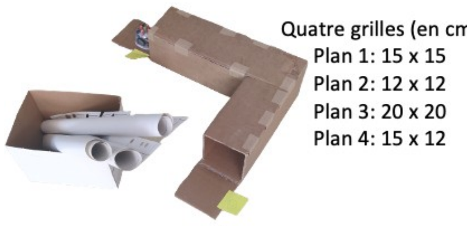


Figure 4 *: Tunnel coudé et plans quadrillés.*

Si la première situation a une dominante mathématique, cette deuxième situation met l'accent sur la programmation des robots. Il s'agit de réinvestir les connaissances et compétences construites lors de la résolution de la première tâche pour se focaliser sur la programmation des déplacements du robot.

La programmation demande une instruction supplémentaire (pivoter) ce qui peut paraitre sans réelles difficultés… Nous y revenons dans la section « premiers constats ».

1.2. Premiers constats

Un objet se révélant problématique : le Blue-Bot !

Signalons tout d'abord que le Blue-Bot, bien que son nom sous-entende qu'il soit un robot, est en réalité un automate. Il réagit à la pression de touches positionnées sur le capot et non à des évènements provenant de son environnement. Par commodité, nous gardons cette terminologie.

La manipulation du Blue-Bot fait apparaitre plusieurs sources potentielles de difficultés pour des élèves de cycle 2.

Les Blue-Bots sont des objets orientés, ce qui demande à l'élève de repérer chaque déplacement dans le repère du Blue-Bot et non pas par rapport à lui-même.

Les déplacements sont commandés différemment selon que l'on change de direction ou pas : pour se déplacer en ligne droite (avancer ou reculer), une seule commande suffit alors que pour se déplacer en tournant, deux sont nécessaires, l'une pour indiquer la direction (pivoter à droite ou à gauche) l'autre pour avancer.

Vider la mémoire s'opère par la touche « X ». Si la mémoire contient un premier programme, les nouvelles instructions se rajoutent à celles du programme initial. Or rien ne permet à l'élève de savoir si la mémoire est vide. Cet aspect cumulatif de saisie des commandes ne facilite ainsi pas l'interprétation des rétroactions du Blue-Bot.

Enfin, la longueur du pas du Blue-Bot est très proche de sa taille ce qui, nous le verrons par la suite, induira une technique non attendue de résolution du problème « traversée du tunnel droit ».

Des contributions réciproques aux apprentissages

Si, pour les élèves, l'objectif consiste à ce que le robot traverse le tunnel, les intentions didactiques des enseignants diffèrent.

La première tâche donne l'occasion aux enseignants de revenir sur des apprentissages mathématiques, en particulier ceux liés à la mesure : mesurer dans des systèmes non conventionnels, insister sur le lien entre étalon et résultat de la mesure, conforter les techniques de mesurages pour les élèves les plus faibles.

L'opportunité d'un prêt d'un deuxième robot « robot-souris » d'un pas différent de celui du Blue-Bot (pas de 12 cm), permet de se rendre compte que la mesure des tunnels dépend de l'étalon choisi, et que cette donnée est particulièrement importante pour programmer les déplacements des robots. D'où la nécessité de développer une démarche pour déterminer laquelle des trois bandes graduées serait l'outil permettant de résoudre le problème et ce, en fonction du robot Blue-Bot ou Robot-Souris.

Plusieurs procédures sont observées lors de la recherche de la bande idoine :

Désigner une case sur la bande quadrillée assez éloignée de la case de départ puis programmer le robot pour qu'il se déplace sur cette case. Si le robot se déplace bien sur la case prévue, la bande convient.

Appuyer sur les boutons flèches pour que le robot se déplace. S'il se déplace de case en case, alors la bande peut convenir, mais s'il s'arrête « à cheval » sur deux cases, c'est-à-dire sur une graduation, le pas du robot est trop petit ou trop grand et la bande ne convient pas.

Poser le robot sur les cases, et comparer la taille du robot et la taille des cases. Bien que cette procédure ne soit pas correcte (*cf.* paragraphe précédent), cette technique est retenue par de nombreux élèves…

En cherchant à résoudre une tâche de programmation simple, les élèves travaillent ainsi des compétences et savoirs mathématiques relatifs à la mesure. Réciproquement, la programmation informatique des déplacements du robot demande une capacité d'anticipation : pour un tunnel de mesure n, il faut anticiper et donc programmer $n+1$ déplacements unitaires (en pas du robot).

Pour la résolution de la deuxième tâche, l'intention didactique est cette fois-ci principalement d'ordre informatique. Les connaissances et compétences construites lors de la résolution de la première situation-problème font milieu — didactique — pour la deuxième situation. Si la plupart des élèves repèrent rapidement le plan quadrillé approprié 15 cm × 15 cm, certains utilisent le plan 15 cm × 12 cm et s'en servent comme d'une bande en ne retenant qu'un des côtés de la grille pour mesurer le tunnel.

La principale difficulté des élèves réside au niveau du repérage de la case sur laquelle le robot pivote. Le fait de proposer une « situation tunnel » où l'on ne peut agir à l'intérieur et non une « situation pont » où tout est visible oblige les élèves à se représenter un espace non accessible et à mobiliser l'outil « plan quadrillé » pour prévoir la case de pivotement. Les figures ci-dessous présentent différentes techniques

Figure 5

Figure 6

Figure 7

Figure 8

Figure 9

Les élèves positionnant le quadrillage sous ou du côté intérieur des tunnels (cf. fig. 5 et 6) rencontrent des difficultés à repérer la case de pivotement. Certains tentent de résoudre cette difficulté en positionnant un quadrillage sur le tunnel (cf. fig. 7), d'autres en positionnant le plan sur le côté extérieur du tunnel en se servant du plan comme d'une bande (cf. fig. 8), d'autres encore (cf. fig. 9) en prenant l'empreinte du tunnel sur le quadrillage.

1.3 Brève conclusion à propos des situations des tunnels

Lors de cette première partie de l'atelier, nous avons présenté ces deux situations afin de discuter de la manière dont chaque discipline contribue à la construction de savoirs. En mathématiques, les élèves ont réinvesti ou consolidé des savoirs et compétences sur le plan de la mesure, du repérage dans l'espace, tandis qu'en programmation informatique, les notions d'algorithme et de codage ont été initiées. La thématique du colloque portant sur la modélisation, nous nous sommes alors posé la question : est-il possible d'initier un travail de modélisation au cycle 2 du primaire ?

Le modèle de Blum et Leiss permet d'avancer une réponse positive : en suivant le cycle du modèle, nous avons cherché à expliciter chacune des étapes constituant le travail de modélisation.

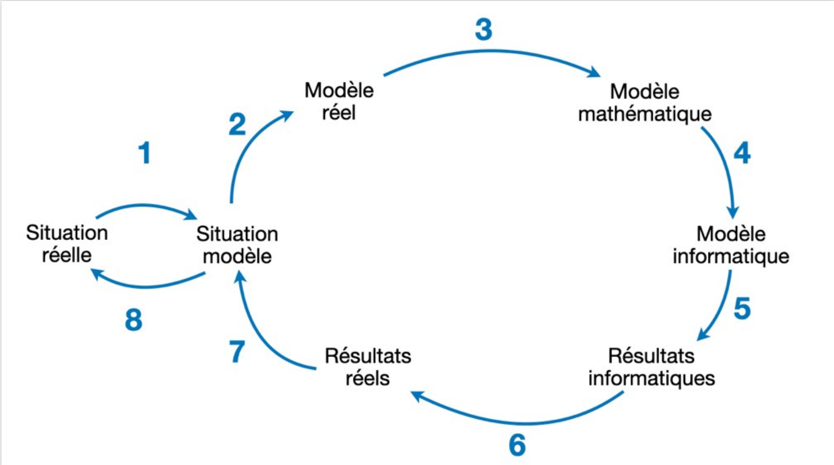


***Figure 10** : cycle de modélisation de Blum et Leiss adapté à la situation des tunnels*

La situation de départ est issue du monde réel. Il s’agit d’une rame de métro automatique. Celle-ci a été programmée pour qu’elle s’arrête en différentes stations sans intervention directe humaine.

L’étape 1 consiste à faire « comme si » Blue-Bot représentait un train automatique. Il s'agit alors d'anticiper et donc programmer le robot pour qu'il s'arrête automatiquement à la station d'arrivée.

La situation est ensuite simplifiée (étape 2) pour ne considérer que l’essentiel. Blue-Bot et tunnels

A l’étape 3, il s’agit d’associer le quadrillage idoine aux déplacements du robot, ce que l’on peut voir comme une première activité de modélisation mathématique.

L’étape 4 demande de modéliser les déplacements par un codage (modélisation informatique).

S’en suit un traitement informatique (étape 5) fournissant le résultat sous la forme d’un programme.

Le programme informatique est testé à l’étape 6. L’étape 7 valide ou invalide le programme. L’invalidation conduit alors à un nouveau cycle modifiant le modèle mathématique ou informatique.

Dans la classe, comment ce travail de modélisation pourrait-il prendre corps ? Il nous a semblé qu’aller au-delà de l’explicitation par les élèves des procédures de résolution des problèmes en faisant exprimer et argumenter le choix des outils permettant de résoudre les situations pouvait être un premier pas vers un travail de modélisation.

2. ScratchJr et la pensée algorithmique. Une nouvelle représentation mentale au service de la compréhension du récit (D. Laval)

Avec l’enseignement du numérique, certaines tâches impliquent plusieurs domaines, et pour chacun de ces domaines, nous avons un Espace de Travail (EA). Nous faisons alors le choix de prendre comme cadre théorique pour les analyses des tâches, celui des « Espaces de Travail Connectés » au sens de Lagrange et Laval (2019). Nous partons de l'hypothèse que ce cadre peut permettre de rendre compte de la manière dont les connexions entre les EA vont donner du sens aux concepts impliqués. Par ailleurs, nous rappelons que l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation, associé à la logique et au raisonnement, s'inscrit dans les objectifs du socle commun de connaissances, de compétences et de culture. Au regard de ces constats, lors de cette seconde partie, nous nous intéressons à une pratique de la pensée algorithmique et du codage, à travers la programmation sur Scratch Junior, dans le cadre d'un enseignement interdisciplinaire (littérature de jeunesse, logique, raisonnement, algorithmique, codage, programmation) avec la compréhension d'un conte au niveau du cycle 2 de l'enseignement primaire.

2.1. Ebauche d'une ingénierie didactique

Nous présentons, une ingénierie didactique expérimentée dans deux classes du cycle 2 : un double niveau CE1/CE2 et un CE2 dans deux écoles de la région parisienne. Elle se découpe en deux séquences. Une première où les élèves analysent le conte, *Le lion et les trois buffles* de Dhouib et Angeli (2014), à l'aide du cadre de la morphologie du conte (Propp, 1922) et de la sémantique structurale de Greimas (1966). Cette séquence se situe dans le domaine de la littérature de jeunesse. Bien qu'elle soit évoquée lors de l'atelier, elle ne pas fait l'objet d'un temps de réflexion avec les participants de l'atelier. Nous faisons donc le choix de ne pas la présenter ici[51]. Lors de la seconde séquence se situant dans le domaine de l'informatique, les élèves transcrivent le conte en des algorithmes qu'ils implémentent ensuite dans l'environnement Scratch Junior, afin d'obtenir une animation. C'est cette séquence qui a fait l'objet d'une présentation lors de l'atelier.

Le conte : Le lion et les trois buffles de Dhouib et Angeli

Ce conte est issu d'une fable traditionnelle arabe. Il raconte l'histoire malheureuse de trois buffles. Trois buffles frères (fig. 11), un blanc, un noir et un jaune, forts de leur union, décident de partir à l'aventure. Les chemins de l'aventure n'étant pas sans danger, ils chassent une meute de chacals (fig. 12) puis finissent par se reposer sous un grand arbre où un lion accepte leur présence (fig. 13). Le temps passant, le lion sème la discorde parmi les buffles et isole à chaque fois l'un d'entre eux pour le manger.

Figure 11 *: Les trois buffles (Extrait du conte de Dhouib et Angeli)*

Figure 12 : *Les buffles chassent la meute de chacals (Extrait du conte de Dhouib et Angeli)*

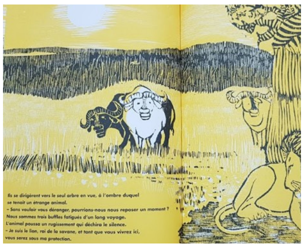


Figure 13 : *Le lion sous le baobab (Extrait du conte de Dhouib et Angeli)*

La séquence 2 autour du numérique

Cette séquence est découpée en trois séances. Dans la première, l'élève propose, à l'aide de sa mémoire et des illustrations (si elles existent) du conte, de raconter le récit avec ses

[51] Elle fera l'objet d'un futur article qui sera publié fin 2024, début 2025.

mots en mettant l’accent sur les différents protagonistes du conte (par la suite, nous parlerons de variables informatiques au format de « chaines de caractères » ou de « listes ») et des lieux. Puis, au cours de la deuxième séance, l’élève reformule le récit en utilisant des structures informatiques : variables (les protagonistes), boucle « Répéter », codage, etc. Ici, nous nous situons dans un travail algorithmique « papier-crayon ». Lors de la troisième séance, l’élève dans le cadre d’une activité branchée, implémente les algorithmes « papier-crayon » construits à la séance 2, dans l’environnement Scratch Junior afin d’obtenir une animation et de la tester.

Le choix de l’environnement numérique Scratch Junior au niveau du cycle 2

Nous situant au cycle 2, nous faisons le choix de l’environnement numérique Scratch Junior dont nous examinons son appropriation et sa pertinence pour l’apprentissage de l’algorithmique et de la programmation par les élèves, dans le cadre d’un enseignement transdisciplinaire. Initialement, l’environnement Scratch Junior est une application pour tablette[52], accessible aux enfants de 5 à 8 ans. Cependant, depuis quelques années, il existe des émulateurs de cet environnement qui permettent une utilisation de Scratch Junior sur des ordinateurs[53]. Cet environnement dispose d’une interface graphique basée sur un langage visuel fonctionnant par des manipulations gestuelles de la part de son utilisateur. Cet environnement permet à de très jeunes enfants, débutant en informatique, de programmer des jeux, des histoires, etc., dans l’esprit d’une première approche de résolution de problèmes, en lien avec le raisonnement et la logique, en considérant le codage comme une autre forme d’alphabétisation (Komis, 2016). Scratch Junior permet une programmation de type événementiel. Le travail algorithmique et de programmation conduit l’élève à entrer dans le raisonnement et la logique, à rechercher des bugs, à développer des idées de projet. De nombreux concepts de programmation sont abordés : séquences, une première structure de boucle (Répéter), variables informatiques, etc.

2.2. Description de l’environnement Scratch Junior

L’interface ergonomique de l’environnement Scratch Junior est d’une grande simplicité adaptée aux jeunes enfants. Elle est basée sur des aspects ludiques permettant à de jeunes élèves de programmer sous forme de codage. Pour cela, ils ont des instructions par blocs de programmation, regroupées en palettes de couleurs différentes. Grace à ces différents blocs, Scratch Junior possède une structure syntaxique, au sens de « grammaire », constituée de trois composantes : les éléments de base avec les différents blocs de programmation ; les règles de composition de ces éléments en commandes ; les règles de composition des commandes en scripts. Cette syntaxe est simple d’utilisation pour les élèves qui n’ont pas nécessairement une bonne maîtrise de la lecture. Afin d’écrire les scripts des programmes, ils procèdent par des « Glisser » dans la zone de programmation de la page, des blocs choisis (fig. 14 à 19).

Les scripts obtenus sont construits alors en assemblant les différents blocs sous forme d’un puzzle permettant une représentation spatiale du script (programme) (fig. 22).

Par ailleurs, ces blocs traduisent plusieurs aspects de l’action : - différentes possibilités de déclenchements des programmes (fig. 14), - différents types de déplacements (fig. 15), - des allures modifiables (agrandir, rétrécir, disparaître, apparaître, bulle de texte) (fig. 16), - générer des sons (possibilité d’enregistrer des paroles) (fig. 17), - possibilité de répétitions indéfiniment et de changements de scènes (fig. 18), - utiliser des blocs de contrôles (le protagoniste peut avancer selon trois vitesses, on peut aussi stopper l’action,

[52] http://www.scratchjr.org/

[53] https://jfo8000.github.io/ScratchJr-Desktop/

mettre un temps de pause, utiliser une boucle Répéter) (fig. 19). L'élève voit ainsi de façon conviviale et simple les premiers concepts fondamentaux de l'algorithmique et de la programmation (fig. 20 et 21).

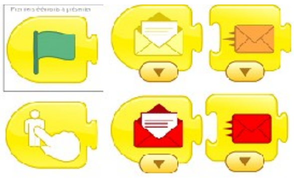


***Figure 14 :** Les blocs de déclenchements*

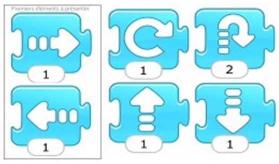


***Figure 15 :** Les blocs de déplacements*

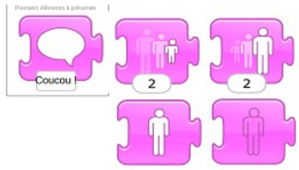


***Figure 16 :** Les blocs d'« allures »*

***Figure 17 :** Les blocs de sons*

***Figure 368 :** Les blocs Fin, Répéter indéfiniment, Changements de page*

***Figure 19 :** Les blocs de contrôles*

***Figure 20 :** Le chat et la poule d'après le travail d'un élève de CE2*

***Figure 21 :** Principe d'une page de programmation*

***Figure 22 :** Scripts de trois quadrilatères (Jaune, orange et marron) dans un champ*

Comme le rapporte Komis (2016), « *ScratchJr comporte* [donc] *plusieurs fonctionnalités sémantiques inscrites dans le paradigme de la programmation impérative* ([…] *séquence de commandes pour exécuter un mouvement dans l'espace ou le branchement non conditionnel ALLER* sur une autre page) ». De même, d'autres paradigmes sont possibles : « *la programmation multi-agent, étant donné que plusieurs personnages peuvent être programmés indépendamment et agir de manière concurrente* » (Komis, 2016.). De plus, Scratch Junior permet d'accéder à « *des rudiments de la programmation orientée-objets étant donné que le programmeur peut définir plusieurs personnages et leur interaction à partir des messages ou des événements* » (Ibid.). Cet environnement permet aussi de déclencher une action d'un personnage ou d'un objet par le fait que celui-ci est touché par un autre personnage ou un autre objet. Ainsi, nous avons aussi une « *programmation par événements* » (Ibid.)

2.3. Découverte en amont de l'environnement Scratch Junior par les élèves

En amont de ces deux séquences, pendant cinq mois, à raison de 45 minutes par semaine, les élèves ont été familiarisés avec les différentes possibilités de codage et d'animations qu'offre l'environnement Scratch Junior. Pour cela, ils ont construit des petits programmes, comme :

Un déplacement dans l'espace (par exemple, une fusée décollant de la lune après que le spationaute eut reçu l'ordre de rentrer dans la fusée pour rentrer sur la Terre), avec reconnaissance de deux scènes. La première se situe sur la surface de la lune où la fusée stationne : le spationaute se déplace pour rentrer dans la fusée et décolle. Dans la seconde, nous avons le vol de la fusée dans l'espace en direction de la Terre (fig. 23 et 24).

Une transcription de la fable *Le Corbeau et le Renard* de Jean de La Fontaine, avec reconnaissance des différents protagonistes : personnages (corbeau, renard, narrateur), objet (fromage), lieu (un arbre avec une branche apparente) (fig. 25).

Création d'un personnage « abstrait » (avec des figures géométriques usuelles) qui se déplace dans l'espace d'un jardin (fig. 26).

Figure 23 : *La surface de la lune avec le spationaute (Travail d'un binôme de CE1/CE2)*

Figure 24 : *Déplacement de la fusée dans l'espace (Travail d'un binôme de CE1/CE2)*

Figure 25 : *Le corbeau et le renard (Travail d'un élève de CE2)*

Figure 26 : *Promenade d'un personnage « abstrait » (Travail d'un élève de CE2)*

Les séances 1 et 2 de la séquence informatique

Dans le cadre de cet article, nous présentons très brièvement le travail demandé aux élèves d'une classe de CE2 de Nanterre (92), lors de la séquence informatique, découpée en 2 séances de 45 minutes chacune.

Lors de la séance 1 (préparation/anticipation pour l'animation Scratch Junior), chaque élève résume d'abord le conte par étapes (sur le principe du schéma narratif), puis découpe le conte en huit parties et donne un titre pour chaque partie. Ensuite, il doit anticiper le nombre de paysages et leurs représentations sur Scratch Junior. De même, il anticipe le choix des formats des différents personnages sur Scratch Junior. Ainsi, les élèves proposent d'associer les personnages à différentes figures usuelles issues de la géométrie plane : buffles (un triangle de couleur pour chaque buffle, possibilité d'envisager les trois buffles réunis sous le principe d'une variable liste) ; meute de chacals (rectangle marron) et le lion (carré orange).

La seconde séance alterne différents champs : algorithmique, codage et utilisation de Scratch Junior. Pendant cette séance, les élèves sont répartis en deux groupes hétérogènes (14 élèves par groupe) et travaillent en salle informatique. Chaque élève a un ordinateur à sa disposition, avec Scratch Junior. L'observation porte sur le travail de médiation algorithmique du conte. Chaque élève transcrit le conte en algorithmes écrits en langage naturel, tenant compte de la logique du conte. Ensuite, les élèves passent au codage en l'implémentant dans Scratch Junior, afin de créer une animation et de la tester.

2.4. Cadres théoriques et méthodologie de recherche

Utilisation de cadres théoriques

Dans la continuité des travaux de Minh et Lagrange (2016), de Lagrange (2018) et de Lagrange et Laval (2019 et 2022), nous nous référons à l'idée d'*Espaces de Travail Connectés*. En effet, nous élargissons cette approche aux *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018) qui seraient connectés à différentes méthodes d'analyse structurale (MAS) venant de cadres théoriques de la littérature. Ainsi, une analyse fine des données recueillies lors des observations des séquences en classe, est menée à l'aide d'un tel cadre théorique se situant aux connexions entre le modèle d'un ETA spécifique à Scratch Junior et différentes MAS, la morphologie du conte de Propp (1965) qui « *construit […] une grammaire des formes narratives qu'il présente comme des formules mathématiques* » (Farahnak, 2010) et le schéma actantiel de Greimas (1986), où le modèle permet de déchiffrer la nature sémiolinguistique du récit. Nous supposons qu'il existe « *une structure matricielle de l'histoire, fondée sur l'enchaînement logique des séquences* » (ibid.). Ainsi, l'étude des connexions entre ETA et MAS donne du sens au travail des élèves dans des tâches impliquant différents domaines : logique, algorithmique, programmation et littérature de jeunesse, en tenant compte des genèses sémiotique, instrumentale et discursive, et de la structure narrative du conte.

Espaces de travail algorithmique

Nous référant aux *Espaces de Travail Mathématiques* (Kuzniak, 2011, Kuzniak et Richard, 2014), nous adaptons une structure semblable aux ETA, c'est-à-dire avec les trois dimensions suivantes :

Sémiotique, avec une utilisation de symboles, de graphiques et d'objets concrets compris comme des signes.
Instrumental, avec la construction et l'expérimentation de modèles représentant les relations entre objets dans une configuration donnée (figures géométriques, graphiques, programmes, etc.). Ici, des artefacts vont être utilisés.

Discursif, avec la justification et l'idée de preuve (validité de l'algorithme) à l'aide d'un cadre de référence théorique (programmation sur Scratch Junior afin de tester la robustesse de l'algorithme).

Au niveau du primaire, nous restons pour l'essentiel sur les deux premières dimensions : sémiotique et instrumental. La dimension sémiotique dans l'ETA se caractérise par une notation proche des systèmes de symboles mathématiques, même si les similitudes peuvent être souvent trompeuses (Lagrange et Laval, 2022). De même, l'affectation est spécifique à l'ETA, puisqu'elle est liée à l'idée de changement d'état. En effet, une valeur va être donnée à une variable qui remplace une valeur précédente. Pour plus d'information, nous renvoyons le lecteur aux travaux de Samurçay (1985) qui a constaté que ces différences entre variables informatiques et mathématiques prêtent à confusion pour des débutants en informatique. Quant à la dimension instrumentale d'un ETA, elle implique l'exécution de l'algorithme, soit sur une machine, soit mentalement avec l'aide du papier et du crayon. L'exécution n'implique pas l'accomplissement passif d'un programme, mais plutôt un processus de construction, où les implémentations sont exécutées avec des données sélectionnées, afin de réaliser une exploration empirique (Lagrange et Laval, 2022).

2.5. Nos attentes, nos hypothèses didactiques et question de recherche

Supposant que la transcription du conte et de sa logique en algorithmes simples favorise la mobilisation du langage et du raisonnement, mais aussi la mémorisation du récit et sa reformulation, nous attendons que l'élève élabore au « papier-crayon » des algorithmes basés sur la logique des structures algorithmiques, permettant une nouvelle représentation mentale du conte, et qu'il implémente le codage de l'algorithme dans Scratch Junior. Par ailleurs, nous supposons que l'élève schématise la compréhension du conte par une représentation sémiotico-instrumentale, favorisant l'exploration du conte. L'élève va au-delà d'une simple lecture du conte, en proposant une activité de programmation informatique. Ainsi, cette organisation implicite de conduites et de gestes forme un schème (Vergnaud, 2011). En effet, selon Vergnaud, les schèmes sont des structures mentales qui intègrent les actions et les connaissances. Dans ce cas, nous pouvons observer que l'utilisation d'une représentation sémiotico-instrumentale pour explorer le conte et créer une activité de programmation informatique crée une mémoire de l'action. Les gestes, les manipulations et les réflexions impliqués dans cette activité deviennent partie intégrante du schème de l'élève. L'élève ne se contente pas de lire passivement le conte, il prend une part active en interagissant avec le texte de manière dynamique. Il s'implique activement en explorant le texte, en l'analysant, en le décomposant, et en le manipulant pour créer quelque chose de nouveau, en l'occurrence le traduire en termes de langage de programmation. Cela encourage l'élève à interpréter le contenu du conte de manière critique, à en extraire des éléments clés et à les relier à d'autres connaissances ou compétences. De plus, cela favorise une meilleure maîtrise du langage en lui permettant de traduire les idées et les concepts du récit en termes de langage de programmation, ce qui nécessite une réflexion et une compréhension approfondies.

Faisant l'hypothèse que l'institution situe l'algorithmique dans une approche *outil* (au sens de Douady, 1986) avec des algorithmes pour donner sens à un certain nombre de concepts mathématiques, nous nous questionnons : Comment dépasser ce stade pour que l'algorithmique devienne un vrai *objet* (ibid.) d'apprentissage, quel que soit le domaine ?

2.6. Exemples de travaux algorithmiques faits dans la classe de CE2

Nous présentons brièvement les travaux des élèves Hugo et Constantin[54] de la classe de CE2 de Nanterre. Dans un premier temps, lors de la séance 1, chacun des élèves a découpé, le conte en huit « chapitres » : (1) Les trois buffles (représentés par des triangles de couleurs), rois de leur vallée ; (2) Le désir des trois buffles de partir à l'aventure ; (3) Rencontre avec la meute de chacals (représentée par un rectangle marron) ; (4) Arrivée des trois buffles dans la savane où se trouve un baboab ; (5) Rencontre avec le lion (représenté par un carré orange) au repos sous le baobab ; (6) Le lion sème la peur chez les buffles noir et jaune, le buffle blanc est mis à l'écart et le lion finit par le manger ; (7) Après un retour au calme sous le baobab, le lion évoque à nouveau sa faim et sème la jalousie chez le buffle noir qui s'éloigne de son frère le buffle jaune que le lion dévore ; (8) Après un nouveau temps de calme sous le baobab, le buffle noir prend conscience de la manipulation du lion pour manger ses deux frères. Se retrouvant seul, il se laisse alors dévorer par le lion. Puis, lors de la seconde séance, les élèves se sont réparti les chapitres pour le passage à la programmation sur Scratch Junior. Hugo a traité les 5 premiers chapitres (de la vallée à l'arrivée dans la savane et la rencontre avec le lion au repos) et Constantin les 3 derniers (la mort du buffle blanc suivie d'un temps calme avec ensuite la mort du buffle jaune et pour terminer, celle du buffle noir). Le choix de cette répartition est laissé aux enfants, avec l'accord de l'enseignante. Celle-ci parle de tableaux pour les scènes que les enfants définissent dans l'environnement Scratch Junior. Par exemple, nous avons les extraits[55] ci-dessous pour Hugo (fig. 27) et pour Constantin (fig. 28).

Figure 27 : Arrivée dans la savane et rencontre avec le lion.

Figure 28 : Extrait où le lion mange le buffle jaune après avoir semé la jalousie dans l'esprit du buffle noir

2.7 Brève conclusion

Lors de cette seconde partie de l'atelier, nous avons pu observer, à travers une nouvelle médiation, que l'élève modifie son expérience et sa relation au conte et à l'algorithmique. En effet, un modèle de transcription algorithmique peut s'apparenter à une nouvelle forme d'adaptation du conte, après celles du théâtre jeunesse ou du dessin animé. Cette nouvelle perspective permet d'aborder une ouverture de l'algorithmique au-delà du seul domaine des mathématiques. Cela justifie l'algorithmique comme *objet* de savoir à part entière dès le début de la scolarité de l'élève. Par ailleurs, nous situons notre approche du modèle de transcription algorithmique comme pouvant être une adaptation du modèle de Blum et Leiss (2007) aux spécificités de l'algorithmique connectée à la compréhension du récit en littérature de jeunesse (fig. 29).

[54] N.D.L.R. : Les prénoms des élèves ont été changés

[55] N.D.L.R. : Les textes des animaux sont tels que les enfants les ont écrits, d'où la possibilité de fautes d'orthographe.

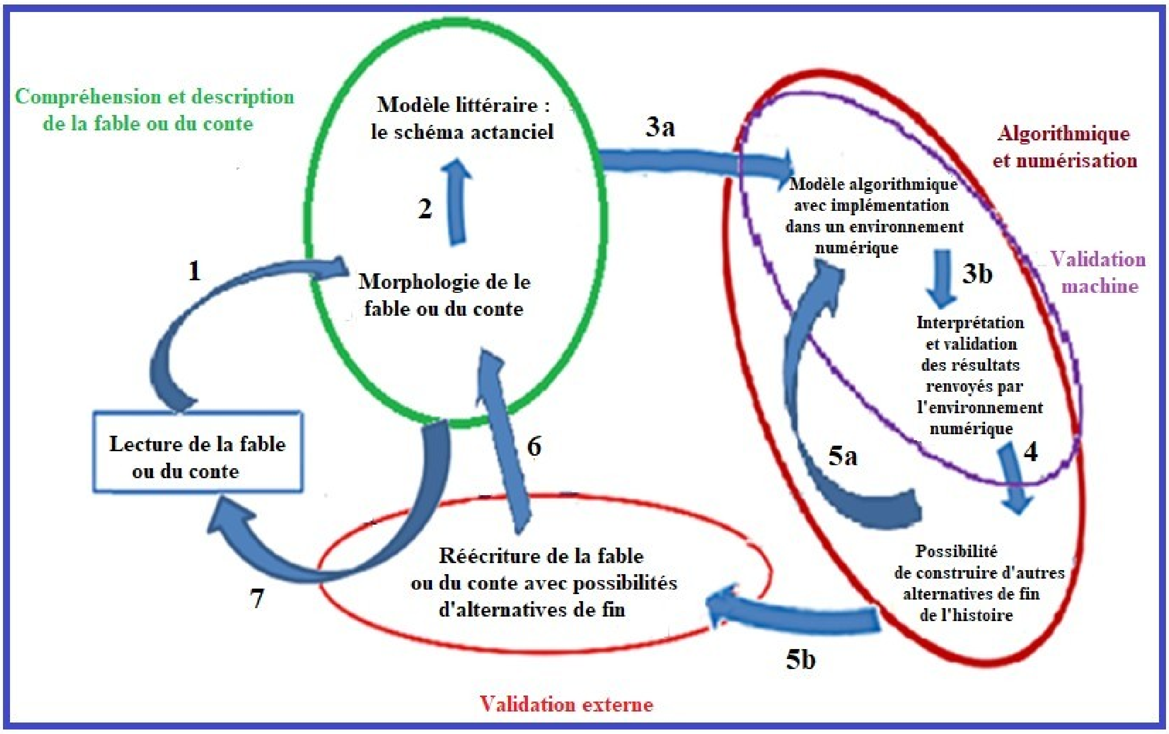


Figure 29 *: Cycle de modélisation avec un modèle littéraire de type algorithmique*

Ainsi, sur ce schéma, nous pouvons observer les différentes étapes suivantes :

(1) La compréhension du texte.

(2) La construction d'un modèle littéraire.

(3) La transcription numérisée avec reconnaissance des personnages, des objets, du (ou des) lieu(x).

(3a) Modèle algorithmique et implémentation dans un environnement numérique.

(3b) Interprétation et validation des résultats renvoyés par l'animation numérisée.

(4) La possibilité de construire des fins alternatives à l'histoire.

(5) Une réécriture de la fable ou du conte.

(5a) Choix de modifier le modèle algorithmique initial.

(5b) Réécriture au « papier-crayon » de l'histoire.

(6) Une interprétation.

(7) La lecture.

Références bibliographiques

Blum, W., Leiss D. (2007). How Do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The Example Sugaloaf und the DISUM Project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA12)-Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood.

Couderette, M. (sous presse). *Introduction de l'informatique au primaire: quelle organisation didactique ?* Dans Y. Buyck, M. Sudriès, F. Ligozat et C. Marlot (Eds.). Les didactiques face à l'évolution des curriculums. Savoir(s) et pratiques pour entrer dans la complexité du monde. Actes du 6ème Colloque international de l'ARCD. Université de Genève.

Dhouib, M., & Angeli, M. (2014). *Le lion et les trois buffles*. Seuil Jeunesse.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil–objet. Recherches en didactique des Mathématiques, 7.2, 5–31. Editions La Pensée Sauvage.

Farahnak, N. (2010). Analyse structurale de deux contes de Perrault selon les schémas de Propp, Larivaille et Greimas. *Etudes de Langue et Littérature Françaises*, *2*(1), 5-15.

Greimas, A.-J. (1986). *Sémantique structurale*. Formes sémiotiques. Puf.

Jouve, V. (2006). Les métamorphoses de la lecture narrative. *Protée*, *34*(2-3), 153–161. https://doi.org/10.7202/014273ar

Komis, V. (2016). Une analyse cognitive et didactique du langage de programmation *Scratch Jr.* Présenté à Didapro6-DidaSTIC, Namur, Belgique. https://docplayer.fr/57266243-Une-analyse-cognitive-et-didactique-du-langage-de-programmation-scratchjr.html

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24. https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043

Kuzniak, A., Richard, R. P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17–26.

Lagrange, J.-B., Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Lagrange, J.-B., Laval, D. (2022). Connecting algorithmics to mathematics learning: a design study of the intermediate value theorem and the bisection algorithm. *Educ Stud Math* **112**, 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10192-y

Larivaille, P. (1974). L'analyse (morpho)logique du récit. Revue *Poétique*, n° 19, pp. 368-388.

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Thèse). Université Sorbonne Paris Cité. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01943971

Minh, T.K., Lagrange, J. B. (2016) Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), pp. 793–807.

MEN (2016). Initiation à la programmation au cycle 2 et 3. Document Eduscol consulté en ligne https://eduscol.education.fr/document/15409/download

Propp, V. (1965). *Morphologie du conte*, Seuil, Paris, 1965.

Samurçay, R. (1985). *Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants*. Educationnal Studies in Mathematic, n° 16-2, pp. 143-161.

Vergnaud, G. (2013). *Pourquoi la théorie des champs conceptuels ?* (Vol. 36, Numéro 2). Informa UK Limited. https://doi.org/10.1174/021037013806196283

Dispositifs de formation des enseignants et cycle de modélisation

Modélisation avec un protocole relevant des Lesson Studies

Blandine Masselin [56]

LDAR, IREM de Rouen, Académie de Normandie

Marion Guérin[57]

IREM de Rouen, Académie de Normandie

Résumé. Une Lesson Study (LS) permet d'observer ensemble une séance conçue par un collectif d'enseignants et menée par l'un d'entre eux. Le dispositif Lesson Study adapté (Masselin, 2020), développé depuis 2016 par l'IREM de Rouen et le LDAR, est une variante des LS japonaises en contexte français de formation (Masselin & Derouet, 2019). Une des adaptations est l'apport par les facilitateurs (Masselin & al., 2023) d'une situation et l'analyse d'extraits vidéo de classe en formation. Après avoir résolu « l'aire de baignade », les participants ont construit une feuille de route (énoncé, scénario, grille d'intervention de l'enseignant). L'atelier, découpé en trois séances, a consisté à préparer la leçon de recherche (séance 1), à la mettre en œuvre en classe de seconde (séance 2) et à l'analyser collectivement en séance 3. Il a permis de questionner la gestion d'une pluralité de modèles en classe et de s'interroger sur *Quelle part de modélisation est laissée à la charge des élèves ?*

Mots-clés. Lesson Study, modélisation, aire de baignade, cycle de modélisation.

Abstract. A Lesson Study (LS) allows teachers to observe together a session designed by a group of teachers and led by one of them. The adapted Lesson Study device (Masselin, 2020), developed since 2016 by the IREM of Rouen and the LDAR, is a variant of the Japanese LS in the French training context (Masselin & Derouet, 2019). One of the adaptations is the provision by facilitators (Masselin & al., 2023) of a situation and the analysis of classroom video clips from classes in training. After solving the 'swimming area', the participants constructed a roadmap (statement, scenario, teacher intervention grid). The workshop, divided into three sessions, consisted of preparing the research lesson (session 1), implementing it in the 10th grade (session 2) and analyzing it collectively in session 3, was an opportunity to question the management of a plurality of models in the classroom and to ask *how much modelling is left to the students*?

Keywords. Lesson Study, modeling, bathing area, modeling cycle.

Resumen. Un Lesson Study (LS) permite a los profesores observar juntos una sesión diseñada por un grupo de profesores y dirigida por uno de ellos. El dispositivo Lesson Study adaptado (Masselin, 2020), desarrollado desde 2016 por el IREM de Rouen y el LDAR, es una variante del LS japonés en el contexto formativo francés (Masselin & Derouet, 2019). Una de las adaptaciones es la puesta a disposición por parte de los facilitadores (Masselin & al., 2023) de una situación y el análisis de extractos de vídeo de clases en formación. Tras resolver la "zona de nado", los participantes construyeron una hoja de ruta (enunciado, escenario, rejilla de intervención docente). El taller, dividido en tres sesiones, consistió en preparar la lección de investigación (sesión 1), ponerla en práctica en la clase de Year 11 (15-16 años) (sesión 2) y analizarla colectivamente en la sesión 3. El taller brindó la oportunidad de cuestionar la gestión de una pluralidad de modelos en el aula. Este descubrimiento de Lesson Studies fue la ocasión de preguntarse: ¿hasta qué punto se deja la modelización en manos de los alumnos?

Palabras clave. Lesson Study, modelo, área de baño, ciclo de modelado.

[56] blandine-lucie.masselin@ac-normandie.fr

[57] marion.guerin2@ac-normandie.fr

Introduction

Le but de l'atelier est double : il s'agit de faire découvrir, de façon accélérée le dispositif Lesson Study tout en s'attelant à une tâche de modélisation afin de questionner ses enjeux en termes d'enseignement. L'atelier relaté a été organisé en trois sessions d'une heure trente chacune, incluant une classe d'élèves de seconde du lycée LP2I[58] de Poitiers lors de la seconde session. Les participants sont des enseignants de mathématiques du secondaire, et du supérieur remplissant également des missions de formation (initiale ou continue). L'organisation du colloque de la CII didactique a nécessité des adaptations du dispositif de Lesson Study tel qu'il est vécu par des enseignants habituellement. Nous pointons ces adaptations liées à un déroulement accéléré dans les ateliers successifs des trois sessions. Notre communication est enrichie par une analyse didactique des éléments produits par le collectif au sein de l'atelier autour de la focale de l'enseignement d'une situation de modélisation. Ce dernier aspect, n'a pas été abordé avec le collectif faute de temps.

1. Cadre théorique en lien avec la modélisation et questions de recherche

Dans cette section, nous exposons des apports théoriques qui permettent un éclairage sur les enjeux de la situation menée dans l'atelier autour de la modélisation, notamment via le cycle de modélisation.

1.1. Le cycle de modélisation de Blum & Leiss

Le cycle de Blum & Leiss (2007) structure le travail de modélisation en sept étapes (figure 1).

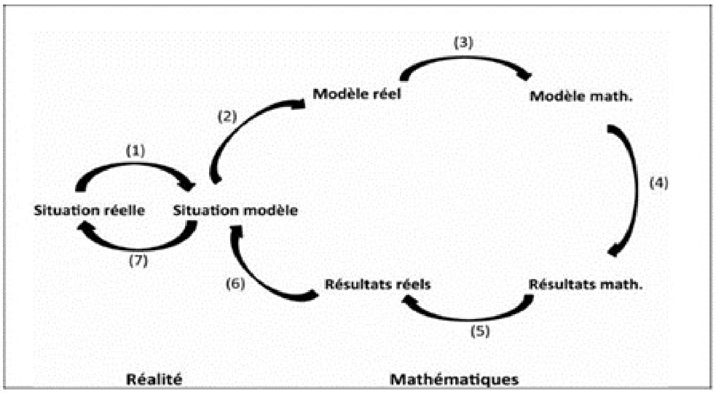


***Figure 37** : Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007), étapes traduites par Derouet (2016).*

Ces étapes ont été traduites par Derouet (2016) comme suit :

- Le point de départ est une situation du monde réel. L'étape (1) consiste à l'épurer et à la préciser. C'est le moment de l'émission de premières hypothèses de modélisation.

- À l'étape (2) on élabore ensuite un modèle simplifié mais pas encore mathématisé. On peut parfois parler de pré-mathématisation.

- L'étape (3) est l'association d'un modèle mathématique au modèle réel. Ce modèle mathématique est soit disponible, soit adapté ou construit à cette étape.

[58]Le lycée LP2I (Lycée Pilote Innovant International, 86) est un lycée de Jaunay-Marigny où l'usage du numérique est facilité par les Bring Your Own Deviceo (Apporter Votre Équipement de Communication).

- Il est suivi d'un traitement mathématique, qui aboutit à des résultats (étape (4)).
- Ces résultats sont interprétés dans le langage réel (étape (5)).
- Ils sont validés ou invalidés dans l'étape (6). Dans le cas d'une invalidation, le cycle est réitéré en adoptant un modèle modifié.
- L'étape (7) consiste en la communication des résultats dans la situation du monde réel.

De nombreux travaux dont Masselin (2019) montrent en particulier que les sept étapes du cycle de Blum & Leiss ne sont pas suivies linéairement lors de la mise en œuvre d'une situation de modélisation, l'enseignant pouvant, par des interventions, faire reconsidérer un modèle mathématique utilisé par des élèves ou revenir à une étape antérieure du cycle.

1.2. Un second cycle de modélisation enrichi

Considérer le cycle de modélisation de Blum augmenté issu des travaux d'Yvain-Prébiski (2021) permet une focale précise sur les enjeux de l'enseignement de situations de modélisation concernant deux types de mathématisation.

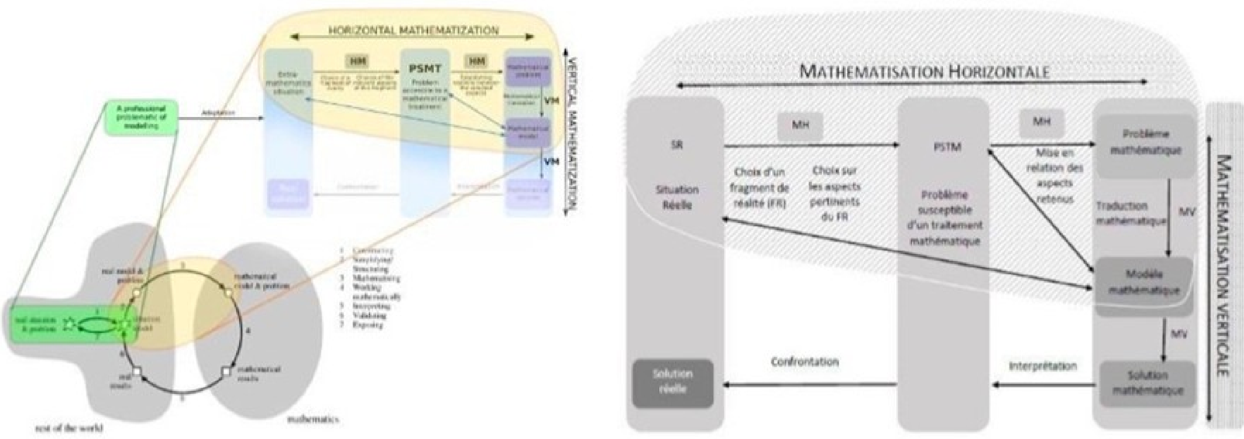


***Figure 38** : Le cycle de modélisation de Blum augmenté par Yvain-Prébiski (2021) et détail de la mathématisation horizontale.*

Le cycle de modélisation d'Yvain-Prébiski (2021) enrichit celui de Blum & Leiss (2007), en y précisant les mathématisations horizontale et verticale (figure 2). Cette double focale permet, de notre point de vue, de creuser d'un point de vue didactique la situation « aire de baignade » côté modélisation.

Pour la mathématisation horizontale, il s'agit d'identifier ou de décrire les mathématiques spécifiques dans un contexte général, de schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes façons, de découvrir des relations, des régularités, ou encore de transférer un problème du monde réel à un problème mathématique.

La mathématisation verticale comprend la formation d'un modèle mathématique (ou de plusieurs combinés entre eux), sa généralisation, son ajustement.

1.3 L'aire de baignade : une situation au cœur de l'atelier

La situation « aire de baignade », dans sa version partagée initialement dans l'atelier (figure 3), a été proposée comme support de réflexion autour de la modélisation.

Si cette situation est bien connue des enseignants car présente dans beaucoup de manuels scolaires de lycée, elle inclut majoritairement une zone de baignade rectangulaire et une fonction explicitée à étudier. Embarquant déjà un modèle, la situation, au départ extra-mathématique, décrite dans les manuels laisse d'ordinaire peu d'initiative aux élèves quant au travail autour de la modélisation et en particulier en ce qui concerne la mathématisation horizontale.

Pour des questions de contraintes liées au temps imparti dans le colloque, nous avons imposé au collectif de l'atelier de mettre en œuvre une séance en conservant l'énoncé de la figure 3 pour l'expérimentation (session 2 de l'atelier) sans laisser la possibilité aux participants de l'ajuster comme c'est le cas ordinairement en Lesson Study adaptée (LSa) décrite en section 2.2. De même, nous avons été contraintes de fixer un niveau de classe (seconde) pour des raisons d'organisation préalable.

Aire de baignade

Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac.
Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25 m.

> Article D1332-10 Transféré par Décret n°2008-990 du 18 septembre 2008 - art. 1 Modifié par Décret n°2006-676 du 8 juin 2006 - art. 2 () JORF 10 juin 2006 (extrait)
>
> La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert.

Pourront-ils respecter la législation ?

***Figure 39** : Énoncé initial (Masselin & Artigue, 2024).*

1.4 Des éléments d'analyse de l'« aire de baignade »

Derouet & Yvain-Prébiski (2023) proposent une analyse détaillée de la situation avec en particulier une identification des fragments de réalité à considérer. Plus généralement, leur analyse a priori de cette situation de modélisation prend appui sur un outil théorique et méthodologique qui permet :

« de bien identifier les choix et les hypothèses simplificatrices sous-jacents à un choix de modèle mathématique (…) choix nécessairement embarqués dans un modèle mathématique. Ce travail qui relève de la mathématisation horizontale est un enjeu majeur dans la démarche de modélisation. » (ibid., p.612)

Selon les chercheures, la première étape pour passer de la situation réelle au modèle de situation nécessite d'identifier des fragments de réalité en se posant des questions sur le lac, le contexte de la baignade, les réglementations, le décret, la zone de baignade et la ligne d'eau.

1.5 Questions de recherche en lien avec les ateliers

Dans un des axes du projet de recherche associé aux LSa, une question vive est la suivante : *En quoi le dispositif LSa peut-il modifier les pratiques enseignantes sur la mise en œuvre d'une situation de modélisation ?* Elle a été reformulée pour l'atelier : *Quels impacts d'une LSa sur un collectif enseignant quant à la prise en compte de la mathématisation horizontale ?*

La tenue d'un atelier sur « l'aire de baignade » succédant à d'autres LSa sur la même situation nous permet de questionner le travail réalisé avec les éléments théoriques présentés : *Le collectif de l'atelier montre-t-il initialement un questionnement sur la mathématisation horizontale et des fragments de réalité en lien avec la situation ? Le dispositif LSa favorise-t-il une évolution de ce questionnement au sein du collectif ?*

2. Première session de l'atelier

2.1. Les participants de l'atelier

Le collectif d'adultes inscrits à l'atelier est composé de neuf personnes (sept enseignants du secondaire, un enseignant-chercheur, une formatrice INSPE à plein temps) venus de différents IREM de France. Leur prénom a été modifié pour ces actes. Les deux auteures de la communication sont membres du groupe « Activités - Lesson Study » de l'IREM de Rouen. Fortes de l'expérience d'une trentaine de Lesson Studies vécues dans l'académie de Normandie, Masselin et Guérin ont endossé des rôles spécifiques de facilitateurs, nom donné aux encadrants de Lesson Study adaptée (Masselin & al., 2023) au contexte français de formation. La première auteure a également joué le rôle de chercheur dans le dispositif LSa mené dans l'atelier.

2.2. Présentation succincte du principe d'une LSa

La première partie de l'atelier a introduit ce qu'est une Lesson Study et ses objectifs. Si l'idée est simple comme déclaré par Lewis & Hurd (2011), le processus porte une certaine complexité. Les objectifs d'une Lesson Study adaptée (notée LSa) sont multiples dont celui en particulier de l'appropriation collective d'une ressource jusqu'à sa mise en œuvre par les enseignants y participant. Si une Lesson Study vise le développement professionnel des enseignants, elle s'attache en particulier à améliorer :

- l'analyse a priori d'un énoncé et de sa mise en œuvre,
- l'analyse de pratique à travers celle de courts extraits de vidéo de classe d'élèves,
- l'analyse a posteriori à partir d'une mise en œuvre collective.

Nous avons partagé le principe d'une LSa vécue par des enseignants (figure 4). Le dispositif complet est structuré en trois boucles décrites dans leur ensemble dans Masselin & Artigue 2024). La première boucle, notée B1, appelée aussi LS interne, concerne les facilitateurs (Masselin & al, 2023), nom donné aux formateurs qui accompagnent les enseignants en LS et est précisée en section 3.3 (figure 31).

À partir d'une situation proposée par les facilitateurs et issue d'une première boucle, un collectif d'enseignants s'empare de la situation puis choisit un énoncé pour un niveau donné, il planifie collectivement la séance. Un des enseignants se porte volontaire pour mener la séance, c'est l'enseignant-expérimentateur. Le reste du collectif observe en direct la leçon. La leçon est ensuite analysée collectivement et des alternatives seront pensées. Ceci constitue la seconde boucle du dispositif, la troisième étant relative à l'expérimentation de la situation par les enseignants du collectif dans leur propre classe avec des adaptations possibles.

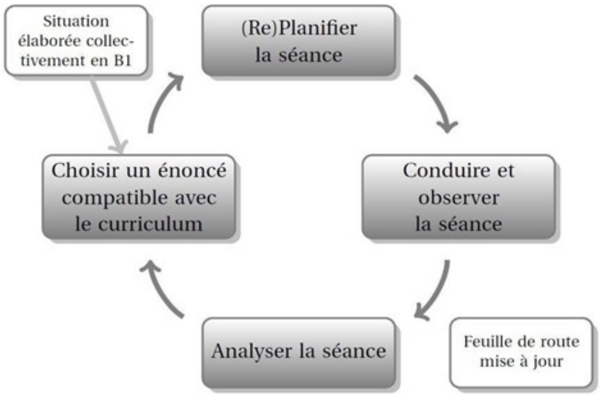


Figure 40 *: Boucle 2 du dispositif LSa, vécu par les enseignants (Masselin & al., 2023).*

Inscrite dans la thématique du colloque « modéliser » de la CII, la LSa mise en œuvre par les participants de l'atelier et vécue en accéléré avait des objectifs plus spécifiques en lien avec la problématique de la modélisation :

échanger et harmoniser nos pratiques autour d'un projet relié à la modélisation,

observer et analyser l'activité des élèves autour de la modélisation,

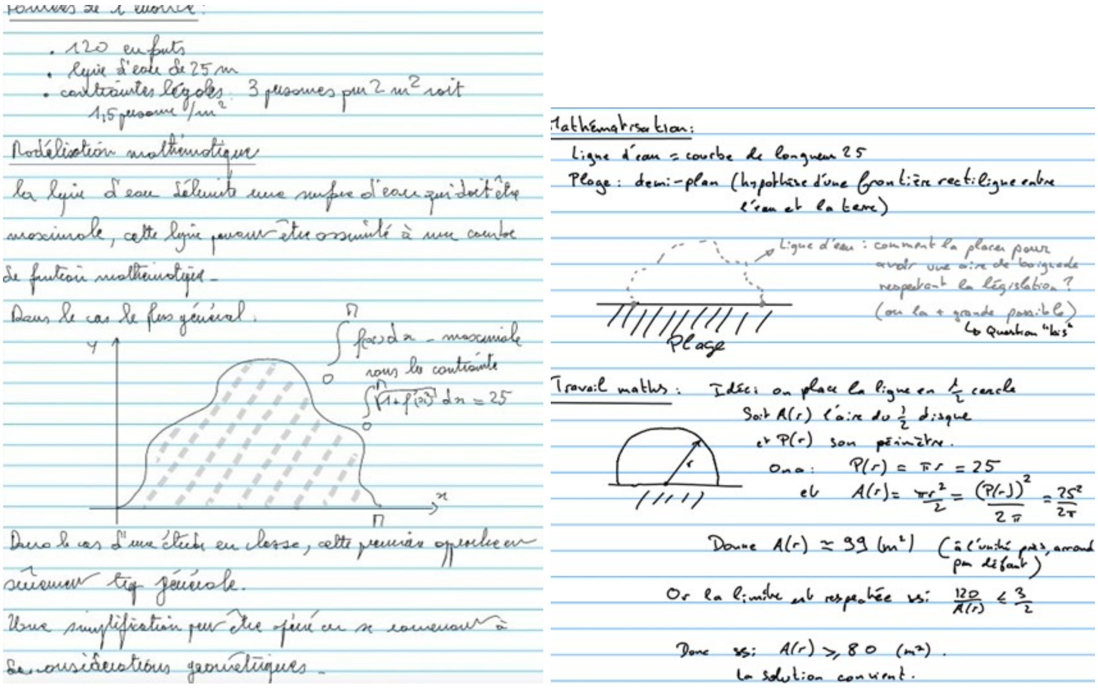
observer et analyser nos pratiques enseignantes autour de la modélisation.

Nous indiquons ici quelques ajustements par rapport à une LSa vécue par des collectifs d'enseignants. Si une situation apportée par l'équipe de facilitateurs, est d'ordinaire modelable à volonté par le collectif d'enseignants, ici faute de temps, l'énoncé (figure 1) n'était pas modifiable. De plus, généralement, le collectif choisit librement un niveau d'enseignement en lien avec des objectifs puis se met en quête d'une classe d'élèves. Ici, contraints par l'organisation du colloque, nous avions réuni pour l'occasion 33 élèves issus de deux secondes distinctes du lycée LP2I.

2.3. Travail réalisé par le collectif

Partage de solutions

Les participants de l'atelier ont d'abord partagé des éléments de résolution de l'« aire de baignade ». L'énoncé leur avait été transmis quelques jours avant le colloque pour gagner du temps sur la résolution du problème. Les figures 5 et 6 présentent des extraits de résolution partagés au tableau au sein du collectif.


Données de l'énoncé :
- 120 enfants
- ligne d'eau de 25 m
- contraintes légales : 3 personnes pour 2 m² soit 1,5 personne/m²

Modélisation mathématique

La ligne d'eau délimite une surface d'eau qui doit être maximale, cette ligne pouvant être assimilée à une courbe de fonction mathématique.

Dans le cas le plus général :

$\int_0^{a} f(x)\,dx$ maximale sous la contrainte $\int_0^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 25$

Dans le cas d'une étude en classe, cette première approche est sûrement trop générale.

Une simplification peut être faite en se ramenant à des considérations géométriques.

Mathématisation :

Ligne d'eau = courbe de longueur 25

Plage : demi-plan (hypothèse d'une frontière rectiligne entre l'eau et la terre)

Ligne d'eau : comment la placer pour avoir une aire de baignade respectant la législation ? (ou la + grande possible) → Question "bis"

Plage

Travail maths : Idée : on place la ligne en $\frac{1}{2}$ cercle

Soit $A(r)$ l'aire du $\frac{1}{2}$ disque et $P(r)$ son périmètre.

On a : $P(r) = \pi r = 25$ et $A(r) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{(P(r))^2}{2\pi} = \frac{25^2}{2\pi}$

Donc $A(r) \simeq 99$ (m²) (à l'unité près, arrondi par défaut)

Or la limite est respectée si : $\frac{120}{A(r)} \leq \frac{3}{2}$

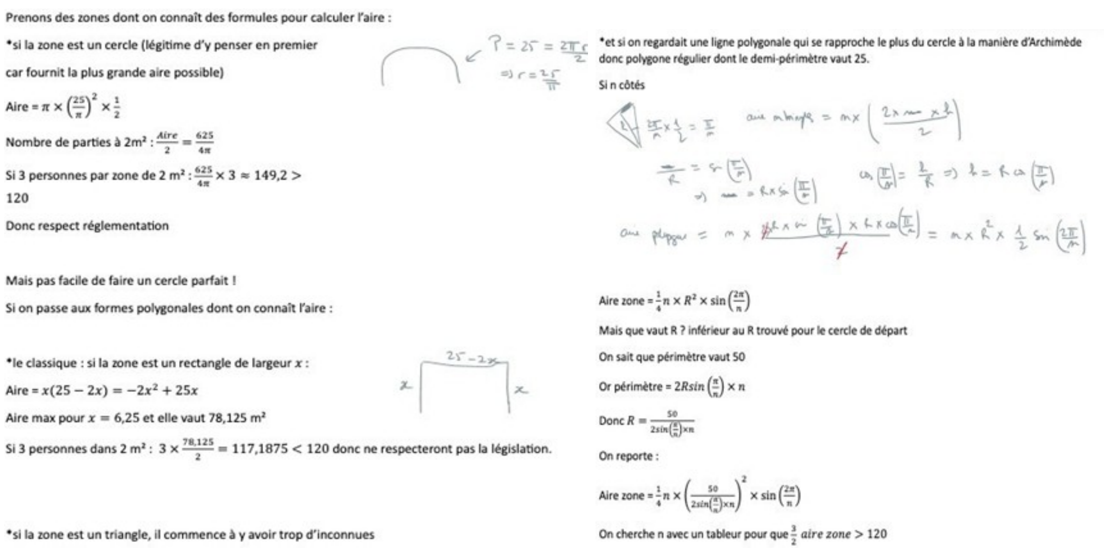
Donc si : $A(r) \geq 80$ (m²).

La solution convient.

Figure 41 : *Productions de Renaud et de Rémi.*

Une première variété de procédures et de zones de baignade a été partagée ainsi qu'une réflexion sur la situation proposée.

Pierre a précisé qu'au BAFA une réglementation existe sur l'encadrement des enfants par rapport à la baignade (voir annexe 1) et que des élèves de lycée pouvaient potentiellement connaître les normes en vigueur concernant l'encadrement des enfants selon leur âge et répondraient directement que l'on ne peut pas avoir 120 enfants en même temps dans un lac. En particulier, si les enfants ont moins de 12 ans, le nombre de baigneurs est limité à 40 et la situation n'a plus lieu d'être résolue.


Prenons des zones dont on connaît des formules pour calculer l'aire :

•si la zone est un cercle (légitime d'y penser en premier car fournit la plus grande aire possible)

Aire = $\pi \times \left(\frac{25}{\pi}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

Nombre de parties à 2m² : $\frac{Aire}{2} = \frac{625}{4\pi}$

Si 3 personnes par zone de 2 m² : $\frac{625}{4\pi} \times 3 \approx 149{,}2 >$ 120

Donc respect réglementation

$P = 25 = \frac{2\pi r}{2} \Rightarrow r = \frac{25}{\pi}$

Mais pas facile de faire un cercle parfait !

Si on passe aux formes polygonales dont on connaît l'aire :

•le classique : si la zone est un rectangle de largeur x :

Aire = $x(25-2x) = -2x^2 + 25x$

Aire max pour $x = 6{,}25$ et elle vaut 78,125 m²

Si 3 personnes dans 2 m² : $3 \times \frac{78{,}125}{2} = 117{,}1875 < 120$ donc ne respecteront pas la législation.

•si la zone est un triangle, il commence à y avoir trop d'inconnues

•et si on regardait une ligne polygonale qui se rapproche le plus du cercle à la manière d'Archimède donc polygone régulier dont le demi-périmètre vaut 25.

Si n côtés

Aire zone = $\frac{1}{4} n \times R^2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Mais que vaut R ? inférieur au R trouvé pour le cercle de départ

On sait que périmètre vaut 50

Or périmètre = $2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times n$

Donc $R = \frac{50}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times n}$

On reporte :

Aire zone = $\frac{1}{4} n \times \left(\frac{50}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times n}\right)^2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

On cherche n avec un tableur pour que $\frac{3}{2}$ *aire zone* > 120

Figure 42 : *Productions de Fabien et de Nadia.*

Préparation de la feuille de route

La feuille de route est l'ensemble constitué d'un énoncé, d'un scénario minuté (figure 7) et d'une grille d'intervention de l'enseignant (figure 8). Elle a fait l'objet d'une construction collective. Dans l'atelier cette construction a été adaptée (plus rapide qu'en LS ordinaire) en imposant l'énoncé alors qu'en réalité, il reste malléable par les enseignants. Le collectif s'est orienté vers un scénario structuré en 4 phases (figure 7) tentant d'inclure une dimension de modélisation dans ses objectifs.

Objectifs

Explorer différentes formes de zone de baignade.
Discuter des choix et des rapports entre les solutions trouvées et le rapport à la réalité.

Mode opératoire
Ordinateur à souhait, y compris internet

Scénario
Phase 1 (10 minutes) : Travail individuel avec énoncé papier.
Au bout de 5 min, l'enseignant questionne :
« *Qu'est-ce que vous avez compris ?* »
Si les élèves n'ont pas compris : on compte sur le groupe.

Phase 2 (30 minutes) : Travail de groupe
P « *Vous pouvez utiliser le tableau mural à proximité ou pas : vous déposez sur l'espace collaboratif la production du groupe. Vous pouvez faire figurer vos questions et vos hypothèses.* »
Au bout de 10 min seulement, l'enseignant relance si besoin.

Pause des élèves

Phase 3 (15 minutes) : Bilan intermédiaire. L'enseignant projette ou montre et fait expliciter des productions variées
- Entrée par le calcul en lien avec une figure
- Entrée par les contraintes par rapport aux surfaces
- ~~Un groupe a réalisé une zone fermée~~

Figure 43 *: Scénario réalisé durant la session 1 de l'atelier.*

Lors de cette élaboration de la feuille de route, les idées émises sont notées par les facilitateurs, débattues et éventuellement barrées si elles n'ont pas convaincu l'ensemble du collectif comme pour des productions avec une zone de baignade fermée (figure 7).

Voici également la grille d'intervention de l'enseignant réalisée par le collectif.

Phase	Déclencheur d'intervention	Intervention de l'enseignant	Effets attendus, buts
1	Les élèves repèrent sur internet que c'est impossible pour les moins de 12 ans	C'est un document ancien.	Relancer le travail
1	Que signifie « ligne d'eau » ?	Une sorte de corde qui peut flotter et qui limite l'endroit où on peut se baigner. Elle a des flotteurs (bouées en plastique qui flottent	Expliquer le rôle de la ligne d'eau
1	Que signifie « respecter la législation » ?	Tous les enfants peuvent se baigner en même temps en respectant ce qui est écrit ci-dessus.	Relancer le travail
1	Que signifie « fréquentation maximale instantanée » ?	Le nombre maximal de personnes qui peuvent se baigner en même temps.	Relancer le travail
2	Un groupe ne démarre pas.	Faire relire l'énoncé, faire arriver à reformuler. Le mot « aire » vous fait penser à quoi ? Et si vous représentiez ?	Idée d'entrer dans la tâche
2	Un groupe a dessiné une zone fermée.	Comment font les enfants pour entrer dans la zone de baignade ?	Idée de laisser ouvert
2	Un groupe ne décolle toujours pas.	Donner une ficelle et demander de représenter le bord du lac	Idée d'entrer dans la tâche
2	Calcul de l'aire avec une formule fausse.	Renvoyer sur internet à la recherche de formules	Invalider celle erronée

Figure 44 *: Grille d'interventions de l'enseignant réalisée durant la session 1 de l'atelier.*

À propos du bilan

Les facilitatrices ont incité à structurer le bilan et la phase d'institutionnalisation en anticipant ce qui serait écrit au tableau. Pour cela, les auteures ont partagé une photographie de tableau japonais (figure 9) issu d'une Lesson Study. L'idée était d'illustrer une organisation anticipée en Lesson Study au Japon où le travail autour de la trace laissée au tableau (appelée bansho au Japon) est important en amont de la leçon (Tan, 2021).

Figure 45 *: Tableau réalisé pour une Lesson Study au Japon (Masselin & al., 2023)*

Samuel, membre de l'atelier et enseignant au lycée LP2I, a par ailleurs partagé des éléments de contexte. Il a montré une photo de la salle de classe où sera réalisée la LS (figure 10). Elle montre la présence de quatre tableaux latéraux sur lesquels les élèves ont l'habitude de travailler.

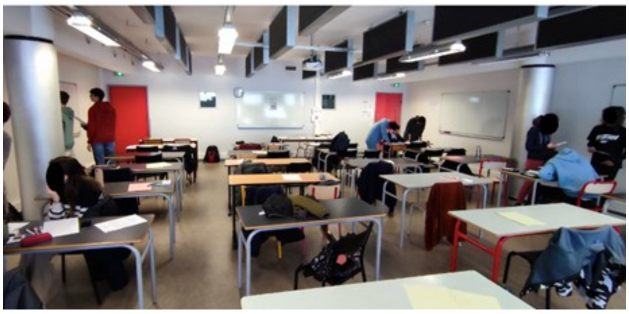


Figure 46 *: Photo de la salle de classe de la LS, Lycée LP2I.*

Au regard de ces précisions, le collectif a fait le choix d'utiliser les quatre tableaux latéraux de la salle de classe pour la phase de travail en groupes d'élèves et de proposer aux élèves de déposer leur production finale sur un espace partagé comme ils en ont l'habitude.

Une précision sur les types d'observations

Les participants amenés à observer la leçon doivent relever les interactions entre élèves au sein d'un groupe, et entre élèves et enseignant. L'idée est de s'observer soi-même via l'enseignant- expérimentateur. Ces actions permettent une réflexion sur des effets d'enseignement, reflet de choix du collectif.

Il est précisé que d'ordinaire, en LSa, le collectif d'enseignants se retrouve une heure avant l'arrivée des élèves afin de relire le scénario et de préparer la salle de classe avec un plan précis des groupes d'élèves afin d'en faciliter l'analyse *a posteriori*.

Le moment de fin d'atelier a été consacré à trouver un enseignant-expérimentateur volontaire pour jouer la leçon préparée. Nadia s'est proposée sur recommandation de Rémi qui, lui, a accepté d'être l'enseignant-expérimentateur suppléant. Son rôle consiste à faire une observation globale de la classe (déplacement de l'enseignante dans les différents groupes, garant du temps des différentes phases). Il a également été décidé que Rémi prendrait en charge la phase de bilan.

3. Deuxième session de l'atelier

3.1. Préparation de la salle de classe

Les îlots sont constitués de deux tables doubles. Il a été décidé de rapprocher chacun d'entre eux des tableaux latéraux fixés au mur. Le collectif a procédé au repérage des groupes (numérotation, prénoms des élèves sur les tables). Chaque tableau latéral a été séparé en deux zones pour l'usage de deux groupes. Chaque observateur s'est attribué un groupe d'élèves. Deux groupes n'ont pas été observés, par manque d'adultes présents dans cet atelier. Il y a eu ensuite une relecture des différentes phases du scénario par l'ensemble des enseignants avant l'entrée des élèves.

3.2. Mise en œuvre de la séance de classe

La séance avec les élèves a duré de 8 h 22 à 9 h 40, pause comprise.

Après l'entrée des élèves, Blandine, la facilitatrice, a exposé rapidement le déroulé de la séance aux élèves et a présenté l'enseignante-expérimentatrice et le rôle des observateurs.

Elle a précisé que ce qui serait observé serait le travail des élèves (sans jugement ni évaluation) et les interactions entre élèves et professeur expérimentateur.

Phase 1

Travail de lecture de l'énoncé et travail individuel.

Phase 2 Travail individuel (10 min)

A la fin de cette phase, l'enseignante demande à la classe : « *Qu'est-ce qu'une ligne d'eau ?* » souhaitant s'assurer que la définition de la ligne d'eau ne pose pas problème.

Suite au silence observé, l'enseignante ajoute : « *C'est une sorte de corde avec des flotteurs et les enfants ne pourront se baigner qu'à l'intérieur de la zone délimitée par cette corde. Qu'avez-vous compris de cet énoncé ?* »

Un élève répond : « *Il faut trouver l'aire que délimite la ligne d'eau et ne pas dépasser 3 enfants pour 2* m^2. »

Phase 3 Travail de groupe

L'enseignante lance cette phase en autorisant des échanges entre élèves, les calculatrices sont implicitement autorisées. La recherche s'achève à 9 h 03.

Le lecteur trouvera, en section 2.4, le détail des travaux développés dans chaque groupe grâce au retour des observateurs.

Phase 4 Bilan

Il démarre à 9 h 20 et est pris en charge par l'enseignant-expérimentateur suppléant après analyse et hiérarchisation des productions aux tableaux par le collectif durant la pause des élèves. Le choix a été fait de présenter toutes les productions en les regroupant en fonction des types de surfaces envisagées :

- zone semi-circulaire (groupes 5, 3, 2 et 8),
- zone carrée (groupe 4),
- zone rectangulaire (groupes 6, 7 et 1).

Cette phase s'est déroulée oralement avec des précisions demandées ponctuellement par l'enseignant à l'élève exposant le travail du groupe. L'enseignant a circulé de tableau en tableau, les autres élèves restant assis à leur place, sans interagir avec chaque présentateur.

Seul un élève du groupe 4 s'est déplacé au bureau de l'enseignant. Il a utilisé Geogebra (voir figure 23) et a exposé à la classe la représentation graphique de la fonction d'expression $g(x)=25x-2x^2$ qu'il avait trouvée pour exprimer l'aire d'une zone rectangulaire. Il a ensuite dit « *La courbe est située en-dessous de la droite d'équation* $y=80$*, donc on ne peut pas atteindre 80* m^2. » L'enseignant lui a alors demandé s'ils avaient déjà vu en cours les fonctions polynômes du second degré, question à laquelle il a répondu négativement.

3.3. Les tableaux des groupes en fin de séance

La section suivante présente les tableaux (figure11) investis par les différents groupes lors de leur mise en commun au sein des groupes. Ils ont servi de support au bilan établi en phase 4 où l'enseignant-expérimentateur a laissé la parole à chaque groupe afin qu'il explique aux autres élèves les travaux réalisés. Le numéro de groupe est visible en haut à gauche de chaque tableau.

3.4. Détails du travail de chaque groupe d'élèves observé

Chaque observateur a recueilli les échanges sur une feuille dédiée fournie par les facilitatrices. Le support permet de noter l'horaire et le contenu factuel des échanges entre élèves au sein du groupe ou entre les élèves et l'enseignant. Par la suite, chaque observateur devait transmettre un compte-rendu de ses observations avec éventuellement des photos en appui.

Le groupe 1 observé par Clarisse.

E-L-M sont les initiales des prénoms des trois élèves.

Les élèves explorent d'abord l'hypothèse d'une forme carrée et s'interrogent : « La corde est-elle en plein milieu de l'océan ou il faut prendre en compte le bord ? On va faire les deux. »

Deux calculs d'aires sont effectués : pour une zone de baignade carrée de côté 6,25 m (aire estimée 39,1 m^2) puis de côté 25/3 (aire estimée 69,4 m^2).

Les élèves du groupe avaient vite trouvé la contrainte d'atteindre 80 m^2 pour que les enfants de la colonie se baignent tous ensemble. Ils écartent donc l'hypothèse d'une zone de baignade carrée.

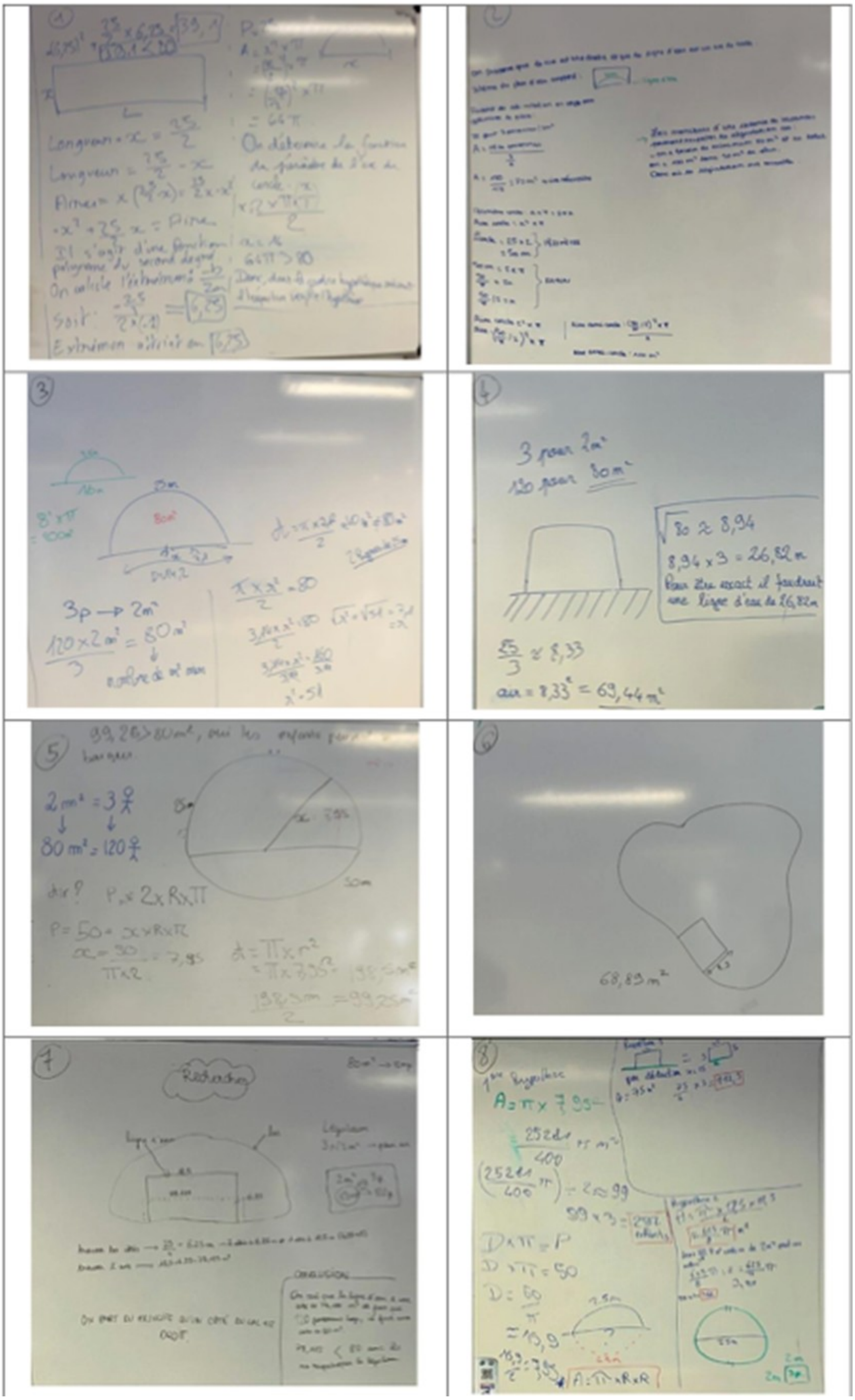


Figure 47 *: Photos des huit tableaux en fin de séance.*

Les élèves envisagent ensuite une zone de baignade rectangulaire : *« Ça sera une fonction et après on maximise. On détermine l'équation de la fonction et ensuite on l'étudie dans l'intervalle* $[0;25]$ *»*. En regardant sur le tableau du groupe 7 où un demi-cercle est dessiné ils s'interrogent *« Est-ce qu'un arc de cercle optimise l'aire ? Mais une ligne d'eau est toujours en rectangle … en vrai elle n'est pas un rectangle, ni un arc de cercle, sur l'eau ça bouge ! »* Ils décident d'étudier les deux options.

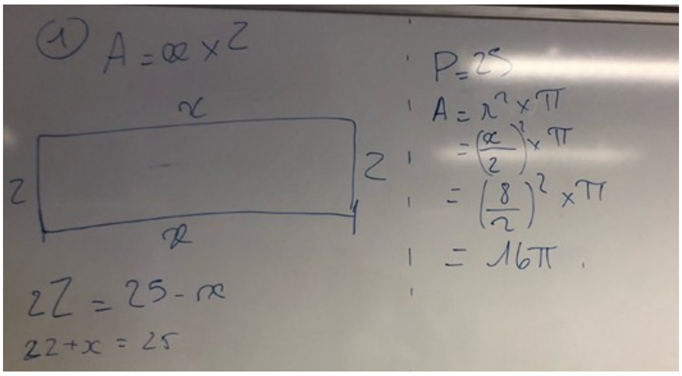


Figure 48 *: Tableau à 8 h 40.*

Comme le montre la figure 12, deux variables sont introduites pour la modélisation par un rectangle, les élèves ne s'en sortent pas et passent au demi-cercle. La feuille de E permet de comprendre que x désigne le diamètre d'un cercle de demi-périmètre égal à 25, et de constater que les élèves font des erreurs de calcul (ils trouvent 8 pour x. En se relisant, l'élève E indiquera qu'il s'est trompé et que $x=16$ ce qui reste faux. Il commente oralement « *l'arc de cercle ça ne tient pas… mais ça optimise… ce n'est pas réaliste… on a une situation théorique et une situation réaliste* ».

Les élèves se penchent à nouveau sur la modélisation par le rectangle : E voudrait arriver à une écriture de la forme $a x^2+b y^2+c=y$ qu'il annonce vouloir ensuite traiter avec *« la technique du discriminant »*.

Après la pause, E efface le tableau et y reprend l'ensemble des calculs (figure 13). Sur la partie gauche (figure 13), il revient sur la modélisation par une zone rectangulaire fermée de périmètre 25 m, algébrise correctement les longueurs des côtés et l'expression de l'aire en fonction de x. Il résout correctement et indique que l'extrémum est atteint pour $x=6{,}25$. Ce résultat n'est pas commenté, les élèves avaient au tout début calculé l'aire d'un carré de côté 6,25.

Sur la partie droite du tableau (figure 13), il reprend la modélisation par un demi-cercle ou disque, il réutilise la valeur 16 pour x (ce qui fausse la suite du calcul).

Le groupe 1 a eu tout au long de la séance une dynamique de travail particulière. L'élève E a très vite partagé sa vision du problème et les deux autres membres ont été dans l'écoute de ses « explications » et/ ou dans l'exécution de tâches que E leur « confiait ». Il y a eu peu d'interaction entre les élèves, L et M considérant que E était trop fort, qu'il n'y avait pas de discussion possible vu l'écart de niveau. Ultérieurement, l'enseignant de la classe nous a indiqué que E est un élève autiste Asperger.

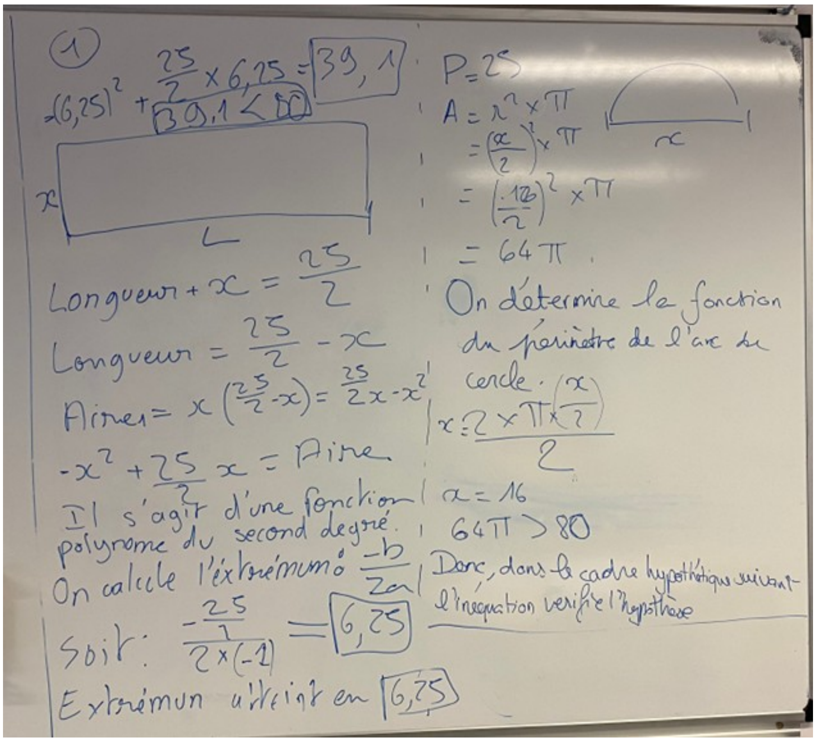


Figure 49 *: Le tableau du groupe 1 en fin de séance.*

Le groupe 2 observé par Fabien.

C-T-M-H sont les initiales des prénoms des élèves.

Après présentation du travail par l'enseignant-expérimentateur, C et M lisent et surlignent les mots importants de l'énoncé. H, lui, réfléchit sans rien dire ni écrire et ne se lance au brouillon qu'au bout de deux minutes. Après un rappel par l'enseignant-expérimentateur que le travail dans ce premier temps est individuel et une explication du mot « ligne d'eau », une première idée concernant l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{p-1}{\sqrt{n}};\frac{p+1}{\sqrt{n}}\right]$ est lancée. Les élèves tentent de raccrocher le problème au thème étudié en classe à ce moment-là. Ceci est vite évacué par l'idée d'une zone circulaire qui apparaît pour la première fois sur la feuille de T (figure 14).

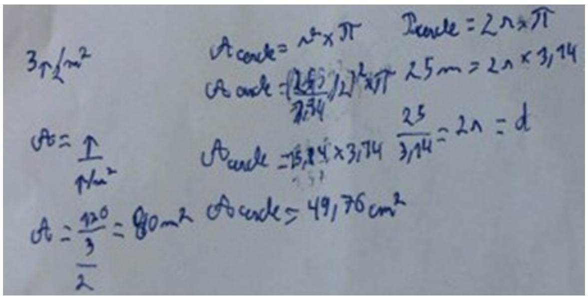


Figure 50 : Première apparition de l'idée du cercle et calculs de T.

A cet instant, les contraintes de la loi ne sont cependant pas clairement comprises par C et M : ils se demandent si 3 personnes pour 2 m^2 équivaut à 1 personne par m^2. Pendant ce temps, T a poursuivi ses calculs sur sa feuille (figure 14).

Le groupe passe alors au tableau mural pour le travail collectif. Un consensus se dégage rapidement autour de l'idée du cercle sans vraiment d'explication. Les élèves travaillent spontanément par deux en écrivant au tableau (figure 15). Pendant que C et M déterminent l'aire minimale nécessaire pour contenir les 120 enfants, T et H effectuent en parallèle un travail sur le cercle pour déterminer son rayon connaissant son périmètre et en déduire son aire. L'idée du carré est aussi étudiée.

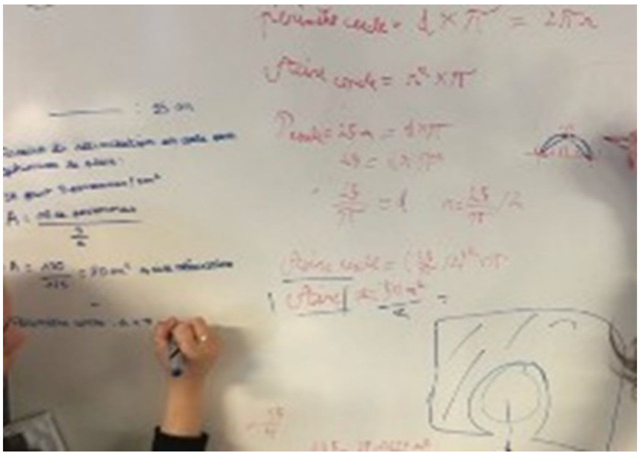


Figure 51 *: : Le premier travail en considérant la zone circulaire.*

Mais le groupe se rend compte que le cercle ne permet pas aux enfants de pénétrer dans la ligne d'eau. Les élèves passent alors à l'idée du demi-disque mais ont des difficultés à trouver comment calculer l'aire du demi-disque de périmètre donné. Finalement, la construction d'une figure (figure 16) permet de débloquer la situation.

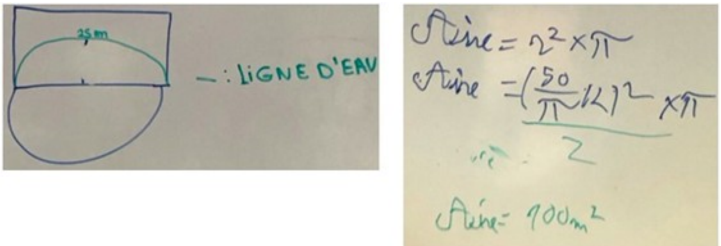


Figure 52 *: Passage du cercle au demi-cercle*

Finalement, les élèves produisent une solution rédigée dans le cas du demi-cercle (figure 17) et ont correctement effectué le retour à la situation réelle mais n'ont pas eu le temps de comparer leur solution avec d'autres formes de ligne d'eau. En effet, à la fin du temps de travail imparti, H évoque qu'une ligne d'eau est « droite en général » induisant l'idée du rectangle qu'ils n'auront pas le temps d'explorer.

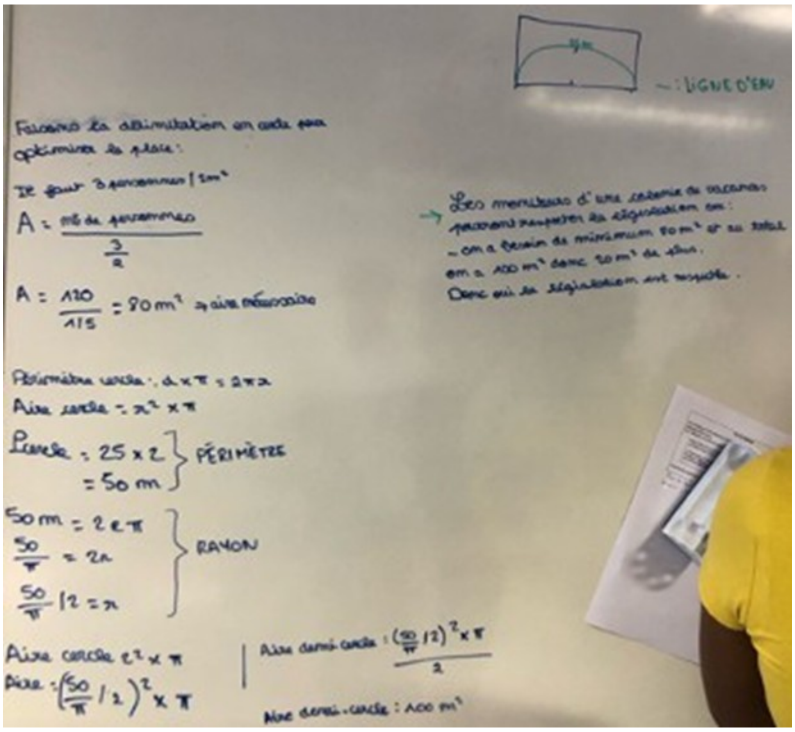


Figure 53 *: Tableau final*

Le groupe 3 observé par Renaud.

Deux élèves (aux initiales C et Y) travaillent, un troisième élève partant à l'infirmerie dès le début de la séance sans en revenir.

Après présentation de la séance, du travail attendu et distribution des feuilles d'énoncé, les deux élèves du groupe C et Y lisent silencieusement le texte.

Après quelques minutes, C commence à dessiner sur sa feuille une forme représentant un lac et l'efface aussitôt. Elle fait ensuite un schéma du lac sous la forme d'un demi-disque.

Après un temps de régulation et d'explicitation de l'enseignante expérimentatrice, les élèves repartent en phase de recherche en groupe et C repart sur l'aire d'un disque en notant x pour le diamètre. Elle demande confirmation à Y de la formule de l'aire d'un disque et écrit l'expression de l'aire du demi-disque en fonction de x.

Après incitation par l'enseignante-expérimentatrice à utiliser les tableaux, C présente ses recherches à Y. Puis C rajoute au tableau (figure 18) la contrainte $\frac{120 \times 2\,m^2}{3} =$ ¿ $80\ m^2$ (aire minimale à obtenir pour respecter la législation, cette contrainte ayant manifestement été obtenue par observation du groupe voisin…).

Ce changement d'approche mène à une équation (figure 19) d'inconnue le rayon du disque.

Cette équation est résolue mais la valeur du rayon obtenue n'est pas correctement réutilisée car la formule du périmètre du demi-disque est erronée : C et Y réutilisent la formule de l'aire mais en commettant une erreur de calcul, ce qui les met dans le doute. Après de nombreux essais et tâtonnements, elles ne parviennent pas à conclure faute de penser à réinjecter la valeur du diamètre dans la formule du demi-périmètre.

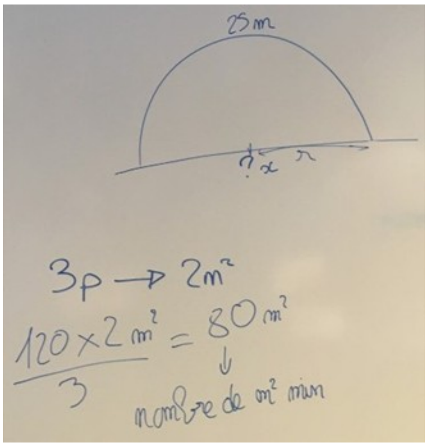


Figure 54 *: Représentation de la situation et recherche d'une condition.*

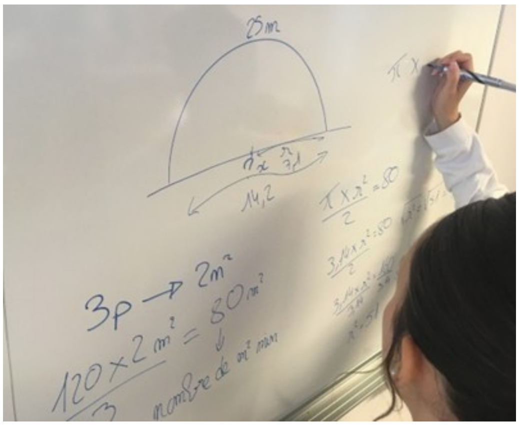


Figure 55 : Résolution de l'équation.

Finalement, une valeur de 39,2 *m* est affichée, correspondant à la somme des 25 *m* de ligne et du diamètre calculé de 14,2 *m*.

En fin de séance, le bon calcul ($14{,}2\times\pi/2$) apparaît (figure 21) mais n'est pas effectué et est ensuite effacé pour réécrire une condition sur l'aire :

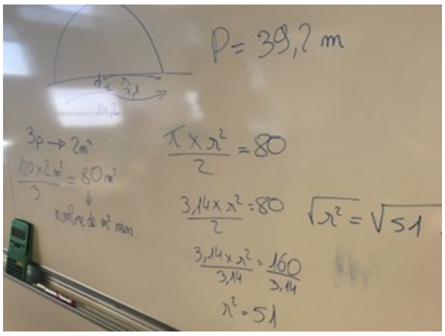


Figure 56 *: Confusion formule aire-périmètre, et obtention d'une valeur de périmètre.*

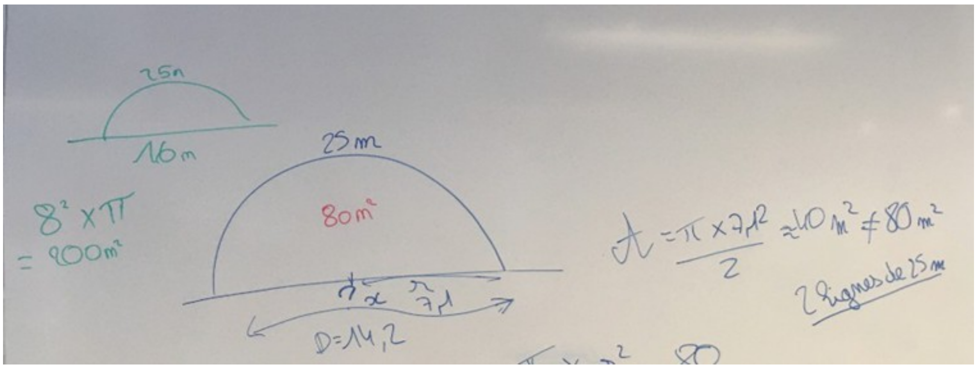


Figure 57 *: Nouvelle condition sur l'aire et conclusion.*

Le groupe émet une conclusion en empruntant un principe de proportionnalité : deux lignes de 25 *m* seraient nécessaires car une ligne de 25 *m* délimiterait une aire de 40 m^2.

Le groupe 4 observé par Bertille.

A-W-E-H sont les initiales des prénoms des élèves. Le groupe a initié une zone de baignade carrée de côté 25/3 *m* en estimant son aire à 69,44 m^2, ce qu'ils ont inscrit sur leur tableau latéral (figure 21). Une élève du groupe a trouvé la contrainte d'atteindre

80 m^2 pour que les enfants de la colonie se baignent tous ensemble. Ils ont estimé la longueur de ligne d'eau nécessaire pour avoir une zone de baignade carrée.

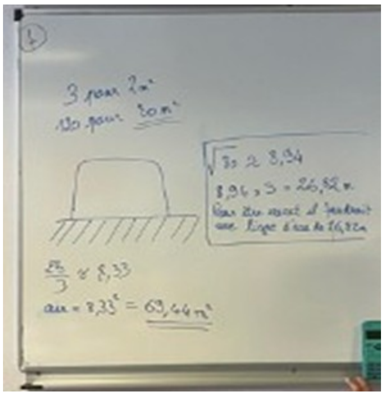


Figure 58 *: Tableau initial du groupe 4.*

L'enseignante-expérimentatrice n'étant pas intervenue dans le groupe, Bertille a proposé de choisir une zone de forme autre que carrée, comme par exemple une zone rectangulaire. Les quatre élèves ont calculé l'aire d'un rectangle dont un côté était respectivement 5 m, 6 m ,7 m et 10 m, exprimant que dans la réalité deux largeurs donnaient un couloir de nage trop étroit. Ils ont conjecturé que jusqu'à 6 m, l'aire du rectangle augmente et qu'à partir de 7 m elle diminue sans atteindre 80 m^2. L'observatrice a alors demandé ce qui se passe entre 6 m et 7 m, ce qui a permis d'envisager l'introduction de deux variables (pour la largeur et pour la longueur du rectangle). Le groupe a ensuite écrit les deux conditions en jeu à l'aide de ces variables.

Un élève, H, a identifié une équation du second degré et a initié des recherches sur Internet (cours d'Yvan Monka, figure 23).

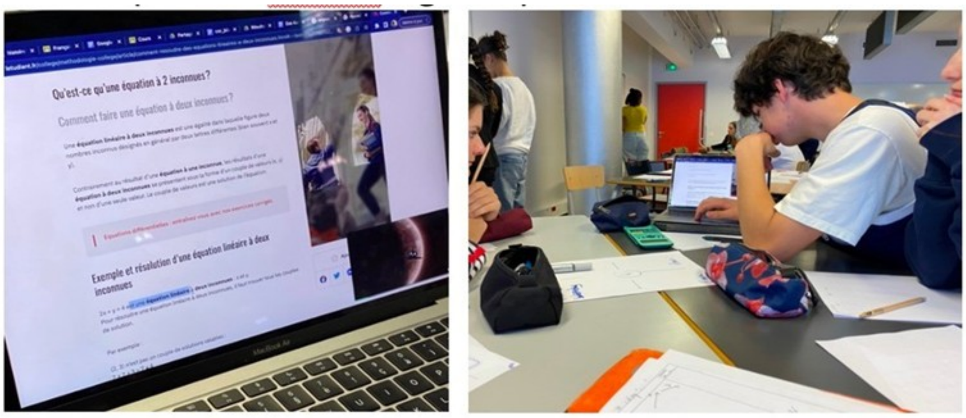


Figure 59 *: Recherche d'un cours sur Internet.*

H a invalidé son hypothèse et poursuivi ses recherches car une autre élève déclare avoir reconnu *« une fonction affine de type réaménagée »*. Ils ont ensuite exprimé l'aire de leur zone rectangulaire en fonction de la longueur d'un des deux côtés identiques (suggéré par l'observatrice) et ont obtenu une inéquation du second degré. L'observatrice a ensuite demandé au groupe s'il connaissait Geogebra. Le groupe a alors utilisé Geogebra en ligne pour résoudre l'inéquation dont ils ont développé le membre de gauche au préalable. Après déblocage par l'observatrice dans l'usage du logiciel, le groupe a repéré graphiquement (figure 24) que 80 m^2 n'était jamais atteint et que la loi ne pouvait être respectée dans le cas d'une zone rectangulaire.

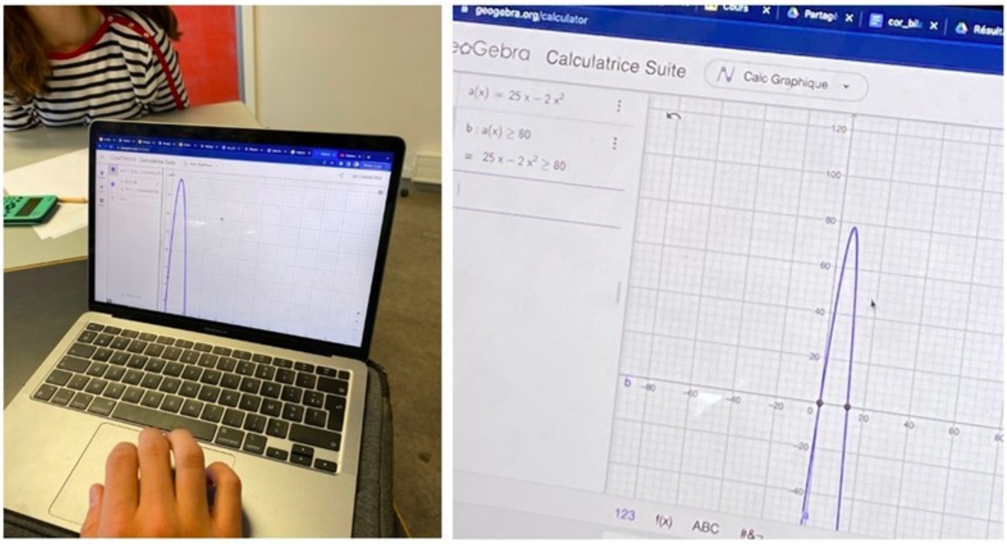


Figure 60 *: Saisie de l'inéquation et représentation graphique Geogebra.*

Le groupe 6 observé par Marine.

A, E et L sont les initiales des prénoms des élèves. Au début du travail de groupe, A questionne ses camarades « *On n'a pas la largeur de la ligne d'eau* », puis suggère de faire un produit en croix puis reformule la situation « *Il faut trouver l'aire que délimite 25 m*. »

E : « *Comment fais-tu pour calculer les m² dans un rond ?* »

A : « *Une ligne d'eau ne fera jamais 80 m² puisqu'elle fait 25 m, c'est comme à la piscine mais dans un lac donc un aller-retour c'est 50 m.* »

E sort son ordinateur portable et recherche « *formule m² dans un cercle* »

E : « *Si le contour fait 25 m, le diamètre ne fait pas 25 m, ou alors ce n'est pas un rond, à côté, ils se posent la même question.* »

L'enseignante demande alors : « *Êtes-vous allés en colonie ? Que savez-vous des règles de sécurité ?* »

Suite à cette intervention, le groupe a choisi une zone de forme carrée. 25 *m* divisé par 3 est égal à 8,3 *m* et $8,3m \times 8,3m = 68,89$ *m²*. Comme 80 m^2 > 68,8 m^2 le groupe valide la solution.

Il se questionne sur le fait d'avoir fini le travail rapidement et être le seul à ne pas avoir écrit au tableau.

E : « *C'est bizarre, ma chambre fait 25 m², ça fait beaucoup d'enfants. Le côté de la plage, on s'en fiche.* »

L'enseignante questionne : « *Où en êtes-vous ? Est-ce que votre solution est réalisable ?* »

Le groupe se rend compte de son erreur d'interprétation, 80 *m²* > 68,8 *m²* n'est pas une bonne solution. L'élève A propose une zone de forme rectangulaire mais se dit que c'est la même aire qu'un carré, ce que valide l'élève E en disant « *Il faut créer une variable sous Geogebra* ». Puis le groupe demande de la ficelle : l'élève L coupe un morceau de 25 *cm* de ficelle et décide de scotcher sur la table la forme obtenue. $7{,}5 \times 2 = 15, 25 - 15 = 10$ *et* $7{,}5 \times 10 = 75$.

A déclare ensuite : « Du coup ça varie, il faut qu'on fasse une variable. On peut faire une fonction pour modéliser, on va regarder sur le cours du début d'année. »

Chaque élève du groupe cherche sur son espace en ligne ses cours du début d'année.

A saisit sur le moteur de recherche internet « *Trouver la valeur optimale d'une fonction* » puis décide de retourner dans ses cours sur « *les boîtes de conserve* ».

E « *Ce n'est pas pareil, les boîtes de conserve étaient rondes* ».

Le groupe attend la fin du travail des autres groupes.

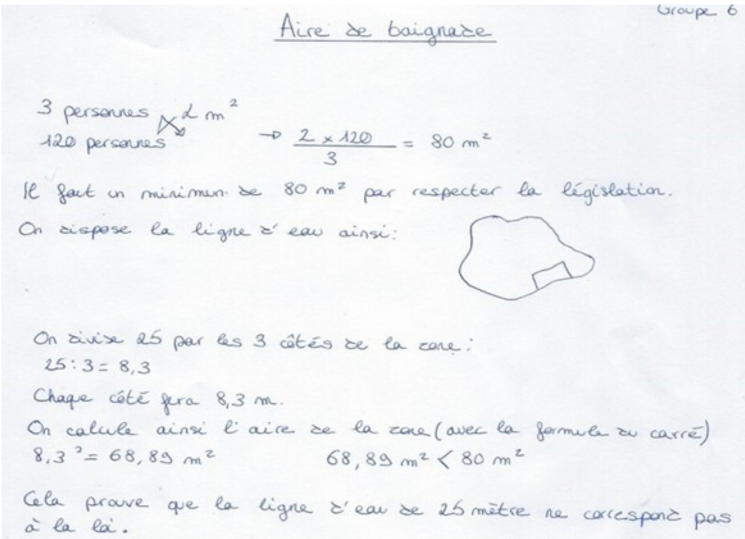


Figure 61 *: Bilan du groupe 6.*

Le groupe 8 observé par Samuel.

Trois élèves dont les initiales des prénoms sont E, M et A. Lors de la phase de lecture individuelle, A surligne les données importantes de l'énoncé. M écrit un court résumé des données (120 enfants ; aire de baignade de 25 m^2 ; la règle avec une erreur 3 personnes par m^2) et fait un premier schéma sur la feuille énoncé. E lit attentivement et ne note rien

Figure 62 : Schématisation et premiers modèles
(disque, demi-disque, quart de disque, carré, rectangle et même "patate")

La phase individuelle se termine, les élèves sont autorisés à échanger. Les trois élèves échangent succinctement sur leurs débuts de résolutions individuelles (figure 25) pour rapidement former deux sous-groupes : M seule et E et A associées. Deux résolutions se produisent en parallèle, avec des interactions faisant bifurquer les stratégies des deux sous-groupes.

M commence et part sur l'hypothèse d'un disque et demande : « *Aire d'un cercle : c'est quoi la formule ?* ». Les deux autres lui répondent « *Cherche avec ton ordi.* » M déclare : « *L'aire c'est* $\pi \times rayon \times rayon$. ». M fait un schéma au tableau avec un demi-disque de périmètre 25 *m*. Elle se lance ensuite sur le calcul du diamètre.

En parallèle, E et A font un carré de côté $\frac{25}{4} m = 6{,}25\,m$, puis se mettent d'accord pour un carré de côté $\frac{25}{3}$ *m*. E fait un schéma pour la règle de 3 personnes pour 2 *m*² et se trompe en faisant un carré de côté 2 *m*, soit 4 *m*². La compréhension de la règle semble néanmoins bonne. E et A prennent la calculatrice pour chercher l'aire du carré, puis le nombre de personnes en divisant par 2 et en multipliant par 3 pour obtenir 104 personnes.

M intervient alors : « *Ce n'est pas possible ! Tu as déjà vu une ligne pliée ?* » E passe alors au tableau, puis fait un schéma d'un disque de diamètre 25 *m* en accord avec A.

E et A interprètent la ligne d'eau comme étant le diamètre d'un disque, qui représentera l'aire de baignade. E rédige au tableau le calcul de l'aire d'un disque de rayon 12,5 *m* pendant que A mène le calcul avec sa calculatrice pour donner à E les valeurs exactes et approchées. Elles obtiennent le résultat de 366 personnes (figure 27).

M continue sa recherche du diamètre, puis du rayon pour obtenir 7,95 *m*. L'aire trouvée est arrondie à 198 *m*². "Combien de 2 *m*² ?" Elle détermine ensuite le nombre d'enfants pour aboutir à 297.

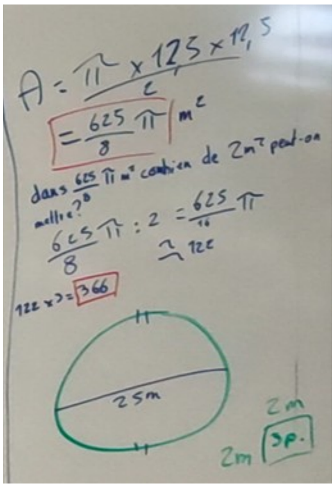
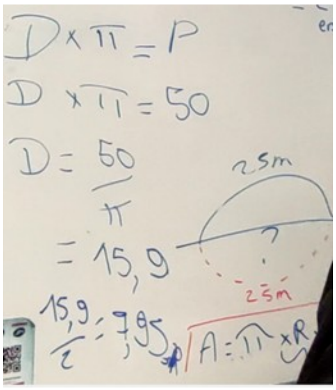


Figure 63 *: Tableau initial du binôme E et A*



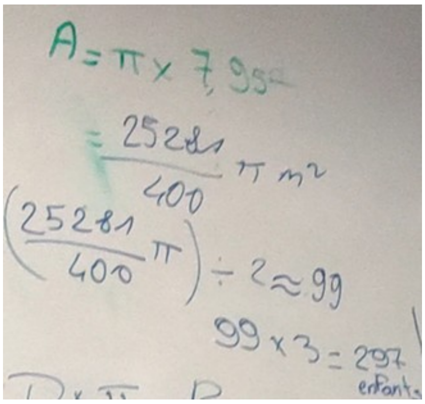


Figure 64 *: Tableau initial de M seule*

Les trois élèves comparent leurs deux résultats. M explique sa démarche. E et A ne remettent pas en question explicitement leur interprétation du 25 *m* comme diamètre.

E dit alors : “Il y a un raisonnement qui tient mieux que l’autre”, sans préciser lequel.

E prend en main la finalisation de la rédaction et écrit hypothèse 1 pour celle de M et hypothèse 2 pour celles de E et A.

E propose une nouvelle hypothèse 3 avec un rectangle qu’elle avait semblé abandonner au début de la phase commune. E évoque aussi que la zone de baignade pourrait avoir la “forme d’une patate !”

Le temps de recherche s’arrête ici avec l’intervention de l’enseignante-expérimentatrice : “*Et dans la réalité, est-ce que la forme du demi-cercle est possible, dans la vraie vie ?”*

3.5. Le ressenti immédiat des enseignants-expérimentateurs

Nadia n’a pas vu le temps passer, elle dit avoir adoré, mais a décelé que le groupe 5 avait menti lors de la phase de bilan afin de « se débarrasser de l’enseignant ».

Pour Rémi, le bilan a pris du temps, et il regrette de ne pas être revenu sur le fait de questionner les élèves autour de la situation réelle comme initialement prévu dans le scénario.

Le scénario de départ (session 1) a été modifié pendant la pause des élèves : tous les groupes ont exposé leur résolution du problème, pour ne décevoir personne. C'est au détriment du temps initialement prévu pour une réflexion sur un retour au réel. Il avait été décidé de ne faire passer qu'un groupe par forme de zone (circulaire, rectangulaire, carrée, …).

4. Troisième session de l’atelier

4.1. Retour des enseignants-expérimentateurs

Les deux enseignants-expérimentateurs ont également rédigé un bilan que nous exposons ci-dessous. Les sous-sections suivantes relatent les points évoqués par les participants dans le troisième atelier. Cet atelier a eu lieu l'après-midi du jour de la leçon réalisée avec les élèves, comme en LSa classique. Le groupe a procédé à des premiers ajustements. Nous relatons également des apports complémentaires didactiques en lien avec la modélisation. Ce point est usuellement discuté entre chercheurs et facilitateurs avant une troisième journée décalée (4 à 5 mois après la leçon et son analyse *a posteriori*), le temps de permettre aux participants de tester la ressource dans leur propre classe avec des adaptations possibles.

Retour de Nadia

Nadia est l'enseignante-expérimentatrice lors de la première partie du scénario.

« Pendant le travail effectué a priori par le collectif, la feuille de route me semblait un peu légère, notamment en termes de relances mais finalement, elle s’est avérée suffisante. Je pense avoir suivi le plan proposé par le collectif, ce que le collectif a confirmé ; sur les 10 minutes de la

phase 3 pendant lesquelles je ne devais pas intervenir sur les travaux, je suis intervenue sur la compréhension de la « zone de baignade » en faisant des retours à la réalité.

La phase 1 de recherche me semblait trop longue car les élèves, habitués à échanger et à travailler en groupe ont très vite commencé à discuter entre eux. Il a fallu recadrer dans les groupes en insistant sur l'intérêt de la recherche individuelle qui, par la suite, peut apporter de nouvelles pistes et permettre de faire émerger des idées sans partir sur une idée « collective » immédiatement.

Les élèves ont accepté de travailler seuls 10 minutes ; après réflexion, cette phase individuelle, de 10 minutes était très pertinente (et je veillerai à la faire respecter à mes propres élèves).

Le découpage du temps des autres phases était bien adapté (manque de temps pour la phase 2).

J'ai oublié d'aller voir deux groupes, oubliant le rôle des observateurs et me concentrant sur les groupes « seuls ». Trop de temps passé avec certains groupes ? Idée de se fixer un temps court dans chaque groupe et tourner ? Pistes proposées dans la discussion a posteriori à creuser.

Enfin, cette expérience a été très enrichissante, le vivre est aussi très pertinent. »

Retour de Rémi

Rémi est l'enseignant-expérimentateur lors de la phase de bilan des travaux des groupes d'élèves.

A propos de son rôle initial d'observateur global lors de la première partie, il déclare :

« Selon moi, lors de la première phase, l'enseignante Nadia a su s'adapter (dès qu'une question a été posée à propos du sens de « ligne d'eau », elle en a profité pour s'assurer que l'énoncé était compris de tous sans attendre l'instant fixé par le planning a priori). J'ai trouvé que la deuxième phase était un peu trop courte : aucun groupe n'a eu vraiment le temps de prendre un peu de recul. »

Et sur son rôle d'enseignant expérimentateur :

« Je suis intervenu après la pause pour faire le bilan de la séance avec les élèves. Il m'a semblé difficile de faire ce bilan « à chaud », en ayant juste quelques minutes de réflexion collective. Néanmoins, le fait d'avoir les tableaux sous la main et le travail frais dans la tête des élèves me semble un avantage.

Une remarque : faire le bilan alors qu'on n'est pas l'enseignant expérimentateur n'est peut-être pas l'idéal (j'étais notamment concentré sur des objectifs logistiques de type respect du planning), ou en tout cas, il vaut mieux qu'il soit prévenu avant.

Lors du bilan (après la pause), j'ai fait présenter le travail des groupes en sélectionnant une liste de travaux qui présentaient à chaque fois des différences. Les autres groupes m'ont semblé assez passifs, et je n'ai pas réussi à les faire commenter le travail des autres, il n'y a pas eu assez d'interactions entre moi et les élèves ou entre les élèves entre eux. Mes questions étaient sans doute trop vagues, et trop collectives. J'aurais pu :

interpeler certains groupes dont je savais qu'ils avaient fait des choix différents de ceux de la présentation en cours ;

interpeler les groupes sur des points précis (« Les élèves du groupe 1, que pensez-vous des hypothèses des élèves du groupe 2 ? », « Les élèves du groupe 1, que pensez-vous des hypothèses, du réalisme de la solution du groupe 2 ? »).

Nadia m'avait proposé de réunir les élèves au centre de la classe pour faire le bilan, je n'ai pas suivi son conseil, mais rétrospectivement, je pense que c'était une bonne idée, à tester, afin de rendre plus actifs les élèves lors du bilan.

J'avais prévu après la présentation des travaux par les élèves de faire un bilan au tableau, mais je n'ai pas eu le temps. J'aurais voulu revenir sur :

certains élèves n'ont pas demandé assez d'aide à l'enseignant ;

insister sur les hypothèses : certains groupes les ont bien mises en évidence, d'autres non, et aucun groupe n'y est revenu à la fin pour commenter son modèle ;

insister sur l'importance des contrôles, et mettre en évidence qu'en étant plusieurs groupes avec des démarches différentes, cela fournit des contrôles

Par exemple, pour l'aire rectangulaire, il y a eu une approche algébrique (maximisation d'un polynôme du second degré), numérique (utilisation de Geogebra pour le même polynôme), et un argument géométrique confus mais que l'on peut rendre rigoureux.

Je retiendrai quelques points forts comme l'importance :

du vécu pour exclure certaines configurations (ceux ayant participé à une colonie pourraient reproduire la figure observée en colonie, vent sur les bouées etc.)

du retour sur la réalité (par exemple : expérience pour trancher entre demi-cercle infaisable ou non ? Reconnaître que ce n'est pas une question mathématique). »

4.2. Retour collectif sur le déroulé

Sur la première partie de cette session réalisée l'après-midi de la leçon de recherche, nous avons procédé, de façon accélérée, à de premiers ajustements de la feuille de route initiale. Cette phase cruciale dure généralement trois heures et s'appuie sur les notes prises par les observateurs tout en donnant d'abord la parole à l'observateur global. En effet, ce dernier peut retracer, minute après minute, le cheminement de l'enseignant dans chaque groupe sans pour autant en préciser les interventions. L'observateur de groupe prend alors le relais pour indiquer précisément ce qui s'est échangé au sein du groupe, ce qui permet d'expliciter des procédures et leurs évolutions.

Quels premiers ajustements ?

Un objectif du scénario ajouté *a posteriori* par le collectif est de revenir à la problématique, et de faire expliciter aux élèves les étapes de modélisation (pointer les étapes en lien avec la réalité, quelle part respective des élèves et de l'enseignant).

Le collectif a envisagé les modifications suivantes : un ajout de 5 minutes pour la phase 2 jugée trop courte et, pour la phase 3 (de bilan intermédiaire), une réduction de sa durée de 10 minutes selon l'objectif initial. Enfin des éléments de débat au sein du collectif sont précisés :

« Nous devrions insister sur certains travaux d'élèves initiaux qui avaient exprimé des hypothèses de modélisation et s'en servir comme levier. Il faudrait également réinjecter le réel dans la phase de résolution de l'aire de baignade après avoir envisagé plusieurs méthodes et permettre aux élèves des moyens de contrôle de ce problème d'optimisation en lien avec le tracé sous Geogebra d'une fonction polynomiale du second degré. Lors du bilan, il s'agirait de valider les solutions avec différents traitements réalisés au sein de la classe, puis de revenir au réel en demandant si les solutions obtenues sont réalistes. »

Le groupe envisage d'insérer *a posteriori* une phase 4 au scénario lors d'une autre séance :

« La nouvelle phase 4 permettrait d'expliciter les différentes étapes de modélisation, d'organiser le bilan en dessinant un cycle de modélisation et à identifier les travaux des groupes à partager avec la classe. Elle permettrait de faire expliciter les démarches utilisées et de répondre à la question sur le respect ou non de la loi. »

Des apports didactiques au collectif sur la modélisation

Les auteures ont également consacré un temps de l'atelier à des apports didactiques en lien avec la modélisation, tout en souhaitant illustrer la façon dont cela peut se faire en LSa avec des enseignants. Il s'agissait de faire découvrir le cycle de modélisation de

Blum & Leiss (figure 1), puis celui augmenté d'Yvain-Prébiski (figure 2). Ensuite, les rapports entretenus entre le monde réel et le monde symbolique des mathématiques ont été distingués en introduisant les mathématisations horizontale et verticale avec l'appui d'une diapositive (figure 29)

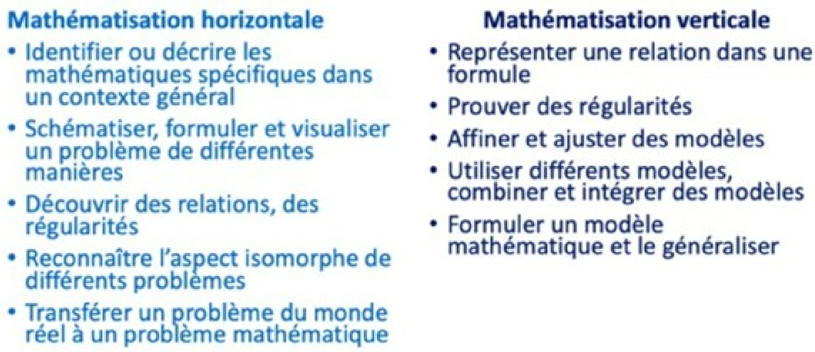


Figure 65 *: Diapositive partagée dans l'atelier*

L'objectif de formation était que les participants s'approprient le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) à l'aide du visionnage d'extraits de vidéos de classe dont ils devaient retrouver l'étape en cours dans l'extrait.

Dans le prolongement de cette analyse, le collectif s'est posé la question de la gestion d'une pluralité de modèles en classe : quelles interventions de l'enseignant et quelle part de modélisation laissée à la charge des élèves ?

En complément, les auteures ont mentionné au collectif deux autres références de recherche en didactique des mathématiques en lien avec la situation de l'aire de baignade. La première est celle de Derouet & Yvain-Prébiski (2023) où les autrices ont décrit minutieusement le processus de modélisation de l'aire de baignade et en ont dégagé des fragments de réalité. La seconde, d'Yvain-Prébiski & Masselin (2023) traite également de la même situation mais cette fois avec une étude portée au cycle 3 avec mise en évidence d'effets d'enseignement autour de la modélisation sur le travail d'élèves.

Le collectif de l'atelier a émis l'idée d'impliquer les élèves davantage et de leur faire prendre conscience du point jusqu'où ils sont allés dans la modélisation à partir de leurs travaux. C'est justement ce que les auteurs avaient prévu de faire faire aux participants dans la suite de l'atelier.

4.3. Vidéos et étapes du cycle de modélisation

Travail autour de trois extraits vidéo

Il s'agissait de visionner des extraits de vidéos apportés par les facilitatrices qui, d'ordinaire, servent à enrichir l'analyse *a priori* de la situation en amont de la préparation d'un scénario pour une classe. Ils sont issus d'une sélection d'extraits d'une vidéothèque (Masselin & al., 2023) associée à l'aire de baignade et permettent de questionner les enseignants sur des aspects de modélisation.

La consigne donnée dans l'atelier était double. Pour chaque extrait, il s'agissait :

de le situer dans le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007) (figure 1) ;

d'imaginer ce qu'il peut apporter à un collectif d'enseignants en Lesson Study.

Description du premier extrait intitulé « triple » :

L'élève a schématisé une zone de baignade par un rectangle. Il a introduit une lettre placée à la fois sur la largeur et la longueur du rectangle (figure 30). L'enseignante le questionne sur sa définition de x et cherche à lui faire prendre conscience de la covariation entre la largeur et la longueur (si x désigne la largeur, $25-2x$ désigne la longueur).

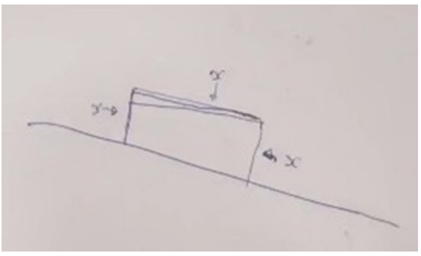


Figure 66 *: Capture d'écran de la vidéo « triple x »*

Cet extrait de vidéo vise, en LSa, la prise de conscience de la difficulté de définir des variables et d'établir du lien entre les deux dimensions. Pour les enseignants, il s'agit également de prendre conscience que le statut d'inconnue peut être prégnant par rapport au statut de variable (nécessaire pour optimiser).

Dans le cadre de l'atelier, les participants ont identifié que le travail se situait entre le modèle réel et le modèle mathématique (étape 3 du cycle de Blum & Leiss).

Description du second extrait intitulé « lac »

Une élève ne parvient pas à entrer dans l'activité car elle déclare à ses camarades qu'il existe plusieurs formes pour un lac et qu'il n'y a pas de « mesures » données. Elle dit être bloquée et sa feuille de brouillon reste blanche.

Dans l'atelier, nous avons discuté de la nature de la situation présentée dans l'énoncé, et avons partagé le fait que la situation donnée n'est pas réelle. Elle serait « On a une colonie de vacances qui souhaite se baigner dans un lac avec une ligne d'eau. » Choisir une ligne d'eau de 25 m, c'est déjà être dans une situation modèle. Nous avons alors évoqué la distinction entre les mathématisations horizontale et verticale.

Le collectif a situé cet extrait entre la situation modèle et le modèle réel, soit à l'étape 2 du cycle.

Description du troisième extrait intitulé « croquis-land »

Dans cet extrait un élève a réalisé plusieurs croquis de zones de baignade qu'il partage dans son groupe (zone rectangle, triangle rectangle, disque, dite en « zigzag », ou déclarée « patatoïde »). Il indique à une autre élève du groupe qu'on peut considérer que « la plage est rectiligne en imaginant que le lac est suffisamment grand » tout en repassant et en transformant avec son stylo une portion de ligne courbe en ligne droite (figure 31) à main levée.

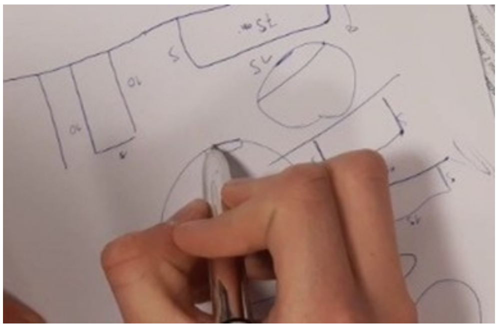


Figure 67 *: Capture d'écran de la vidéo « croquis-land ».*

À travers cet extrait, situé également à l'étape 2, les participants de l'atelier ont identifié des hypothèses de modélisation explicitées par un élève au sein de son groupe (lac suffisamment grand en superficie, plage rectiligne).

Il a été évoqué que la situation initiale, telle que vécue dans l'atelier, offrait une vraie occasion de travailler la modélisation avec les élèves, ce qui va dans le sens de la remarque de Fabien : *« Pourquoi ne pas expliciter aux élèves ce que c'est que modéliser ? Et pourquoi pas le faire à partir des étapes du cycle de modélisation ? »*

Place réelle des extraits de vidéos en LSa

Les facilitatrices ont évoqué d'où venaient les extraits de vidéos partagés, révélant alors l'existence d'une première boucle dans le dispositif LSa, vécue en amont de celle destinée aux enseignants.

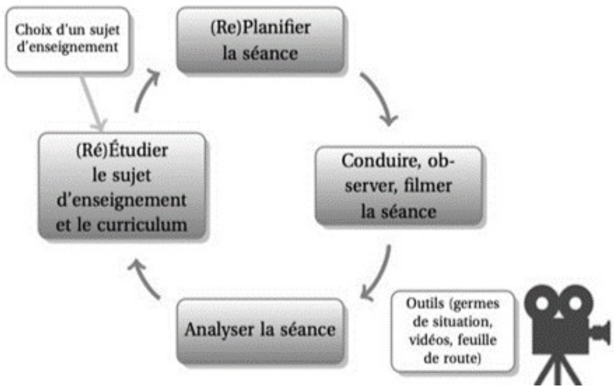


Figure 68 : La première boucle du dispositif LSa (Masselin & al., 2023).

La première boucle (figure 32), détaillée dans Masselin & Artigue (2023) dans le cas de notre situation, permet de stabiliser un germe de situation (autrement dit un problème ou une question) et de repérer en particulier des extraits de vidéos susceptibles d'accompagner des enseignants en LSa dans leur analyse *a priori* de la situation.

Suite à des difficultés évoquées pour repérer des nuances entre situation modèle et modèle mathématique, Masselin a également partagé un poster sur la disparition du thon rouge en Méditerranée, qu'elle avait coréalisé en Master Professionnel de formation de formateurs dans l'UE Modélisation à l'Université Paris Diderot. Ce poster (annexe 2) illustre les différentes étapes du cycle liées à cette problématique et lui semblait aidant dans la distinction de ces étapes.

Retour au réel

En fin d'atelier, le collectif est revenu sur le retour au réel de la situation proposée et la question de la modélisation. Un participant a émis l'idée d'annoncer clairement aux élèves qu'ils étaient dans un exercice de modélisation et d'en accepter les contraintes et pourquoi pas aller jusqu'à présenter aux élèves les différentes étapes d'un cycle de modélisation. Cette suggestion fait l'adhésion du groupe, jugeant que le fait de dire explicitement en quoi elle consiste peut permettre une entrée des élèves plus aisée dans la modélisation.

La situation de l'« aire de baignade » ne peut pas exister dans le monde réel exactement telle que présentée dans l'atelier (contraintes de la loi évoquée précédemment) mais elle permet de travailler la modélisation. En informer les élèves pourrait permettre une entrée dans ce que sous-tend la modélisation et ses différentes étapes (présentes dans le cycle de Blum & Leiss, figure 1) en étant plus efficace et en allant plus loin.

Résultats en lien avec notre cadre théorique

À propos des productions des enseignants sur l'aire de baignade (atelier 1) :

Les résolutions de la situation par les participants pour eux-mêmes (figures 5) témoignent d'une plus forte considération pour des aspects relevant de mathématisation verticale que de mathématisation horizontale. L'hypothèse de plage rectiligne reste souvent implicite (sauf pour la production de Rémi), ou encore le fait de considérer que tous les enfants se baignent simultanément. Les réalisations montrent des travaux partant de zones de baignade épousant des formes géométriques connues et régulières (sauf pour Renaud) sans considérer par exemple l'existence de vent qui pourrait faire évoluer la délimitation de la zone de baignade. Pierre évoque le lien entre la situation réelle et celle modèle du cycle de Blum & Leiss en questionnant le décret. Le lac est implicitement considéré comme plan d'eau non couvert dans les productions.

À propos de la feuille de route réalisée par le collectif (atelier 1) :

Dans le scénario prévu, le second objectif déclaré est en partie « le rapport à la réalité ». Il reste implicite : s'agit-il du rapport des solutions trouvées à la réalité, ou encore de la vraisemblance du modèle travaillé par rapport à la situation réelle ? Les phases du scénario ne consacrent pas de temps exclusivement dédié à débattre de choix de simplifications en lien avec la compréhension de la situation réelle, notamment pour laisser émerger des questions (voir 1.4), phénomène identifié par Derouet & Yvain-Prébiski (2023) sur la situation. L'élaboration du modèle mathématique est dévolue aux élèves dans le scénario prévu. Dans certaines LSa vécues sur cette même situation, certains scénarii consacrent un temps lors d'une phase pour fixer des éléments de simplification autour de la mathématisation horizontale.

Cependant, la grille d'interventions montre que le collectif anticipe certaines difficultés liées au passage du modèle de situation au modèle pseudo-concret. Trois interventions de l'enseignant témoignent d'une préoccupation du collectif sur certaines hypothèses simplificatrices : celle sur la ligne d'eau, celle sur la fréquentation maximale et celle sur l'apparition d'une zone de baignade fermée.

Le collectif, en proposant une ficelle pour débloquer, imagine qu'elle matérialisera une ligne d'eau pour les élèves, ce qui n'est pas automatique (Yvain-Prébiski & Masselin, 2023). Si l'usage de la ficelle est précisé dans l'intervention, rien ne précise comment l'utiliser : représentera-t-elle le bord du lac ou la ligne d'eau ? Quelle sera sa longueur : 25 *cm* ou autre ?

À propos des retours immédiats de mise en œuvre (session 2) :

La confrontation des résultats produits et exposés par chaque groupe à la situation réelle est considérée par le second enseignant expérimentateur comme manquante. Il semble y avoir, chez Rémi, une prise de conscience que l'orientation du scénario est moins portée sur l'élaboration d'un modèle réel puis mathématique (mathématisation horizontale) que sur l'analyse des traitements effectués dans des modèles algébriques ou fonctionnels qui relèvent de la mathématisation verticale. Son ressenti est conforme à la phase de bilan conduite où il a fait préciser les contenus des différents tableaux par un élève de chaque groupe. Lors de cette phase, une élève (présentatrice du travail du groupe 5) a indiqué que son groupe avait finalement renoncé à considérer une zone de baignade rectangulaire. Elle précise qu'ils avaient oublié de laisser un passage ouvert pour que les enfants entrent dans l'eau donc c'était impossible.

À propos de l'analyse a posteriori de la mise en œuvre (session 3) :

Le collectif trouve que le scénario mis en œuvre est conforme à celui préparé concernant la phase de recherche de la situation par les élèves (phases 1 et 2).

La phase de bilan est repensée en considérant les différentes formes géométriques de zones rencontrées (rectangulaires, semi-circulaires) : il s'agirait de les comparer au sein de la classe. L'accent est également mis sur le lien avec la situation réelle qui apparaît comme une nécessité. Le collectif de l'atelier prend conscience qu'un retour au réel est un appui pour statuer sur certains modèles choisis. Le groupe souligne l'importance de faire interagir les différents groupes dans cette phase, invoquant la nécessité de temps plus long que lors du colloque.

Contrairement à d'autres LSa menées sur cette situation, les participants de l'atelier n'ont pas intégré dans son scénario, ni *a priori* ni *a posteriori,* une phase spécifique en plénière qui serait dédiée à débattre d'hypothèses simplificatrices relevant de la mathématisation horizontale. Notre expérience de facilitatrices montre que certains extraits de vidéos usuellement partagés en LSa (non partagés dans l'atelier) facilitent l'émergence d'une telle phase dans le scénario. Un extrait de vidéo en particulier provoque l'anticipation d'un temps de débat avec la classe : il montre un élève de seconde qui semble bloqué (n'ayant rien écrit durant la phase de recherche individuelle) et qui déclare aux autres élèves de son groupe : « *On ne peut pas répondre, on n'a pas les dimensions du lac.* » Mais le contexte du colloque avec un temps consacré à la préparation de la leçon écourté (environ 1h contre le double d'ordinaire) est un paramètre à prendre en compte dans ces résultats.

À propos du partage des deux extraits de vidéos :

Une évolution des pratiques semble amorcée au sein du collectif de l'atelier s'agissant de l'enseignement de situations de modélisation avec l'apparition d'une attention exprimée sur les étapes de modélisation et en particulier les enjeux de la mathématisation horizontale. Les deux extraits de vidéos habituellement partagés en LSa ont favorisé une conscientisation nécessaire pour aboutir à un modèle de situation se rapprochant de celui décrit par Derouet & Yvain-Prébiski (2023, p. 609).

Conclusion et perspectives

La LSa vécue par le collectif d'enseignants a permis au fil des sessions de l'atelier de prendre connaissance et conscience de l'importance des différentes étapes de modélisation et d'identifier des éléments relevant de la mathématisation horizontale. Le dispositif LSa, par ses étapes décrites dans cet article et ses outils spécifiques (feuille de route, analyse *a posteriori*, analyse de pratique via des vidéos, apports didactiques) a fait évoluer le questionnement initial au sein du collectif. La LSa a enclenché l'envie de partager cette situation « aire de baignade » en classe, avec des alternatives favorisant l'identification des étapes de modélisation auprès des élèves.

Du côté de la modélisation

La mise en œuvre d'une LSa, contrainte à un format court par rapport à d'ordinaire, est sans doute une limite de notre atelier mais il a permis aux enseignants experts présents de soulever des enjeux cruciaux sur l'enseignement de la modélisation en classe. Le développement professionnel de facilitateurs et futurs facilitateurs[59], identifié et analysé autour du germe de situation « aire de baignade » (Masselin & Artigue, 2024), s'est initié au sein du collectif de l'atelier lors des échanges suscités par le vécu d'une LSa.

En complément sur l'« aire de baignade », Yvain-Prébiski & Masselin (2023) ont obtenu des résultats sur deux fragments de réalité « ligne d'eau » et « zone de baignade » en lien avec le matériel envisagé par les enseignants pour la classe. Si les collectifs d'enseignants imaginent un usage spécifique de matériel mis à disposition des élèves (comme de la laine en guise de ligne d'eau), les élèves, eux, y affectent un usage tout autre en matérialisant par exemple une partie du lac, ce qui peut engendrer des malentendus et difficultés en classe.

Nous renvoyons le lecteur à ces deux textes qui leur permettront d'approfondir la réflexion sur l'importance des fragments de réalité dans le contexte de résolution du problème de l'aire de baignade.

À propos des Lesson Studies

L'expérience de cet atelier a fait germer l'idée de poursuivre autour des Lesson Studies en prolongement au sein du collectif. Nous avons évoqué des premières pistes de partage de ressources dans le groupe Tribu conçu pour cet atelier. De plus, l'enseignant-chercheur Rémi, a émis l'idée de réaliser de telles LSa dans son académie avec des enseignants de lycée, tout en signalant le souci d'éclatement géographique (Grenoble, Chamonix, Albertville).

Les facilitatrices et auteures ont indiqué l'existence d'une formation de facilitateurs à distance réalisée par le groupe « Activités-LS » de l'IREM de Rouen et déjà déployée dans d'autres académies. Rémi a également précisé que cela nécessiterait sans doute du temps pour s'installer, ce que les auteures ont confirmé en référence aux caractéristiques du processus de dissémination des LSa dans l'académie de Normandie des LSa analysé par Artigue & Masselin (2024).

Nadia, avait déjà organisé une LSa dans son lycée sur le raisonnement par l'absurde. Cette LSa impliquant trois collègues s'est déroulée dans son laboratoire de mathématiques, lieu qui lui semble privilégié pour ce type d'action (moyens horaires dégagés). Le collectif de l'atelier a décidé de rester en contact *a minima* sur un groupe Tribu, et nous avons évoqué la possibilité d'une réunion à distance pour une prochaine LSa qui pourrait se concevoir et se déployer au niveau national.

[59] du groupe « Activités-LS » de l'IREM de Rouen

Références bibliographiques

Artigue, M. & Masselin, B. (2024). The dynamic of implementation of adapted Lesson Studies in France. In P. Drijvers, C. Csapodi, H.Palmér, K. Gosztonyi and E. Kónya (Eds). *Proceedings of CERME13*, 4260-4267.

Banakas, P., Kerboul, C., Mailloux, F. & Masselin, B. (2014*). Le thon rouge de méditerranée sauvé par les quotas* ? Mémoire de Master professionnel de didactique des sciences, Université Paris Diderot.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.- P. B.W. Haines & S. Khan (Eds.). *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral* (Thèse, Université Paris Diderot (Paris 7) Sorbonne Paris Cité).

Derouet & Yvain-Prébiski (2023). Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse, dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 603-614). IREM de Strasbourg.

Lewis, C., & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step. How teacher learning communities improve instruction.* Heinemann.

Masselin, B. (2020). *Ingénieries de formation en Mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies*. Rouen : Presses Universitaires de Rouen et du Havre. http://purh.univ-rouen.fr/node/1309

Masselin, B., & Artigue, M. (2024). How the situation seeds used in LSa support the collaborative work of facilitators and future facilitators. In In P. Drijvers, C. Csapodi, H.Palmér, K. Gosztonyi and E. Kónya (Eds.), *Proceedings of CERME13*, 4996-5003.

Masselin, B., & Derouet, C. (2019), Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième, In Abboud, M. (2019). *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines* – (pp. 198-207). Université de Cergy Pontoise, France, Octobre 2018.

Masselin, B. & Hartmann, F. (2020). Un dispositif de formation inspiré des Lesson Studies dans l'académie de Rouen. *Repères-IREM*, *120,* 43-55.

Masselin, B., Hartmann, F., & Artigue, M. (2023). Etude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de Lesson Study adapté [Study of the role of facilitators in an adapted Lesson Study framework]. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1,* 213–260. https://doi.org/10.4000/adsc.1816

Tan, S. (2021). Bansho as part of lesson and lesson study: from the origins to the present. International Journal for Lesson and Learning Studies, 10/4, 378-392. https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2021-0076.

Yvain-Prébiski, S. & Masselin, B. (2023). La modélisation à partir d'une situation extra mathématique : de la formation des enseignants à la mise en œuvre, dans le cadre du dispositif Lesson Study adapté au contexte français. *Repères-IREM, 131*, 51-73.

Annexe 1

Règlementation baignade

Figure 69 *: Source : Direction départementale de la Cohésion Sociale de la Manche.*

https://www.manche.gouv.fr/contenu/telechargement/41334/291496/file/DDCSaffiche+baignade-HD.pdf

Annexe 2

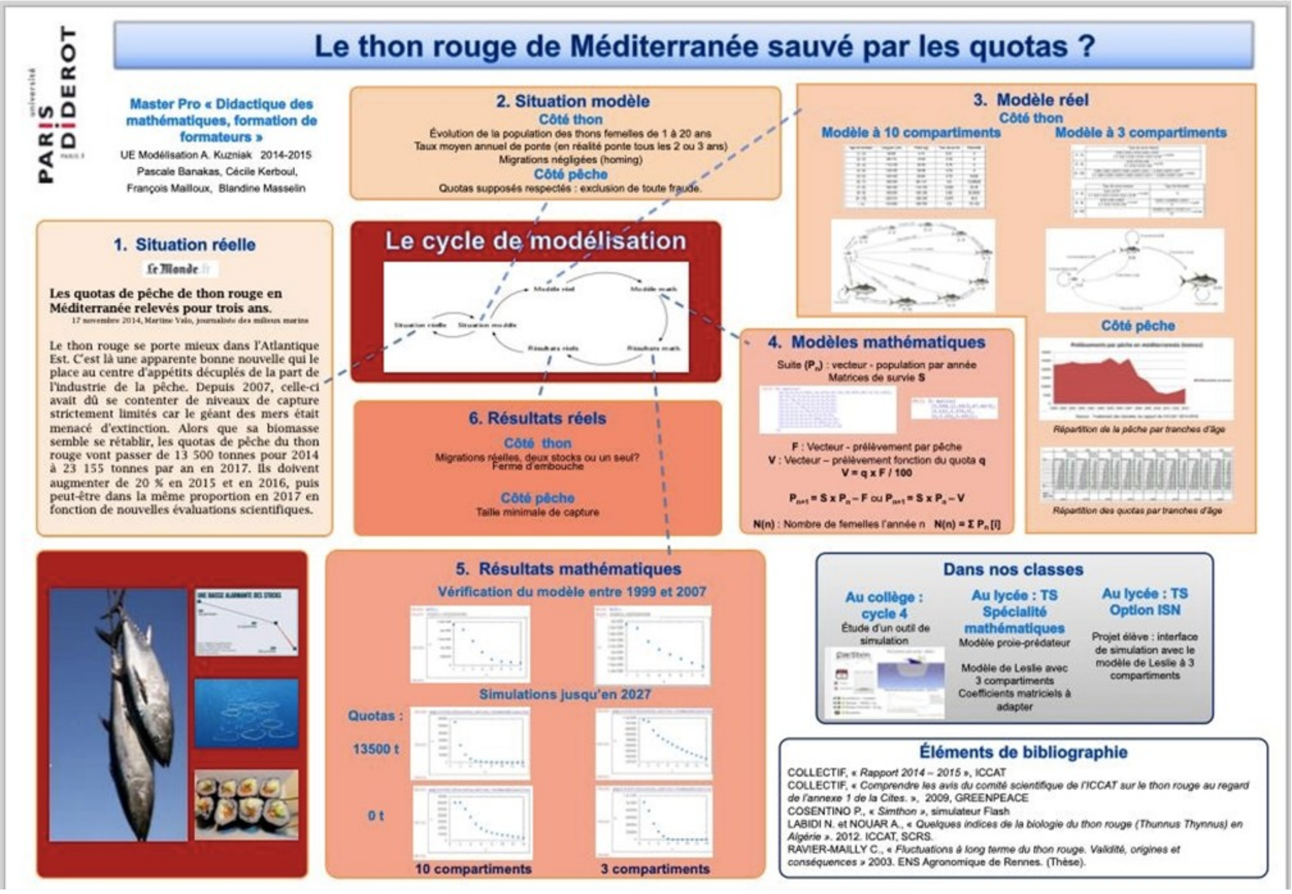


Figure 70 : Poster réalisé en Master 2 Professionnel de didactique des sciences, Université Paris Diderot par Banakas, Kerboul, Maillou & Masselin.

Une activité de formation pour assimiler le processus de modélisation

Charlotte BERTIN[60]
Université Claude Bernard Lyon 1 (France) et HEP Fribourg (Suisse)

Résumé. La modélisation mathématique est présente dans les programmes officiels français et suisses. Cependant, des études ont montré le besoin de formation sur ce sujet. Dans le cadre d'un doctorat, nous proposons d'étudier les apports d'une formation qui consiste à créer un Escape Game travaillant la modélisation mathématique. Au sein de cette formation, nous souhaitons trouver un moment pour appréhender et comprendre le processus de modélisation tout en entrant dans la dimension ludique, avant de débuter la conception d'un jeu à destination des élèves. Dans l'atelier, nous proposons de tester une telle activité qui consiste à concevoir une énigme en se référant à une partie du cycle de modélisation. Un scénario prenant appui sur les séries policières où il faut trouver le coupable, le mobile, l'arme et le lieu est mis en place pour guider les participants. Le texte reprend le contexte de l'atelier, son déroulement et un retour réflexif sur cette activité.

Mots-clés. Modélisation, Escape Game, formation, primaire.

Abstract. Mathematical modeling is included in official French and Swiss curricula. However, studies have shown the need for training in this area. As part of a PhD thesis, we propose to study the contribution of a training program that consists in creating an Escape Game working on mathematical modeling. In this training course, we'd like to find a moment to grasp and understand the modeling process, while entering into the playful dimension, before starting to design a game for students. In the workshop, we propose to test such an activity, which involves designing a puzzle with reference to part of the modeling cycle. A scenario based on detective series, in which participants have to find the culprit, the motive, the weapon and the location, is set up to guide them. The text describes the context of the workshop, how it unfolded and a reflective review of the activity.

Keywords. Modeling, Escape Game, training, primary school.

Resumen. La modelización matemática figura en los planes de estudios oficiales franceses y suizos. Sin embargo, algunos estudios han demostrado que existe una necesidad de formación en este campo. En el marco de un proyecto de doctorado, nos proponemos estudiar las ventajas de la formación en la creación de un Escape Game que utilice la modelización matemática. Como parte de este curso, queremos encontrar un momento para aprender y comprender el proceso de modelado, al tiempo que nos familiarizamos con la dimensión del juego, antes de empezar a diseñar un juego para los estudiantes. En el taller, proponemos ensayar dicha actividad, que consiste en diseñar un enigma haciendo referencia a parte del ciclo de modelización. Para guiar a los participantes se plantea un escenario basado en series policíacas en el que hay que encontrar al culpable, el móvil, el arma y el lugar. El texto describe el contexto del taller, cómo se desarrolló y una reflexión sobre la actividad.

Palabras clave. Modelización, Escape Game, formación, escuela

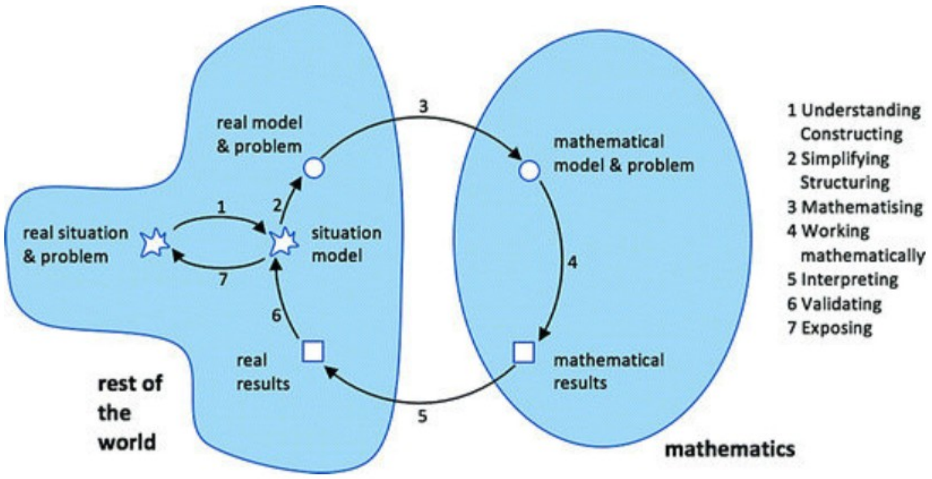
[60] Charlotte.bertin@edufr.ch

1. Contexte

La modélisation est une des six compétences mathématiques à développer à partir du cycle 2 selon les programmes français (MEN, 2019). Elle est identifiée à l'aide de plusieurs caractéristiques sous forme d'actions qui évoluent au fil des cycles (cf. annexe 1).

Nous pouvons constater que la modélisation prend son ancrage dans le concret (cycle 2) ou la vie quotidienne (cycle 3)[61]. Nous observons aussi une évolution des outils mathématiques à disposition. Au cycle 2, la compréhension des opérations en jeu (situation additive, multiplicative), la faculté à relever qu'une situation fait intervenir le partage ou le groupement, ainsi que la reconnaissance des formes géométriques sont mentionnées. Pour le cycle 3, s'ajoutent la reconnaissance des situations de proportionnalité et la possibilité de modéliser des situations réelles par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité et symétrie). Le mot « modéliser » semble être une action dans les caractéristiques de la modélisation que l'on appréhende comme un processus. Enfin, au cycle 4, l'utilisation de simulation numérique ou géométrique ainsi que la traduction en langage mathématique d'une situation réelle complètent les différentes caractéristiques avec la validation d'un modèle.

Cette compétence est encore étudiée notamment par le groupe international de modélisation mathématique et applications (ICTMA[62]). Les conférences associées à ce groupe permettent d'échanger et de publier sur les différents aspects de la modélisation notamment son apprentissage et son enseignement à tous les niveaux. Nous retiendrons notamment les quatre arguments en faveur de l'enseignement de la modélisation : pragmatique, formatif, culturel et psychologique (Blum, 1995). Ils mettent en avant l'importance de travailler la modélisation dans les écoles pour former les citoyens de demain. La thèse de Yvain-Prebiski (2018) reprend une partie de l'historique de ce groupe. Les différentes représentations et définitions de la modélisation ont aussi évolué au fil des années suivant les enjeux et objectifs de la modélisation (Maaβ, 2006). Dans notre recherche, nous proposons de nous appuyer sur la définition de Blum et Leiss (2007) qui considère la modélisation comme un processus partagé en plusieurs étapes (cf. Figure 1).



[61] En France, le cycle 2 correspond à des enfants de 6 à 9 ans et le cycle 3 à des enfants 9 à 12 ans.

[62] International Group for Mathematical Modelling and Applications

Figure 1 : Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007)

Nous remarquons ce passage entre deux « mondes » : celui de la vie courante (ou a minima d'un problème contextualisé) et le monde des mathématiques. Nous partons alors d'un problème issu d'une situation réelle et commençons par comprendre et construire une situation-modèle (étape 1). Par la suite, nous trions les différents paramètres afin de conserver les éléments qui seront utiles à la résolution de la situation initiale (étape 2). Les étapes suivantes consistent à mathématiser le problème (étape 3) et à utiliser les outils mathématiques adéquats pour le résoudre (étape 4). Les résultats mathématiques sont alors interprétés dans le contexte du monde réel (étape 5) puis validés (étape 6). Enfin, une dernière étape permet d'exposer les différents résultats obtenus pour revenir au point de départ (étape 7). Le cycle n'est pas nécessairement à suivre de manière linéaire et peut être répété si la solution apportée n'est pas satisfaisante.

Si le processus de modélisation est documenté dans différentes recherches et malgré sa présence dans les programmes, des études récentes, comme celle de Roussel (2022), montrent le besoin de formation sur ce sujet.

Dans un même temps, les Escape Games s'introduisent peu à peu dans le milieu éducatif depuis une dizaine d'années (Nicholson, 2015). Ces jeux consistent à résoudre des énigmes en un laps de temps limité pour réussir une mission (le plus souvent, s'échapper d'une salle). Des ressources apparaissent afin de guider les enseignants dans la mise en place de ces nouveaux dispositifs ludiques (Fenaert et al., 2019). Nous supposons alors qu'il est possible de travailler la modélisation en proposant une situation du jeu à la place d'une situation réelle. Les étapes proposées par Blum et Leiss (2007) sont alors inchangés, dans un premier temps, afin de pouvoir confronter cette représentation du monde réel avec celui du jeu.

Dans notre recherche, nous établissons une formation où les enseignants sont amenés à concevoir un Escape Game dont l'objectif est de travailler le processus de modélisation (en entier ou en partie) et étudions les apports éventuels d'un tel dispositif. En particulier, le travail de la modélisation dans un contexte de jeu est en cours d'analyse pour identifier les éventuels changements à opérer pour conserver l'essence de la modélisation. Une première formation avec ce format a été proposée à des enseignantes de fin de primaire en Suisse. Lors de la première rencontre, les enseignantes vivent un Escape Game contenant de la modélisation mathématique et reçoivent des éléments théoriques, dont le schéma de Blum et Leiss (Figure 1). Les représentations issues de PISA (2013) et Coulange (1997) sont aussi présentées afin d'identifier le processus sur plusieurs angles. Des problèmes, comme celui de la botte du géant (Wozniak, 2012) permettent d'illustrer le cycle. Néanmoins, ces éléments fournis au commencement de la formation ne sont pas particulièrement rediscutés par la suite. A la fin, un jeu a été créé et mis en place dans les classes de 7H et 8H[63]. Après analyse, le jeu ne permettait pas toujours de mettre en avant le processus de modélisation, ce qui était souhaité initialement. La nature des énigmes ne proposant que des solutions uniques a aussi été questionnée dans un second temps. Des caractéristiques des problèmes de modélisation comme l'ouverture ou encore l'authenticité ayant été cataloguées notamment par Wess et al. (2021). Nous supposons

[63]Les élèves de 7H et 8H en Suisse correspondent à des élèves de CM2 et 6e en France (donc 10 à 12 ans).

alors qu'il serait intéressant d'avoir un temps pour s'imprégner des différentes étapes lors de la formation pour obtenir un Escape Game travaillant la modélisation mathématique.

L'atelier permet de tester une activité de formation ayant pour objectif de s'approprier les étapes du processus de modélisation tout en créant des énigmes susceptibles d'être incluses dans un jeu. Elle n'a pas encore été proposée à des enseignants. La description du déroulement de l'atelier dans son ensemble est développée dans la deuxième partie.

2. *Description de l'atelier*

Nous avons commencé par une courte introduction reprenant le contexte de la recherche dans laquelle s'inscrit l'atelier. Afin de mieux s'emparer des différentes étapes du cycle de modélisation, nous proposons de créer un mini Escape Game où chaque énigme doit mettre en avant plus particulièrement une partie du cycle de modélisation. La mission principale est de découvrir le meurtrier (ou la meurtrière) de madame Aliénor, le mobile, le lieu et l'arme du crime. Les participants sont partagés en petits groupes et doivent créer une énigme permettant de découvrir un des quatre éléments cités ci-dessus. D'autre part, les concepteurs reçoivent également une partie du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007) afin de créer une énigme qui mette en valeur les étapes concernés. Cependant, nous n'empêchons pas que d'autres étapes du cycle puissent intervenir (ce qui semble inévitable) mais seulement qu'il y ait un accent plus fort sur certaines. Les énigmes sont alors indépendantes les unes des autres et sont portées par un scénario commun. Les participants tirent au sort un élément à faire découvrir. Par ailleurs, une partie du cycle (de modélisation) leur est donnée selon la répartition spécifique décrite dans le tableau suivant (Cf. Figure 2).

Elément à découvrir	Partie du cycle
Mobile	1. Comprendre la tâche 2. Simplifier / Structurer (trier des données)
Coupable	3. Mathématiser 4. Travailler mathématiquement
Lieu	5. Interpréter 6. Valider 7. Présenter
Arme	Adapter le modèle, initier l'idée d'un cycle qui se répète

Figure 2 : Tableau de répartition des éléments à découvrir et la partie du cycle

Pour inspirer les participants dans la création d'énigmes, nous avons proposé un scénario à l'aide des cartes du jeu Mysterium[64], des jeux Unlock[65] et du matériel Breakout EDU[66] autour d'une thématique reprenant les codes des séries policières (cf. Figure 3).

Figure 3 : Matériel à disposition pour concevoir les énigmes

Les participants peuvent s'aider ou non du matériel à disposition. La résolution des énigmes ne doit pas prendre plus de cinq minutes et il est possible de laisser des indices ou des aides à disposition. Nous prenons alors appui sur la théorie des situations de Brousseau (1998) où les énigmes peuvent être assimilées à des situations a-didactiques comportant un milieu antagoniste. L'objectif d'apprentissage étant l'assimilation d'une ou plusieurs étapes du cycle. Cela a conduit à quatre énigmes décrites ci-dessous, que chaque groupe a pu faire tester aux autres participants. Le niveau concerné n'a pas été défini au préalable, l'idée de cette activité étant avant tout de questionner son potentiel pour des formations et non pas nécessairement de proposer des énigmes adaptées aux élèves. Nous supposons que ce travail de création, obligera les participants à s'interroger sur les différentes étapes du cycle et à examiner les spécificités de chacune d'entre elles. Ainsi, au lieu de présenter un schéma de manière transmissive, nous essayons de mettre en pratique certaines étapes tout en découvrant l'univers du jeu.

---

[64] https://www.libellud.com/nos-jeux/mysterium/. L'objectif est de trouver le coupable, le mobile, le lieu et l'arme du crime.

[65] https://www.spacecowboys.fr/unlock. Ce jeu offre la possibilité de réaliser un Escape Game seulement à l'aide de cartes.

[66] https://www.breakoutedu.com/. L'entreprise propose une panoplie de cadenas, boites et autres matériels pour les concepteurs d'Escape Game notamment dans le cadre scolaire.

Le mobile

Le groupe travaillant sur le mobile a presque immédiatement pensé à l'argent. Les conceptrices sont parties sur l'idée de dissimuler le mot argent en utilisant une symétrie mais elles n'arrivaient pas à justifier le fait qu'on travaille la compréhension ou la structure avec le tri de données. Elles ont donc ajouté un temps supplémentaire afin de faire deviner le mot miroir. Elles proposent un milieu comportant un matériel plus conséquent au départ (une pile de cartes notamment). Ainsi, il est essentiel de pouvoir trouver ce qui est nécessaire à la résolution en faisant des liens avec les différents éléments. Pour débuter, une enveloppe indique le nombre 25, il faut alors prendre la carte avec le numéro correspondant. Dans cette même enveloppe, se trouvent des bouts de papier où sont inscrits les éléments présents sur la vingt-cinquième carte et un point d'interrogation. Il faut alors trouver l'objet présent sur cette carte qui n'est pas déjà mentionné sur les autres papiers : le miroir. A l'aide de cet indice, les joueurs peuvent alors résoudre l'énigme qui permet de découvrir le mot argent. Nous remarquons sur la photo (Figure 4), une petite erreur avec le « E » d'argent, une barre est reportée au même endroit.

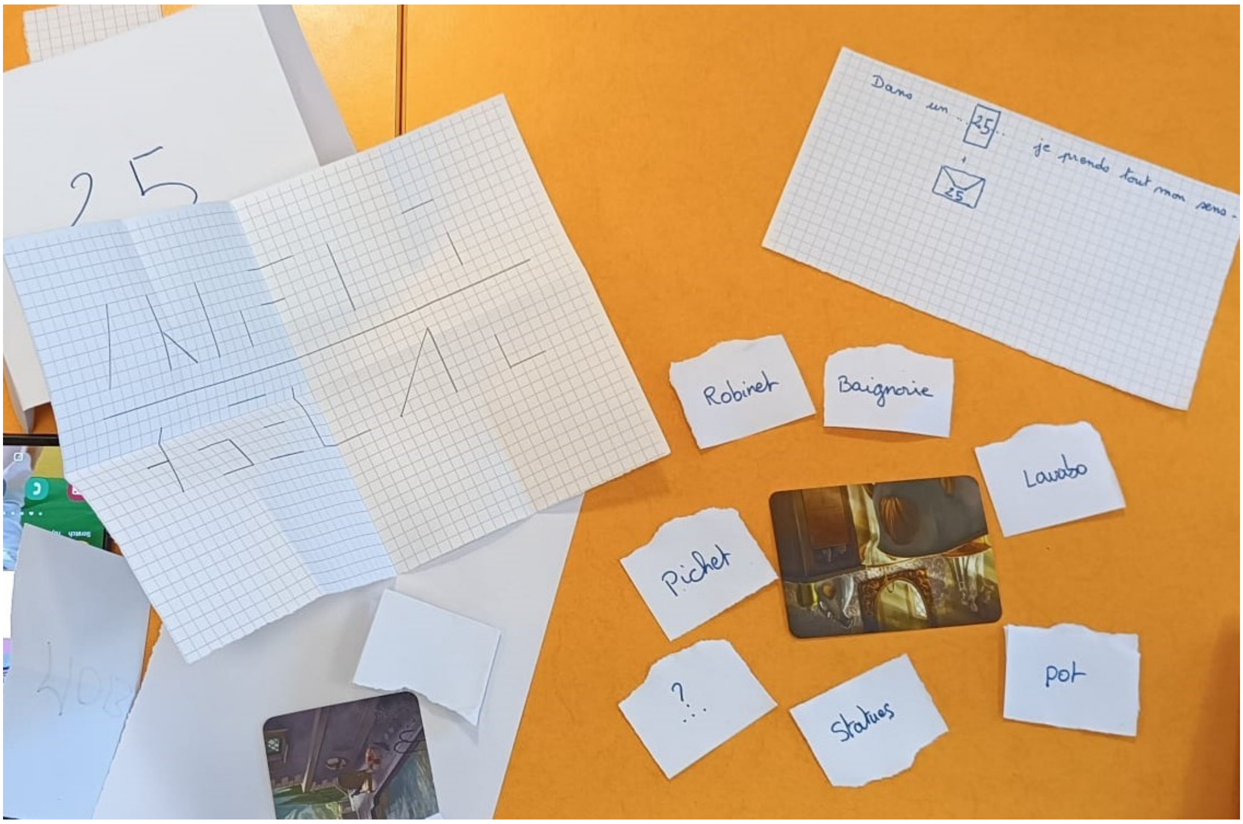


Figure 4 : Énigme du mobile

Le ou la coupable

Le groupe a rapidement pensé à choisir le coupable parmi les participants. Au départ, ils souhaitaient se servir des cartes à disposition (qui sont numérotées), faire des groupes de deux cartes et donner l'idée de multiplier les nombres pour avoir l'âge du coupable. Certaines cartes ne permettant pas d'obtenir la réponse. Par exemple, les cartes 2 et 5 amènent à trouver une personne de 10 ans, ce qui n'est pas possible dans le groupe de personnes concernées, il faut donc poursuivre le cheminement. Ils ont finalement opté pour une autre démarche en utilisant une indication pour désigner une personne (« il va fêter son prochain anniversaire dans un petit peu plus de 8 mois »). Ils ont demandé le nom, le jour et le mois de naissance de chaque participant. Le document a été déposé dans un coffre avec l'indice pour trouver la personne. La combinaison du cadenas étant la date du jour (26 mai). Le mot « il » dans l'indication a suscité un questionnement pour savoir si c'était un indice ou un pronom neutre, le coupable étant, dans notre cas, une femme.

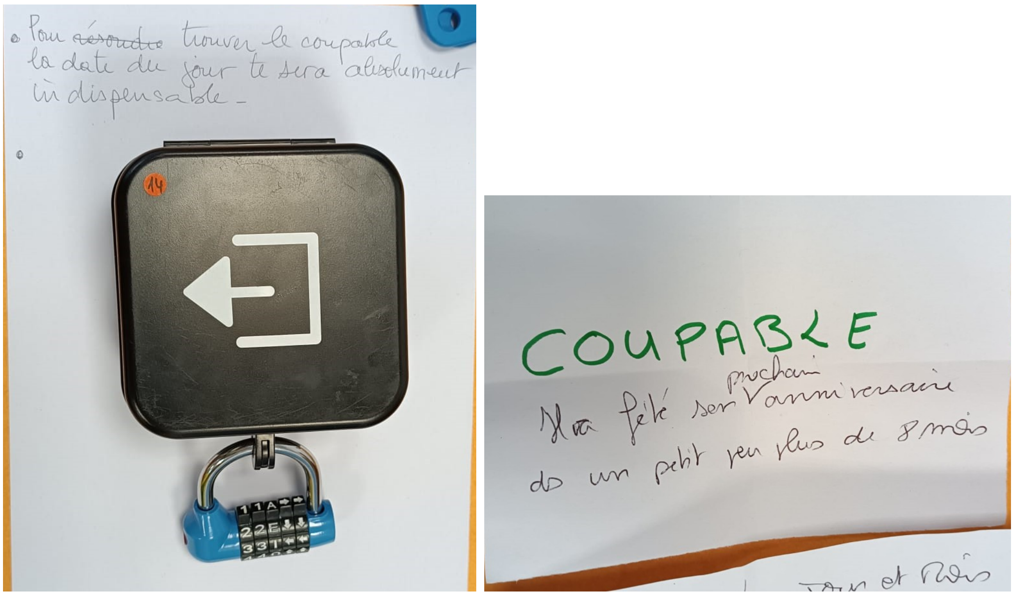


Figure 5 : Énigme du coupable

Le lieu

Le groupe a rencontré quelques difficultés à démarrer et nous avons proposé de réfléchir au fait que le modèle mathématique peut déjà être posé et qu'il faut trouver le moyen de valider la réponse dans le monde du jeu. Ils sont alors partis sur la géométrie et grandeurs et mesures, en proposant des indications pour trouver la pièce où s'est déroulé le crime (cf. Figure 5). La précision étant de rigueur pour trouver la solution.

Les indications étaient les suivantes :

Le chat, au centre de la cuisine, a pu voir le meurtre,
La poupée adossée à la fenêtre de la chambre également,
Le meurtre a eu lieu plus près du centre de la baignoire que du centre du salon.

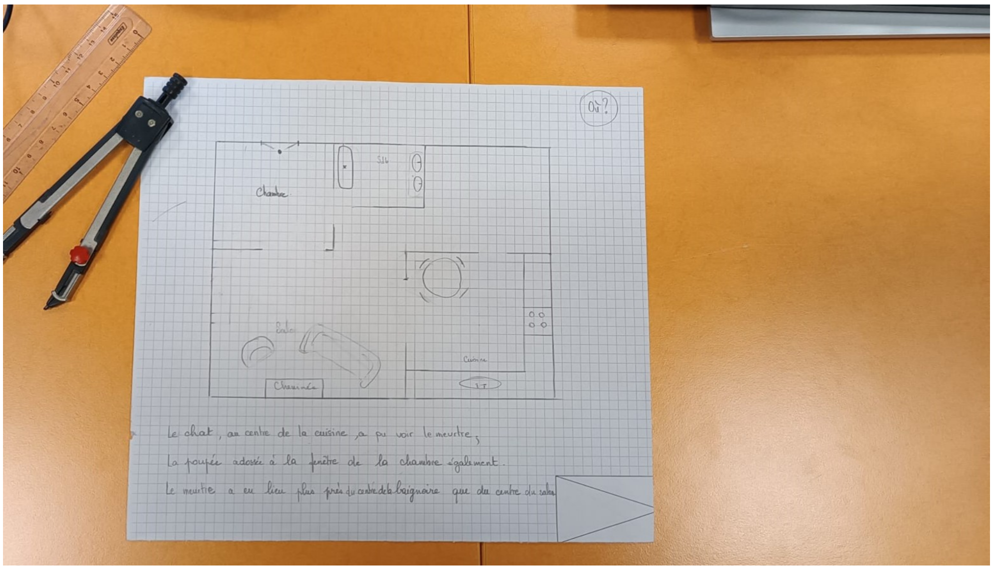


Figure 6 : Énigme du lieu

L’arme

Le groupe a proposé un ensemble de témoignages qui comportent plus ou moins de précisions, qui peuvent indiquer plusieurs possibilités voire induire en erreur. En reliant tous les indices, l’arme du crime peut être dévoilée. Une discussion a été menée autour du domaine mathématique touché ainsi que de la mise en valeur de l’adaptation du modèle. Les participants ont alors justifié le fait que la logique mathématique permettait d’affiner le modèle à l’aide des différents récits des protagonistes fictifs. Quelques exemples de témoignages : « je n’ai rien entendu car je dormais ! » ; « il y avait tellement de bruit que cela m’a réveillé » (cf. Figure 6).

Figure 7 : Énigme de l’arme

3. Retours et conclusion

A la suite de l’annonce de la consigne, plusieurs participants ont été déstabilisés. En effet, la plupart des personnes présentes n’ont jamais eu l’occasion de créer des énigmes et la contrainte des étapes du cycle de modélisation a complexifié l’exercice. De plus, ils ne sont pas nécessairement familiers de la pratique des Escape Games. Nous avons donc apporté des précisions notamment sur l’autonomie des joueurs et les rétroactions apportées par le milieu. Les concepteurs n’étant pas présents pendant la résolution, il fallait également penser à mettre une aide en cas de besoin.

Cet aspect déstabilisant a plutôt été perçu de manière positive et l’activité a donné confiance pour se lancer dans la conception de nouvelles énigmes dans le futur. Le lien avec le processus de modélisation n'étant pas facile pour les participants, cela a nécessité un temps d'échange qui a permis d'éclaircir la signification de certaines parties du cycle de modélisation. Les interrogations portant sur la signification des différentes étapes et leur opérationnalisation. Les discussions ont amené à préciser les différents termes mais aussi à identifier les possibles éléments du milieu. Par exemple, les premières étapes du cycle impliquent un milieu riche ou plutôt bien fourni afin d’avoir la possibilité d’identifier les éléments importants pour la résolution. A l’inverse, les dernières étapes n’ont pas besoin d’inclure la mise en place d’un modèle mathématique.

Nous souhaitions que l’activité permette d’assimiler le processus de modélisation tout en commençant à concevoir des énigmes au sein d’un jeu. Les retours des participants ont confirmé que cette mise en pratique permet de se pencher sur ce schéma et sur les différentes étapes. Cependant, ils ont également indiqué qu'une telle activité ne semble pas convenir pour un début de formation. Un apport théorique et une réflexion préalable semblent nécessaires. Par ailleurs, nous n'avons pas eu le temps de débriefer pendant l'atelier. Pourtant, c'est une phase qui apparaît comme essentielle pour mettre en lumière ce qui a été travaillé pendant le jeu. Cette activité peut donc amener une réflexion sur la manière de mettre en valeur des parties du cycle de modélisation et donner confiance dans la création d’énigmes. Néanmoins, elle ne permet *a priori* pas, de concevoir un problème comportant l’ensemble des étapes. De plus, la modélisation ainsi définie par Blum et Leiss (2007), débute par une situation réelle ou prenant appui sur des références factuelles non mathématiques (Wess et al., 2021). Or dans notre situation, c’est le monde du jeu qui est au commencement. L’ouverture d’un cadenas permet de résoudre un problème du jeu mais il ne peut pas nécessairement être similaire à une situation réelle. Cette différence peut être source de changements dans la définition de la modélisation mathématique au sein du jeu. D’autres critères ou étapes peuvent éventuellement être nécessaires pour conserver les particularités du processus comme la mise en place d’un modèle mathématique.

Dans la suite du projet de recherche, une deuxième formation est prévue à l’automne 2023 où cette activité sera peut-être donnée aux participants de manière adaptée. La réflexion autour de la différence entre le monde réel et le monde du jeu est en cours pour préciser le processus de modélisation dans ce cas particulier.

Références bibliographiques

Blum, W. (1995). Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education: some important aspects of practice and of research. *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications*, p.1-20.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). *How do Students and Teachers Deal with Mathematical Modelling Problems? The Example "Sugarloaf"*. ICTMA 12, Chichester.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage Grenoble.

Coulange, L. (1997). Les problèmes « concrets » à « mettre en équation » dans l'enseignement. *Petit x*, *47*, 33-58.

Fenaert, M., Nadam, P., & Petit, A. (2019). *S'capade pédagogique avec les jeux d'évasion — Apprendre grâce aux escape games* (Ellipses).

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), p.113-142

Nicholson, S. (2015). *Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities*. http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Roussel, V. (2022). *La modélisation en mathématiques. Historicité, épistémologie et perspectives institutionnelles internationales : Quels besoins pour les enseignants de mathématiques ?* [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1].

Wess, R., Klock, H., Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2021). *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Modelling : A Test Instrument*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5

Wozniak, F. (2012). Modélisation et démarche d'investigation. *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012*, GT10, pp 1464-1475. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves.* [Thèse de doctorat, Université Montpellier].

MEN. (2019). Programme de français, de mathématiques et d'enseignement moral et civique du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo22/MENE1913283N.htm

MEN. (2020a). Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). Annexe 1. BO n°31 du 30-07-2020. https://eduscol.education.fr/84/j-enseigne-au-cycle-2

MEN. (2020b). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). Annexe 2. BO n°31 du 30-07-2020. https://eduscol.education.fr/document/50990/download

MEN. (2020c). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 4). Annexe 3. BO n°31 du 30-07-2020. https://eduscol.education.fr/document/621/download

Annexe 1

Caractéristiques de la modélisation – programme français

Le tableau prend appui sur les programmes des cycles 2, 3 et 4 (MEN, 2020a, 2020b, 2020c).

Cycle	Cycle 2 (CP-CE1-CE2)	Cycle 3 (CM1-CM2-6^e)	Cycle 4 (5^e – 4^e – 3^e)
Caractéristiques de la modélisation	- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures. - Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements. - Reconnaitre des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.	- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. - Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité. - Reconnaitre des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie). - Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaitre des objets.	- Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants. - Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques). - Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique. - Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).

Les auteurs des actes du colloque sur la modélisation à Poitiers 2023

NOM	**Prénom**	**Établissement**
AUROY	Didier	IRES d'Aix-Marseille
BARQUERO	Berta	Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
BERTIN	Charlotte	Université Claude Bernard Lyon 1 (France) HEP Fribourg (Suisse)
BEZARD-FALGAS	Cécile	IREM de Caen
BOSCH	Marianna	Facultat d'Educació, Universitat de Barcelona
CHAMBRIS	Christine	IREM de Paris, INSPé de l'académie de Versailles (site Evry), LDAR, CY Cergy Paris Université,
COILLOT	Jérôme	IREMS de Poitiers
COUDERETTE	Michèle	LDAR, Univ Paris Est Créteil IRL CRM-CNRS, Université de Montréal, Canada
COULOMBEL	Loïc	IREM de Caen
DESNAVRE	Catherine	IREM d'Aquitaine
DHERISSARD	Sébastien	IREMS de Poitiers Reponsable de la Cii didactique
GERVAIS	Marie	IREM d'Aquitaine
GUERIN	Laure	IREM de Clermont-Ferrand
GUERIN	Marion	IREM de Rouen
JOB	Pierre	ICHEC Brussels Management School
KUZNIAK	Alain	Université Paris Cité
LAVAL	Dominique	CY Cergy Paris Université, INSPE Saint-Germain-en-Laye
MASSELIN	Blandine	LDAR, IREM de Rouen
MATHERON	Yves	IRES d'Aix-Marseille
NOIRFALISE	Robert	IREM de Clermont-Ferrand
PERRIN-GLORIAN	Marie-Jeanne	IREM de Paris
SCHNEIDER	Maggy	Université de Liège

La modélisation est présente dans les programmes de mathématiques de l'école primaire à l'université. L'une des six compétences à développer chez les élèves y est même consacrée : modéliser. Mais comment enseigner la modélisation ou enseigner à modéliser ?

Les rencontres organisées en mai 2023 par la commission inter-IREM Didactique, qui sert de pont entre la recherche fondamentale et l'enseignement pratique des mathématiques, a été l'occasion de prendre le recul nécessaire et de croiser les regards des différents acteurs allant de l'élève en classe au chercheur en didactique en passant par les enseignants, formateurs et inspecteurs.

Ce livre est une invitation à réfléchir sur la nature des savoirs mathématiques et leur rôle dans la modélisation au sein des mathématiques et aussi du monde qui nous entoure. Il est destiné aux enseignants, chercheurs et étudiants qui souhaitent approfondir leur compréhension de la didactique des mathématiques et de son application dans la salle de classe autour d'une problématique commune qui est d'enseigner la modélisation.

Les chapitres de cet ouvrage nous entraînent dans un Voyage au Cœur de la Modélisation dans l'enseignement des Mathématiques, dans trois pays, avec des étapes à l'école primaire, au collège, au lycée et à l'université.

ISBN : 978-2-85954-111-8

EAN : 9782859541118