

# Enseigner la modélisation mathématique pour enseigner les mathématiques : une dynamique problématique

Alain Kuzniak

Laboratoire de Didactique André Revuz  
Université de Paris Cité

Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en  
mathématiques, 25 mai 2023, Poitiers

- 1 Diversité des termes, diversité des approches
- 2 Aux origines de l'intérêt pour la modélisation dans l'éducation
- 3 L'approche standard et dominante
- 4 Deux approches alternatives
  - L'approche constructiviste de la Realistic Mathematics Education (RME)
  - La perspective de la théorie des ETM

# Diversité des termes, diversité des approches

## Modélisation, Mathématisation et Modèles

Une grande diversité de définitions et d'interprétations

### Mathématisation du réel (Israel, 1996)

- 1 L'invasion des mathématiques dans les processus de description et d'analyse du monde comme dans les techniques d'intervention active sur lui, est ce que nous appelons "**la mathématisation**" du réel. (Israel, p.9)
- 2 La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature (Wigner, 1960) (The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences)
- 3 En liaison avec l'idée de "modèle mathématique" et de "modélisation mathématique"



## Modèle

- 1 Pas de définitions universelles mais plutôt des essais de caractérisation ou des études d'exemples (cas particulier de la logique).
- 2 Les modèles mathématiques ne sont pas tous les modèles ("économique", "biologique", etc.)
- 3 Pendant longtemps le modèle mécanique a servi d'exemple paradigmatique en liaison avec la physique et aussi l'ingénierie et l'industrie.
- 4 Les modèles mathématiques sont des mathématiques appliquées à des fragments de réalité (Israel)

## Modèle

- 1 Le cas particulier de la logique avec la théorie des modèles et une définition des modèles basée sur les langages formels.  
*Etant donné une formule  $F$  écrite dans un langage (formel)  $L$ , on dira que certaines interprétations du langage  $L$  sont des modèles de la formule  $F$  (Wagner , p. 8).*
- 2 Un peu plus loin, il insiste sur la caractéristique sémantique des modèles par rapport aux formules :  
*Les modèles d'une formule sont les interprétations qui la rendent vraie.*
- 3 Interprétation mathématique donne les modèles mathématiques

## Modélisation mathématique

- Une approche trop simple ? Ce que font les mathématiciens quand ils se préoccupent des modèles.
- Garder l'idée que le travail sur les modèles est une composante du travail mathématique.

## Un chemin possible

Problèmes venus du monde réel  $\leftrightarrow$

Travail sur les modèles  $\leftrightarrow$  Un traitement mathématique

$\leftrightarrow$  Application des résultats

## D'où quelques questions

- La modélisation est-elle tout ce chemin ou une partie du chemin
- Où est la mathématisation ?
- Le travail mathématique ? Les mathématiques ?
- Quelle place est donnée aux modèles dans les différentes approches

# Aux origines de l'intérêt pour la modélisation dans l'éducation

- Une interrogation aux débuts des années soixante sur l'inadaptation de l'enseignement des mathématiques (université) aux attentes de l'industrie.
- (American) Society for Industrial and Applied Mathematics organise en 1961 un séminaire sur cette question “Applied Mathematics : What is needed in research and education ?” (Clements, 1989)



# Le travail du mathématicien en mathématiques appliquées comme *exemplar*

- Le problème fondamental est que les mathématiques appliquées sont un art dont les mathématiques ne sont qu'une partie.
  - Nous avons une situation dans le monde réel à partir de laquelle il faut créer un modèle mathématique par idéalisation et simplification.
  - Nous étudions ensuite le modèle mathématique en utilisant toute la puissance et les techniques des mathématiques.
  - Ensuite, le test de notre modèle est de savoir si, lorsque nous l'interprétons dans la réalité, il fonctionne.
  - Et la partie intermédiaire, l'étude de ce modèle mathématique, qui est le jeu du mathématicien, n'est qu'une partie de l'ensemble du processus des mathématiques appliquées. (Rosenbloom, cité par Clements p.7)
- Un mouvement qui émerge pour un enseignement de la modélisation est tourné vers l'enseignement supérieur et la formation des ingénieurs. Il prend ses exemples dans le monde de l'industrie.

# Methodology of modelling : ancêtre du cycle de modélisation

Klamkin propose un modèle (1970), en cinq étapes, inspiré de Pollack.

- 1 Recognition
- 2 Formulation
- 3 Solution
- 4 Computation
- 5 Explanation

Diverses critiques : Modélisation mathématique.. Modèle linéaire..  
Certains chercheurs soulignent qu'il faut confronter des modèles concurrents qui chacun rendent compte à leur manière de la question.  
(Lagrange, Bouleau)

Dès la fin des années 60, un consensus semble s'établir sur trois phases bien distinctes qui rendent compte de l'application des mathématiques aux phénomènes naturels :

- 1 Description et formulation d'un modèle idéalisé en langage mathématique
- 2 Solution du problème mathématique et déduction de résultats susceptible de vérification expérimentale
- 3 Comparaison des observations et de la théorie pour arriver à une évaluation de la validité du modèle.

# Penrose's modeling methodology

## Une description en sept phases devenue standard

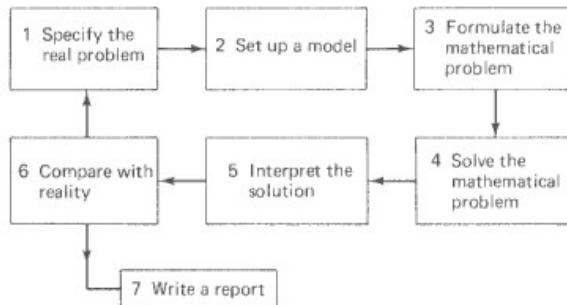
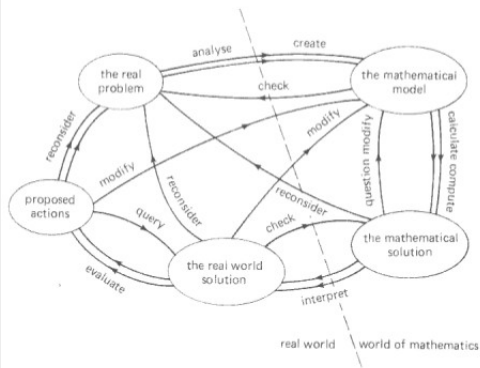


Fig. 2.2. The modelling methodology of Penrose (1978).

# Des approches complexe basées sur la théorie des systèmes

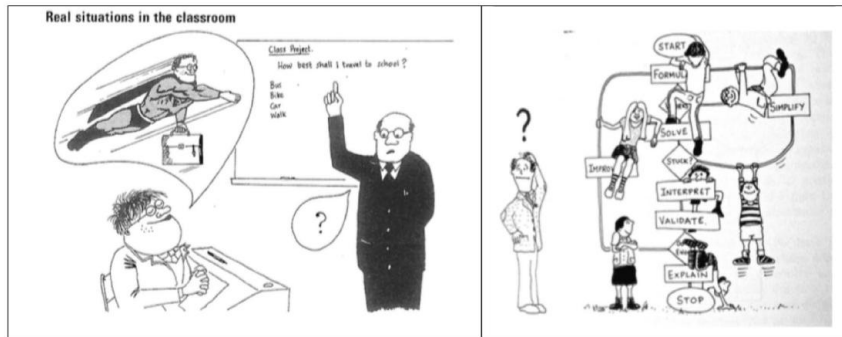
## Un usage en formation des ingénieurs : Clements à partir du modèle de Checkland (Soft System Methodology)

Fig. 2.3. A richly linked model of mathematical modelling.



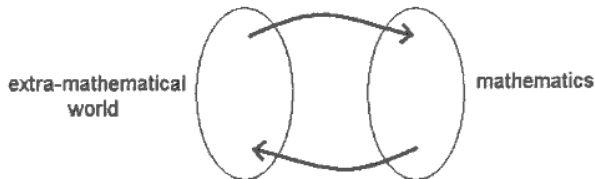
# Enseigner la modélisation dans l'enseignement secondaire

## Le monde réel et les mathématiques, Burckhardt, 1981



## Une approche pédagogique et empirique

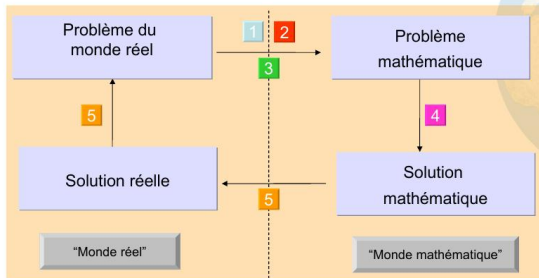
- 1 Organisée autour d'une opposition entre Mathématiques et le reste du monde. ICMI Study 14



*Figure 1-1. Mathematics and the rest of the world*

# Différent cycles de modélisation

## Le cycle simplifié de PISA





# Différent cycles de modélisation

## Le cycle de modélisation de Blum et Leiß (2007) axé sur les compétences

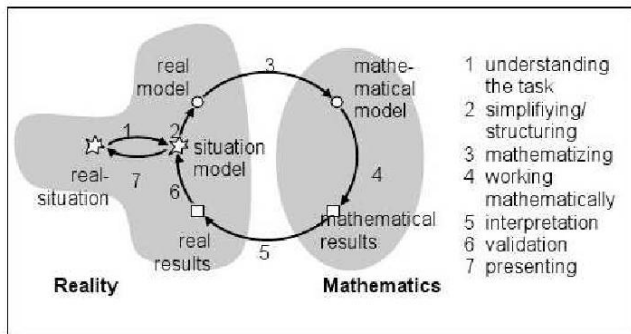


Figure 2 Le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005)

# Différent cycles de modélisation

## Le cycle de modélisation de Blum et Leiß (Reprise de 2018) axé sur les compétences

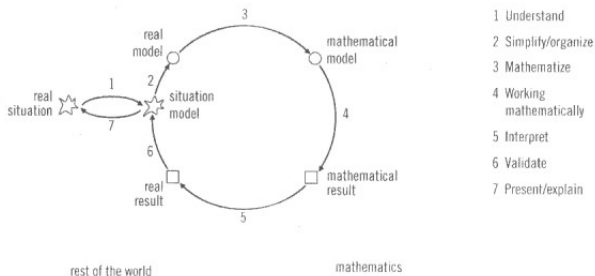


Fig. 1 The modelling cycle after Blum and Leiss (2007)

## Sept processus orientés vers le cognitif

- 1 Comprendre la tâche et construire la situation modèle.
- 2 Simplifier et structurer la situation modèle et construire le modèle réel.
- 3 **Translating** le modèle réel en un modèle mathématique [mathematize]
- 4 Appliquer les techniques mathématiques pour produire des résultats mathématiques (**Working mathematically**).
- 5 Interpréter les résultats mathématiques
- 6 Valider ces résultats en relation avec la situation réelle.
- 7 Présenter et expliquer le processus de solution ainsi que les résultats

## Une approche pédagogique et empirique

- 1 Un approche tournée vers l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation qui réfère à l'ensemble du processus.
- 2 Très fort impact sur les curricula à travers l'idée de compétences.
- 3 Importance du "cycle de modélisation"

## Situations issues du projet LEMA

- 1 L'authenticité
- 2 La faisabilité à un niveau donné
- 3 La validation des résultats des élèves,
- 4 Les compétences sollicitées et leur évaluation,
- 5 La nécessité pour les élèves d'élaborer un modèle mathématique ou de saisir un modèle disponible,
- 6 Mettre en place les principes d'un enseignement de la modélisation.

# Un exemple de tâches de modélisation : le projet Lema

## Le Géant

<http://www.problempictures.co.uk>



## Une approche pédagogique et *idéologique*

- 1 Beaucoup de travaux empiriques autour de l'élaboration de tâches dites de modélisation
- 2 Pas ou peu d'évaluation de l'impact réel sur les mathématiques (Pollack, 2004) et même sur la maîtrise de la compétence de modélisation.
- 3 Un bilan mitigé au niveau des recherches (Kaiser et al. 2018).
- 4 Une approche phénoménologique ? Risque d'éclatement en de nombreuses compétences et sous-compétences

# La question de la formation des enseignants sur et autour de la modélisation

## Un enseignement donné dans le cadre du master “pro”

- Penser la modélisation comme une compétence spécifique à travers un cycle évolutif où notamment les décalages entre les résultats donnés dans le travail sur modèle et la réalité conduisent plus généralement à raffiner les modèles qu'à les rejeter.
- Envisager les transpositions didactiques compatibles avec les moyens mathématiques des élèves et avec les contraintes institutionnelles (gestion du temps, dispositifs d'enseignement ?),
- Découvrir et analyser différentes recherches ayant pour thème la modélisation.
- Penser la modélisation dans le travail mathématique en prenant en compte l'idée de mathématisation



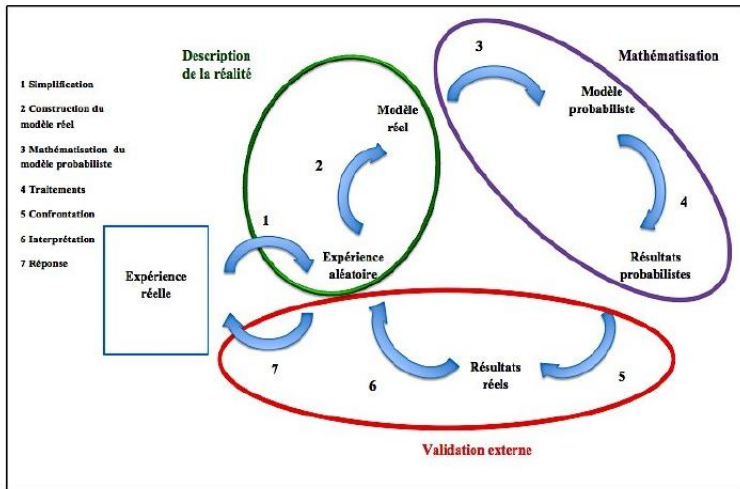
- Des approches critiques en relation avec le monde social et des mathématiques situées
- Les approches “épistémologiques”
  - La perspective de la Realistics Mathematics Education
  - La perspective de la théorie des Espaces de Travail Mathématique
  - La perspective de la Theorie Anthropologique du Didactique

# Un exemple introductif : les recherches de Nechache sur la validation en probabilités

- Spécificité des probabilités et des statistiques : extension des domaines, particularité des modèles, simulation
- Une étude menée au niveau de l'enseignement secondaire et s'appuyant sur des tâches nécessitant la mise en oeuvre de un ou plusieurs modèles.
- Le segment et son milieu.

*Sur un segment  $S$ , on prend au hasard deux points  $A$  et  $B$ . On considère l'événement "La longueur du segment  $[AB]$  est strictement supérieure à la moitié de celle du segment  $S$ ". Quelle est la probabilité de cet événement ?*

# Mathématisation et modélisation



# Les approches alternatives : importance des mathématiques

- La prise en compte des mathématiques à travers la mathématisation
- Importance de la dimension épistémologique
- La modélisation est la part de travail mathématique autour des modèles

# L'approche constructiviste de la Realistic Mathematics Education (RME)

## Une théorie initiée par H. Freudenthal aux Pays-Bas

- Quelques key-design (Gravenmeijer)
  - Reinvention guidée
  - Une approche phénoménologique de la didactique
  - Modèles émergents (emergent models) : rejet de l'idée of "translating"

Une discussion à partir d'un ouvrage *Symbolizing, Modeling, Tools in Mathematics Education* (Kluwer 2002) Dirigé par Gravenmeijer, Lehrer, Van Oern, Verschaffel.

# L'approche constructiviste de la Realistic Mathematics Education (RME)

## Pluralité de modèles (vue de manière linéaire ou par chaînage) avec les modèles émergents

- Modèles en relation étroite avec les représentations symboliques
- Produits par les étudiants
- Premier pas de la mathématisation horizontale

# L'approche constructiviste de la Realistic Mathematics Education (RME)

- 1 Critique de l'approche dominante où le modèle apparaît comme une traduction (ou une translation) à partir de situation modélisée.
- 2 In contrast, within the RME conception, modeling is primarily seen as a form of organizing, within both the symbolic and the model itself emerge (The book, p. 7).
- 3 Une insistance mise sur la construction de la signification des objets mathématiques embarqués dans le modèle

# Construction de la signification

Un chainage dyadique de signifiants qu'on peut interpréter avec le modèle triadique de Peirce (Presmeg)

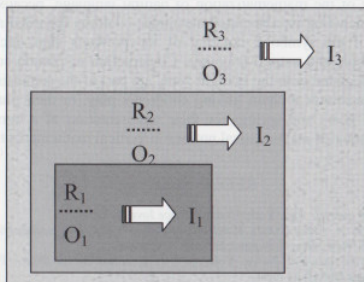
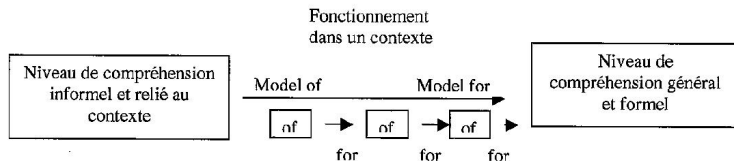


Figure 1. A Peircean representation of a nested chaining of three signifiers



# Le chainage model of / model for : en route vers la méthématisation verticale



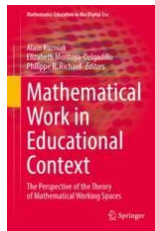
## Symbolizing, Modeling, Tools

Un accent mis sur trois processus :

- Production et usage de symboles appuyée sur les signes
- Utilisation d'une variété d'outils dont certains peuvent être des modèles
- Un processus de modélisation qui assure de progressivement la mise en place d'un raisonnement de preuve

Mise en relation possible avec les idées de genèses sémiotique, instrumentale et discursive (preuve) vues comme constitutives du travail mathématique dans la théorie des ETM.

- Le livre *Mathematical Work in Educational Context : The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* chez



Springer

- et particulièrement le chapitre 11 Lagrange, Huincahue, Psycharis *Modeling in Education : New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces*

# Étudier et développer le travail mathématique

Le travail mathématique doit être compris comme un processus humain intellectuel continu de production, dont l'orientation et la finalité sont définies et encadrées par les mathématiques et plus généralement par la culture mathématique.

Le travail mathématique a pour but d'accomplir une tâche, de résoudre un problème ou de surmonter un obstacle en relation avec les mathématiques.

Un objectif raisonnable de l'enseignement des mathématiques est qu'à la fin de leurs études, les élèves aient une bonne idée et une bonne pratique du travail mathématique.

# Objectif, processus et résultats

Le travail mathématique implique la prise en compte de trois aspects liés à sa réalisation et à son développement)

- La finalité du travail.

Il s'agit d'assigner un but à un ensemble d'actions, de clarifier les enjeux qui lui sont associés et de l'inscrire dans la durée en démontrant sa pertinence générale.

- Les processus du travail.

Ils sont liés aux procédures et aux contraintes de mise en  $\frac{1}{2}$ uvre de tâches données.

- Les résultats du travail.

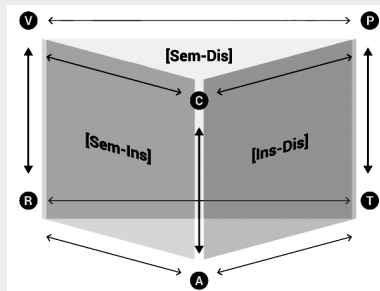
Les résultats doivent être valides et cohérents dans le domaine mathématique en question.

# Une vue générale sur l'Espace de Travail Mathématique à l'aide du diagramme des ETM

Étudier le travail mathématique grâce à la circulation à l'intérieur du diagramme des ETM

Trois axes d'étude :

- la genèse sémiotique,
- la genèse instrumentale et
- la genèse discursive de la preuve



# Quelques perspectives ouvertes par la théorie des ETM sur la modélisation mathématique en éducation – Lagrange.

- Distinction entre modélisation et mathématisation
  - La modélisation est orientée vers l'action et la solution de problèmes qui se posent dans le monde du travail et dans la société (opérativité).
  - La mathématisation est orientée vers la construction mathématique des objets et la structuration des modèles à l'intérieur de théories
- Idée de localité : Des modèles comme fragments des mathématiques et qui ne sont pas une traduction évidente de la réalité.

Pluralité des modèles pour résoudre des questions avec une variété de points de vue.

Prendre en compte la complexité de la modélisation sans réduction à une translation et à un usage du langage mathématique.

- Chaque modèle local mis en place est associé à un ETM particulier, et on doit être mise en relation avec d'autres modèles associés à des ETM différents.
- La théorie permet d'articuler ces différents points de vue et d'étudier les interactions à la fois cognitives et épistémologiques entre tous ces éléments
- Prendre les exemples in the workplace et en relation avec le contexte socio-culturel



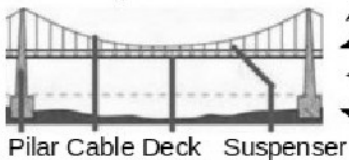
# L'exemple du pont suspendu

## Un premier modèle phénoménologique

Obtenu à partir de l'observation de photos, il permet par exemple d'exhiber la forme parabololique mais aussi de constater que les élèves négligent les câbles verticaux

## Quatre modèles pour rendre compte de la forme du câble

In a suspension bridge, what is the shape of a main cable?



Mock-up and model of tensions

Geometrical discrete model

Algorithmic simulation

Mathematical function

# Sur l'organisation de la classe

L'approche suivie par Lagrange (et al.) utilise une disposition de la classe de type jigsaw education.

- Dans notre cas, quatre groupes d'élèves (idéalement de 4 élèves) sont mis en place et travaillent chacun sur un des quatre modèles précédemment présentés. Ils ont donc à leur disposition des logiciels et des questions différentes.
- Une fois ce premier travail terminé, les élèves sont répartis à nouveau en quatre groupes composés chacun d'un des spécialistes d'un des modèles travaillés par chacun des quatre groupes initiaux.
- Ils doivent proposer une synthèse de leur travail qui relève à la fois de la validation externe et d'une première communication à des experts puisqu'ils devront ensuite expliquer leur résultat au groupe classe dans son entier.



## Modélisation du mouvement circulaire uniforme et fonctions numériques : Reyes

- Extrait d'une séquence d'enseignement qui vise à comprendre le lien entre mathématiques et physique à propos de différents types de mouvement.
- Utilise l'idée de cycle de modélisation, la théorie des ETM (Paradigmes, Diagramme des ETM) pour à la fois concevoir et étudier les séances

# Quelques questions en suspens...

- Quelle place pour la modélisation mathématique dans l'enseignement et les recherches en didactique des mathématiques.
- Jeu entre les disciplines
- Modélisation, Mathématisation et travail mathématique
- La démathématisation actuelle due aux outils digitaux et à la simulation.
- Développer instructional design articulant enseignement, formation et interdisciplinarité sur le temps long.

# Pour en savoir plus sur ces perspectives

- Les publications et les travaux de thèse, de master (étage 8 de Sophie Germain (Université Paris Cité), L. Vivier)
- Le livre sur le travail mathématique (Spriger) et notamment le chapitre 11.
- Les actes de l'école d'été de didactique 2021