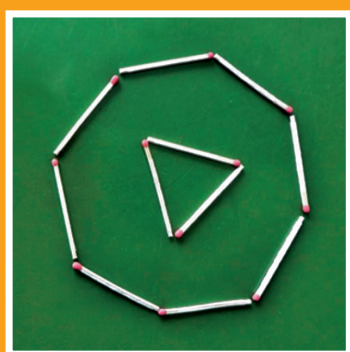
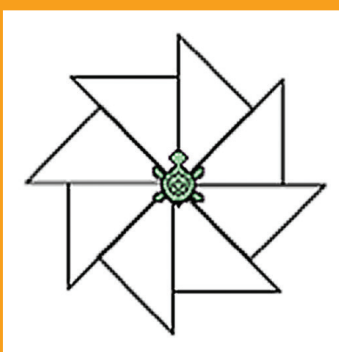
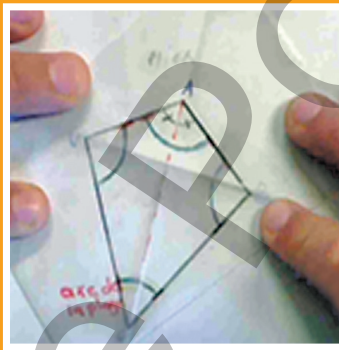


*Enseigner les mathématiques en cycle 3
à partir des grandeurs :*

LES ANGLES



Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Les ANGLES

Par le groupe collège de l'IREM de Poitiers

Ce travail poursuit, complète et enrichit les travaux de la brochure *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : Les ANGLES* du groupe collège de l'IREM de Poitiers (octobre 2009).



À nos lecteurs,

Cette brochure sur les *Angles* en cycle 3 est destinée aux professeurs des écoles, aux professeurs de mathématiques mais également aux professeurs référents, aux conseillers pédagogiques et aux coordonnateurs réseau encadrés par leurs inspecteurs respectifs.

Son objectif est de permettre de prendre du recul sur l'enseignement des angles, et plus généralement de la géométrie plane, d'un point de vue pluriel (mathématique, pédagogique, didactique, historique, épistémologique, écologique), et d'en découvrir une nouvelle approche à travers un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs envisagé du cycle 1 au cycle 4, en cohérence avec les programmes. Enfin, nous souhaitons en faire un objet de formation initiale et continue.

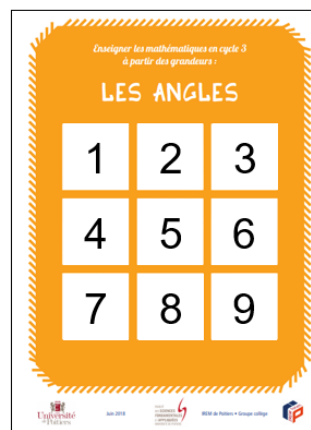
Nous remercions plus particulièrement pour leurs échanges, relectures et conseils :

- M. Nicolas Paquet, Inspecteur de l'Éducation Nationale, Châtelleraut (86)
- Mme Isabelle Boisseau, conseillère pédagogique du REP+ La Rochelle Ouest (17)
- Mme Pauline Desrosier, enseignante CM1/CM2 à l'École Louis Guillet de La Rochelle (17)
- Mme Aude Gandais, enseignante CM1/CM2 à l'École Louis Guillet de La Rochelle (17)
- Mme Laetitia Rebourg-Fert, enseignante en CE1/CE2/CM1/CM2 et directrice à l'École de Vicq sur Gartempe (86)
- Mme Catherine Siquès, coordonnatrice réseau REP+ La Rochelle Ouest (17)
- Mme Emmanuelle Sérandour, enseignante formatrice en CE2, École Jean Bart de La Rochelle (17)
- Mme Florence Thomas, enseignante en CM1/CM2 et directrice à l'École de Lésigny (86).

Les auteurs

Source des images

1. Cerf volant delta, Google image
2. Extrait d'un travail d'élève
3. Éolienne, Google image
4. Extrait d'un travail d'élève
5. Manesson Mallet, *La géométrie pratique*, 1702
6. Équerre d'onglet, Google image
7. Image Wikipédia Constellation d'Orion
8. Extrait d'une copie d'écran
9. Photo Jacqueline Guichard



Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs

Les ANGLES

Avant propos	3
Les angles en cycle 3	7
1. Introduction	7
2. Analyse mathématique	11
Les grandes questions	11
La couverture du programme	19
Éléments de réflexion	23
- Reproduction de figures et constructions géométriques	23
- Cercle et angles	24
- La validation du faire et du dire	24
3. Analyse didactique	25
Le parcours d'étude	25
Le cours	37
Les contextes d'apprentissage	41
- Les situations	41
- Les instruments pour reproduire les angles	43
- Les activités mentales	44
- Les dictées géométriques	46
4. Mise en œuvre dans la classe	47
Des déroulements en classe CM1/CM2/6 ^e	47
Des fiches de séances en CM1/CM2	63
Des études de situations	73
Des exemples de cours (trace écrite) CM1/CM2/6 ^e	95
Des activités mentales	111
Des évaluations CM1/CM2/6 ^e	115
5. Banque de situations	135
Définir un angle	135
Comparer des angles	141
Ajouter des angles	153
Partager des angles	157
Mesurer des angles	165

6. Ressources	181
Écologie	181
Instruments et expériences pour la classe	187
Géométrie pratique	194
Histoire	195
Bibliographie	207

Annexes	209
1. Les grands domaines des mathématiques	209
2. Aller plus loin dans la notion de grandeur	215
3. Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs	219
4. Couverture du programme du cycle 2 au cycle 4 par les grandeurs	227
5. Gestion sur l'année : des progressions	231
6. Bibliographie générale	237
7. Pour expérimenter	240

Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs

Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc. (Bossut, 1784)

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. (Chevallard et Bosch, 2002)

Pourquoi et dans quel but ?

Les manuels de cycle 3 contiennent un grand nombre d'exercices techniques comme multiplier un nombre par une fraction. La pratique de ces exercices, souvent chronophage par rapport aux autres activités mathématiques, n'est pas toujours synonyme d'efficacité et est en outre sujette à une question usuelle des élèves : « À quoi ça sert, M'sieur ? ... »

Les réponses à cette question peuvent être diverses :

- *C'est au programme. Et puis tu en auras besoin l'année prochaine.*
- *Sans ça tu n'aurais pas de pacemakers, de portables, de fusée Ariane...*
- *Par pitié cher élève, ne me pose pas cette question...*
- *Les mathématiques ne sont pas, de manière évidente, utiles au citoyen ; cela devra être démontré. (Rapport Thélot, 2004)*

Le Rapport de l'I.G.E.N. de 2007 a soulevé le problème de ce type d'exercices : « Les exercices proposés dans les classes contribuent à l'image négative d'une discipline ressentie comme uniquement scolaire et éloignée de la vie. »

Et c'est peut-être une des explications au fait que l'on trouve dans nos classes de plus en plus d'élèves peu attentifs, voire décrocheurs ou d'élèves qui n'aiment pas les mathématiques.

Enfin, nous notons qu'au fur et à mesure des années de scolarité, la part que prennent les manipulations diminue au point de parfois disparaître au collège. Nous considérons, au contraire, que ces manipulations, le fait de toucher des mathématiques et d'être ainsi acteur physiquement de son apprentissage, aident à l'acquisition des concepts et devraient être partie intégrante de son enseignement.

L'objectif est donc à la fois de motiver les élèves et de donner du sens à notre enseignement.

Les savoirs, techniques et compétences mathématiques sont souvent présentés et travaillés de façon décontextualisée, sans liens entre eux ou avec la vie quotidienne, sans justification ou dans un contexte très « artificiel ». C'est en montrant qu'ils sont en fait les réponses à des questions que se sont posées ou que se posent les hommes que nous donnerons un liant, une logique et donc du sens aux mathématiques enseignées tant pour le professeur que pour les élèves.

Pour cela nous sommes revenus aux sources du savoir, nous avons revisité son histoire et nous avons cherché où vivent les mathématiques élémentaires dans notre société. Il nous est apparu que c'est à travers l'étude des grandeurs que les notions élémentaires des mathématiques se sont construites, et que c'est à travers elles qu'elles vivent dans notre environnement.

Nous voulons par cette démarche amener à une meilleure compréhension de l'intérêt des mathématiques et des sciences en général, et ainsi susciter la curiosité, l'intérêt des élèves, améliorer leur implication, tout en favorisant une appropriation solide des connaissances et compétences mathématiques au programme.

Nous visons à favoriser la réussite des élèves en donnant plus de sens aux notions enseignées à travers les situations de la vie des hommes que nous proposons, ainsi que par de nombreuses manipulations et fabrications d'instruments. C'est en multipliant les contextes d'utilisation des techniques et savoir-faire à l'intérieur d'une même grandeur et à travers différentes grandeurs que l'élève se fabriquera une meilleure conceptualisation des objets et notions mathématiques.

De nombreux professeurs de collège (dont certains en REP+) ont adopté notre démarche et enseignent les mathématiques à partir des grandeurs. Ces expériences sont très positives (enthousiasme des professeurs, remotivation, implication, investissement des élèves).

Cet enseignement s'appuie sur les travaux d'Yves Chevallard (théorie anthropologique du didactique) et est développé par l'IREM de Poitiers depuis une quinzaine d'années (voir la bibliographie générale en annexe 6).

Comment ?

Nous avons réalisé qu'en choisissant d'étudier quelques grandeurs, nous pouvions parcourir tout le programme, et le parcourir plusieurs fois.

Pour les classes de cycle 3, nous proposons d'organiser le travail de l'année autour de l'étude d'au moins six des huit grandeurs suivantes : populations, angles, durées, aires, prix, volumes, longueurs, masses. Ces grandeurs, qui sont des thèmes transversaux aux trois grandes parties du programme, donc aux différents domaines des mathématiques, constituent nos chapitres.

Nous avons structuré l'étude de chaque grandeur autour de quelques grandes questions mathématiques : Comment dénombrer ? Comment définir ? Comment comparer ? Comment partager ? Comment mesurer ? Comment calculer ? qui en entraînent d'autres : comment multiplier, diviser, construire... ?.

Dans chaque nouveau chapitre l'élève rencontre les mêmes grandes questions mathématiques, retrouve ou enrichit les outils et méthodes qu'il a déjà vus. Les notions et savoir-faire du programme deviennent des outils de réponse à ces questions : le savoir qui se construit sert à quelque chose, il devient fonctionnel.

La démarche que nous proposons est intégrative des compétences du programme, qui retrouvent ainsi une place naturelle, et leur donne du sens. Pour la mettre en œuvre dans la classe, nous élaborons pour chaque grandeur une banque de situations structurée autour de grandes questions dont le contenu est ancré dans la vie des hommes, présente mais aussi passée. Ces situations permettent de travailler à la fois des compétences générales et des compétences mathématiques : lire un texte, une image, un document, comprendre une démarche, commenter et critiquer, modéliser, chercher, raisonner, représenter, calculer..., et de le faire dans des contextes variés. À partir de cette banque, chacun peut personnaliser le parcours du chapitre qu'il va proposer à ses élèves.

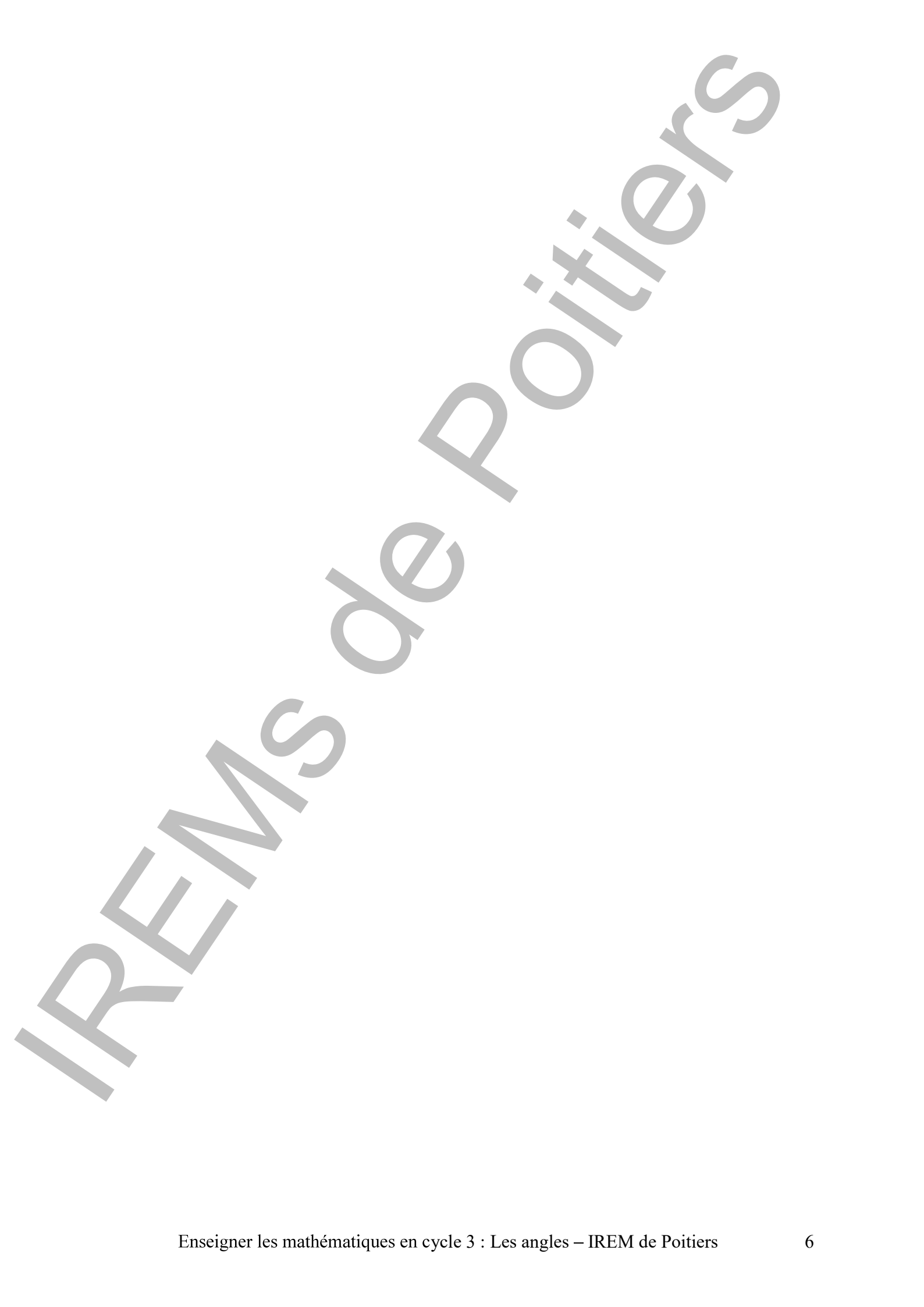
L'ensemble des contenus mathématiques (connaissances et savoir-faire) est réparti dans chacune des grandeurs étudiées. Cela transforme la façon d'aborder mais aussi

d'entretenir les notions et les techniques, certaines étant travaillées à plusieurs moments dans l'année dans des grandeurs différentes. Nous n'avons donc plus de chapitre sur la proportionnalité, sur les fractions ... et plus généralement la partie du programme intitulée *Nombres et calculs* est travaillée dans toutes les grandeurs. Par exemple la soustraction intervient pour l'écart (de longueur, d'aire, de durée, de prix...), les fractions interviennent dans les durées ($\frac{1}{4}$ d'h), dans les prix ($\frac{1}{3}$ des revenus est consacré au loyer, pourcentages), dans les angles (partage en 4, 8, 16 de la rose des vents)...

Cet enseignement essaie de placer le questionnement au centre des apprentissages : on se demande comment faire pour comparer des prix, des angles, pour diviser des durées, des aires, pour reproduire un angle... Il s'inscrit totalement dans la démarche de résolution de problèmes qui fait l'essence des mathématiques et que le programme demande de développer :

La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. (Programme, introduction)

Enfin, chaque grandeur est liée à la manipulation d'outils et d'instruments, actuels ou anciens, fournis ou créés. La manipulation, l'expérimentation physique qui fait vivre une question, une réponse, un travail, une grandeur est pour nous un levier fort pour acquérir des notions et savoir-faire du programme.



1. Introduction

L'art de prendre la valeur des Angles est une opération d'un grand usage & d'une grande étendue dans l'Arpentage, la Navigation, la Géographie, l'Astronomie, &c. (L'Encyclopédie, art. Angle, 1751)

En parcourant les chapitres « Angles » des différents manuels de cycle 3, nous faisons les constats suivants :

- il n'est presque jamais question de définition
- il y a très peu de situations contextualisées concrètes
- il y a surtout du travail sur les notations et le vocabulaire
- les questionnements sont souvent très artificiels
- les exercices ont pour la quasi-totalité un support géométrique « pur »
- la manipulation proposée est d'un seul type (gabarit, calque) et est fortement suggérée
- « Angles » est parfois mélangé avec « Aires et périmètres »
- le travail sur les angles est morcelé en séquences dispersées.

Ce sont de notre point de vue des freins à une bonne appropriation du concept d'angle. En effet comme nous l'avons évoqué dans l'avant-propos, c'est en multipliant les contextes d'utilisation des techniques et savoir-faire à l'intérieur d'une même grandeur et à travers différentes grandeurs que l'élève se fabriquera une meilleure conceptualisation des objets et notions mathématiques.

Afin de proposer une mise en place efficace pour la construction et la pratique de la grandeur *angle*, nous nous sommes tournés vers l'histoire de notre discipline et vers les usages des angles dans les situations de la vie des hommes (voir la partie 6). Nous nous sommes concentrés sur trois questions fondamentales : Qu'est-ce qu'un angle ? Pourquoi étudier les angles ? Pour résoudre quels problèmes ?

Deux ouvrages historiques de référence

Dans l'*Encyclopédie*, le *Dictionnaire raisonné des sciences, des Arts et des Métiers* (fin du XVII^e siècle), Diderot et d'Alembert avaient entre autres pour projet de revenir aux sources. Ils y établissent de nombreux liens entre ces notions et leurs usages dans la vie des hommes. La lecture de l'article sur les angles (voir le texte dans la partie 6) nous met aussitôt en présence de la définition de la grandeur, l'ouverture, et non d'un objet géométrique : cette définition *cinématique* permet d'aborder le problème de la mesure par les arcs et donc de donner à la fois des moyens de comparer les angles et d'en trouver une mesure. L'indépendance entre égalité des angles et longueurs des côtés est justifiée. L'article enchaîne avec l'importance des angles dans la vie des hommes : arpentage, navigation, géographie, astronomie... et parle alors des instruments et de leur utilisation. Après le partage d'un angle en 2 et en 3, on trouve les différentes espèces d'angles en mathématiques et leurs propriétés. L'article se termine par un nombre impressionnant de dénominations d'angles qui montre l'usage de cette notion dans une pluralité de disciplines : optique, fortification, navigation, astronomie...

Dans le traité de Clairaut, *Les Élémens de Géométrie* (1741), la notion d'angle apparaît pour résoudre un obstacle à un problème d'arpentage et est définie comme *l'inclinaison d'une ligne sur une autre* (article XXVII). On y traite ensuite de l'utilisation d'une fausse équerre pour le report des angles permettant la reproduction de figures (article

XXVIII). Puis Clairaut donne une autre façon de reproduire un angle à l'aide de cercles donc réalisable avec une corde sur le terrain, ou à la règle et au compas sur une feuille. Il note par la suite que cet outil, ces techniques ne sont toutefois pas suffisants (article LI). Un autre instrument est nécessaire. Il lui assigne un cahier des charges précis : permettre de connaître la grandeur absolue des angles et leurs rapports. C'est l'analyse mathématique de la situation à partir de la notion d'ouverture et la mise en relation avec le problème analogue déjà résolu pour les longueurs (article LII), qui vont lui permettre de définir la mesure des angles (article LIII) et donc le principe des deux instruments qu'il décrira un peu plus loin : le demi-cercle sur le terrain d'arpentage pour mesurer les angles et le rapporteur pour tracer sur le papier les angles de mesures données par le demi-cercle. Le nom même de rapporteur s'éclaire (voir les textes de Clairaut dans la partie 6).

Si dans l'*Encyclopédie* est donnée d'abord la notion puis son utilisation, dans le traité de Clairaut l'organisation est différente : ce sont les besoins qui amènent à la notion d'angle, aux techniques et aux instruments associés. C'est dans cette interaction entre problèmes de la vie à résoudre et moyens effectifs pour les résoudre qu'on comprend alors mieux la genèse des notions mathématiques et de leurs propriétés.

Des manuels anciens

En consultant d'anciens manuels de mathématiques nous trouvons une organisation différente mais également cohérente pour la grandeur Angle. Voici la structure du chapitre sur les angles de deux d'entre eux :

- *Nathan*, (Plessier & Morlet, 1965)

Chapitre 3. Angles, cercles et arcs de cercles.

- I. Plan. Demi-plan. Angles.
- II. Égalité et addition des angles. Multiples et sous multiples.
- III. Cercles et arcs de cercles.

Chapitre 4. Mesure des angles et des arcs. Longueur du cercle.

- I. Mesure des angles et des arcs.
- II. Calculs sur le nombre mesurant angles et arcs de cercle.
- III. Longueur d'un arc de cercle. Longueur du cercle.

- *Hachette*, (Cahen, 1958)

Chapitre 2. Angles.

- I. Notion d'angle.
- II. Opérations sur les angles.
- III. Mesure des angles.
- IV. Opérations sur les mesures d'angles en degrés.

L'organisation mathématique de ces deux plans est similaire : on définit tout d'abord la notion d'angle puis, dans un deuxième temps, les opérations sur la grandeur en tant que telle, c'est-à-dire sans mesure. Addition des angles, partage des angles, multiples et sous-multiples, vont permettre dans un troisième temps d'expliquer en quoi consiste la mesure des angles : c'est là qu'est introduit le rapporteur. Enfin, le dernier temps est celui du calcul avec les mesures. Nous sommes en présence d'une organisation structurée des connaissances où la phase de définition et d'arithmétisation de la grandeur angle (Barbin, 2007, annexe 6, bibliographie générale) est prise en compte, où la notion de mesure d'un angle peut prendre sens et où l'on comprend comment a été conçu l'instrument usuel de mesure d'un angle sur le papier qu'est le rapporteur.

Utilité et construction du rapporteur

Si sur terre les angles sont essentiels à l'arpentage, en mer, dans les airs et parfois aussi sur terre, ils sont indispensables au repérage. Prendre le cap pour se diriger, c'est trouver un angle entre deux directions. Se déplacer en mer ou dans les airs, vers les terres lointaines, impose au navigateur de tracer sa route, son rhumb, sur une carte. Se pose alors le problème de l'établissement de cartes, celui du tracé de la route sur la carte, et celui du suivi de la route dans le milieu naturel. On se retrouve, comme pour l'arpentage, à gérer deux types d'outils suivant que l'on est sur le « papier » ou sur le « terrain », en articulation avec les mathématiques (voir les textes de Manesson-Mallet dans la partie 6). Deux articles de Marie-Thérèse Gambin (1996 et 2004) nous ont fait découvrir les cartes portulans. Utilisées par les anciens navigateurs, elles sont couvertes de faisceaux de lignes droites qui sont en fait des roses des vents qui parsèment la carte. La rose des vents, souvent objet anecdotique pris dans des manuels comme exercice de construction, prend alors un tout autre intérêt. Cet instrument simple à fabriquer (uniquement avec des bissections) a permis et permet toujours de s'orienter facilement¹. On retrouve la rose des vents sur les boussoles, sur les compas de navigation, sur la barre des bateaux ... La construction d'un rapporteur en degrés est plus complexe et impose le partage d'un angle en 3 et 5 parties égales : problème difficile voire impossible à résoudre à la règle et au compas. On réalise ainsi que pour construire un rapporteur, nous sommes immédiatement confronté à un problème mathématique fondamental : celui du partage d'une grandeur, ici l'angle, en parties égales, qui va permettre à la fois de mesurer les grandeurs, de fabriquer des instruments de mesure, et de construire le domaine des nombres généralisés, comme disait Lebesgue (1935), ou nombres réels comme nous dirions aujourd'hui.



Détail de la Carte de Cantino, v. 1502

Organisation des apprentissages

Pour toutes ces raisons, nos chapitres sur les angles en cycle 3 sont structurés par les 5 grandes questions suivantes :

1. Comment définir un angle ?
2. Comment comparer des angles ?
3. Comment ajouter des angles ?
4. Comment partager des angles ?
5. Comment mesurer des angles ?

Les premières questions sont abordées en CM1, reprises et approfondies en CM2 et 6^e, la dernière n'étant abordée qu'en 6^e, ce qui correspond aux repères de progressivité donnés dans le programme pour la partie *Grandeurs et mesures*. On peut remarquer aussi que les réponses à ces questions fournissent toutes les compétences du programme : identifier des angles, comparer des angles, reproduire des angles, reconnaître des angles, utiliser un rapporteur... Ces compétences ne sont pas acquises isolément, de façon morcelée, mais comme réponses à de grandes questions mathématiques qui sont étudiées au travers de situations de la vie des hommes.

¹ Jean-Paul Mercier présente cette fabrication à la main d'une rose des vents avec un papier très fin, le papier pelure d'oignon. (Voir les paragraphes « Utilisation d'instruments » et « Partager » dans les parties suivantes).

Ces recherches nous ont aussi donné les principales thématiques pour l'étude des angles qui correspondent aux problèmes que se sont posés et se posent toujours les hommes :

- se repérer, tracer sa route sur terre, en mer ou dans les airs,
- faire un relevé de terrain ou sur un objet, faire un plan, reproduire une figure à l'échelle,
- reproduire et construire des figures polygonales,
- trouver des distances inaccessibles.

Ces thématiques permettent de traiter ce qui concerne les angles dans *Grandeurs et mesures*, ainsi que le repérage et les figures dans le plan, donc une partie importante de la rubrique *Espace et géométrie* du programme. Ces apprentissages n'ont pas à être disjoints. De plus la somme et le partage des angles va amener à parler tout naturellement du double, du triple, de la moitié, du tiers, du quart, du huitième d'un angle, et de faire des opérations simples avec des fractions donnant ainsi du sens à des apprentissages de la partie *Nombres et calculs*. Enfin, en 6^e, lorsqu'on va définir la mesure d'un angle et mesurer les angles en degrés, on va utiliser des nombres entiers et décimaux : on travaille alors encore des connaissances et compétences de la partie *Nombres et calculs*. Par exemple pour construire les polygones réguliers à partir d'un cercle, on va être amené à diviser 360° par 3, 4, 5, 6, 7, 8... Certaines divisions vont tomber juste, d'autres non. Il va falloir arrondir : avec quelle précision ? Voilà des problèmes qui vont se poser et qu'il va falloir résoudre.

On voit ainsi comment un apprentissage centré sur les grandeurs permet de travailler conjointement les 3 parties du programme, sans les dissocier. Cela évite de morceler le savoir et lui donne du sens.

Enfin nos recherches nous ont montré la grande variété des instruments que les hommes ont élaborés pour reproduire et mesurer des angles (voir la brochure *Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs en 5^e : les Angles*). Le traité de Clairaut indique les deux instruments indispensables : la fausse équerre dans un premier temps, puis le rapporteur. Nous faisons aussi ce choix pour les élèves en y ajoutant un logiciel de géométrie. Cela correspond tout à fait aux instruments mentionnés dans les repères de progressivité des parties 2 et 3 du programme, si ce n'est que la fausse équerre remplace avantageusement les gabarits : en plus d'être dynamique (son ouverture pouvant varier), c'est un véritable instrument, utilisé par les artisans et bricoleurs, en particulier en menuiserie. Il est ainsi la définition de l'angle comme ouverture transformée en outil.

Pour mettre en œuvre dans la classe le chapitre *Angles*, nous avons élaboré une banque de situations (voir la partie 5) ayant comme rubriques les 5 grandes questions : elle sert de ressources pour choisir les activités d'étude, les exercices et les sujets de devoirs. Nous montrons dans la partie 4 des mises en œuvre dans la classe du chapitre *Angles* avec des situations de la banque. L'étude de ces situations permet une appropriation progressive et différenciée des connaissances et compétences sur les angles et les figures (parties 2 et 3 du programme). Elle s'inscrit totalement dans la démarche de résolution de problèmes qui fait l'essence des mathématiques et que le programme demande de développer :

La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens (Programme, introduction).

2. Analyse mathématique

Dans un premier temps nous analyserons chacune des cinq questions que nous avons choisies pour l'étude de la grandeur *Angles*. Nous montrerons que cette démarche fait découvrir et travailler de nouveaux et nombreux savoirs et savoir-faire mathématiques du cycle 3 qui appartiennent aux parties du programme *Espace et géométrie* et *Grandeurs et mesures*, mais aussi *Nombres et calculs*. Ces éléments seront détaillés dans une deuxième rubrique. Enfin, dans un troisième temps, nous développerons différents points qui nous semblent mériter réflexion : la place des angles dans la reproduction de figures et les constructions géométriques, les liens entre angles et cercle, l'importance de la validation de ce qui est dit et fait.

Les grandes questions

Comme nous l'avons dit dans l'avant-propos, pour chaque grandeur nous avons choisi une organisation de son étude mathématique qui réponde à de grandes questions. Lorsqu'il s'agit d'une nouvelle grandeur à étudier, comme c'est le cas pour les angles en cycle 3 (voir partie 7, *annexe 4*), ces questions correspondent à la construction mathématique d'une grandeur : définition, comparaison, addition, partage, mesure.

Nous structurons donc l'étude des *Angles* au cycle 3 en cinq grandes parties correspondant à chacun de ces temps.

Comment :

1. Définir un angle.
2. Comparer des angles.
3. Ajouter des angles.
4. Partager des angles.
5. Mesurer des angles.

Ces questions renvoient à des types de tâches fondamentales en mathématiques.

Voyons ce qu'il en est pour chacune de ces questions.

1. Définir un angle

Comment définir un angle ?

C'est quoi un coin ? Le coin d'une figure, d'un objet, le coin de la rue, le jeu des quatre coins ? C'est quoi l'angle de deux rues, un angle de tir, l'angle de deux murs, un angle de visée, de vue, un angle mort, un angle de coupe, de rotation, d'inclinaison ... ?

La notion d'angle est sans doute celle qui soulève le plus de discussions et de difficultés dans l'enseignement de la Géométrie. (Choquet, 1964)

Qu'est-ce qu'un angle ? Une ouverture, une inclinaison, ou bien l'intersection de deux demi-plans, la réunion de deux demi-droites ? Veut-on y voir une grandeur ou un objet géométrique ? Vous pourrez approfondir ces questions en allant lire l'article *L'angle un concept ambivalent* dans la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nos recherches nous ont amenés à choisir la définition de l'angle comme ouverture entre deux demi-droites de même sommet. Cela privilégie l'aspect cinématique et grandeur de l'angle et permettra par la suite de « dégager », mais aussi de justifier de nombreuses méthodes. En effet, lors de la confrontation

aux problèmes de comparaison, de partage, d'ajout, de mesure d'angles, les *techniques* mais aussi les outils, connus ou à construire, (papier calque, gabarit, compas, fausse équerre) apparaîtront naturellement.

Il s'agit donc de rencontrer l'angle à travers des situations où il est question d'ouverture.

Nous remarquons enfin que cette approche fait fréquenter les notions de demi-droite, de perpendiculaire, d'alignement de façon fonctionnelle.

Des situations où ces questions peuvent se poser :

- position des membres du corps, intersection de rues, de murs, inclinaison de toits, de panneaux solaires, parts de gâteaux...
- reproduction de formes polygonales, arpentage, comparaison de la forme d'objets polygonaux.

Connaissances et compétences :

- ouverture, écart, superposition, demi-droite, perpendiculaire, angle droit,
- gabarit, calque, fausse équerre,
- définition d'un angle, codage d'un angle,
- identifier un angle, reproduire un angle.

2. Comparer des angles

Comment comparer des angles ?

Les angles sont-ils égaux ? Quel est le plus grand ? Le plus petit ? Est-il plus grand ou plus petit qu'un angle droit ?

1) La superposition

Pour répondre à ces questions, la méthode la plus simple est de superposer les angles : on peut ainsi voir si les ouvertures sont les mêmes ou si l'une est plus petite ou plus grande que l'autre. Comment réaliser cette superposition ?

Pour superposer un angle sur un autre, il faut qu'on puisse le déplacer, le transporter.

Directement

C'est le cas si l'on veut comparer les angles de deux pièces du Tangram.

Avec un gabarit ou un calque

Si les deux angles à comparer appartiennent à un même objet, on peut réaliser une copie de cet objet (ou de l'un des angles) sous forme d'un gabarit en papier ou carton.

Si les deux angles à comparer se trouvent sur une même feuille de papier (figure, dessin ou photo), on peut réaliser une copie d'un angle avec un calque.

Si on a la feuille en deux exemplaires, on peut découper un gabarit dans l'une des feuilles.

Si l'on utilise un gabarit, une fois le gabarit posé sur le deuxième angle, s'il se trouve à l'intérieur, alors le premier angle est plus petit. S'il le cache, c'est plus délicat car il faut savoir si le deuxième côté de l'angle est juste caché ou complètement caché. On voit alors qu'il faudra soit réduire le gabarit (pour qu'il ait des côtés plus petits), soit allonger les côtés du deuxième angle (pour qu'ils dépassent). Cette expérience de superposition amène donc à concevoir les côtés des angles comme pouvant s'allonger ou se raccourcir à volonté : seule compte l'ouverture. Les pièges classiques des exercices de comparaison d'angles s'évanouissent. Et l'on comprend en situation que les côtés de l'angle ne sont pas des segments, et ce que peut être une demi-droite.

2) Ouverture et écart

On peut répondre aux questions du départ autrement, en se demandant : comment mesurer l'écart ou l'ouverture entre les deux côtés d'un angle ?

Avec la fausse équerre

On imagine un instrument qui représente un angle que l'on peut ouvrir à volonté. On le fabrique ou on le montre : c'est la fausse équerre des menuisiers. Avec elle on prend l'ouverture d'un angle. Si pour le deuxième angle on est obligé d'ouvrir davantage, alors ce deuxième angle est le plus grand. Si l'on est obligé de réduire l'ouverture alors il est plus petit.

Avec le compas

On cherche à mesurer l'écartement entre les deux côtés de l'angle, et ensuite on compare les écartements. Des questions se posent : où mesurer l'écartement ? Entre quel point du premier côté et quel point du second ? Il va falloir établir des règles. La plus simple est de prendre deux points à la même distance du sommet de l'angle. Ce qui est facile à faire au compas, ou à la règle graduée. La distance entre les deux points mesure l'écartement des deux côtés, donc l'ouverture (corde sous-tendant l'arc de cercle). On peut, ou non, tracer le segment joignant les deux points, et prendre sa mesure avec un compas ou une règle graduée (réinvestissement ou réactivation d'acquis du cycle 2). Pour la mesure de l'écartement entre les deux côtés du second angle, il faudra prendre les deux points à la même distance du sommet que celle prise pour le premier angle : c'est notre « unité ». Si l'on voulait procéder ainsi pour faire un travail collectif de comparaison d'angles, il faudrait décider d'une longueur-unité identique pour tous, par exemple 5 cm, ou 10 cm.

On voit que cette méthode engage dans une réflexion mathématique approfondie. On pourra ne la solliciter qu'en fin de cycle 3, sauf si des élèves en situation de recherche la suggèrent.

3) Le cas des angles égaux

L'étude de figures, simples ou complexes, comportant des axes de symétrie permet d'établir, par pliage et superposition, que des angles symétriques sont égaux.

Donc le fait de savoir qu'une figure est symétrique, par exemple comme représentant un objet symétrique (cerf volant, charpente, ...), permet, sans instruments, sans mesures, de savoir que des angles sont égaux. On peut ainsi à partir d'une propriété connue de la figure (existence d'un axe de symétrie) trouver d'autres propriétés de la figure (égalité d'angles et de longueurs) : c'est une façon simple d'entrer dans la démarche déductive des mathématiques.

4) Angle droit, aigu, obtus

La notion de perpendiculaire et d'angle droit découle de l'intersection de deux droites formant entre elles 4 angles égaux (c'est la définition d'Euclide) : ces angles sont appelés des angles droits. Ce n'est pas l'équerre qui définit l'angle droit (ou la perpendiculaire), mais c'est la définition de l'angle droit qui permet de construire l'équerre, qui en retour permet de tracer des angles droits.

- Comment fabriquer des angles droits ?

Le moyen le plus simple est de plier une feuille, puis de la replier sur le pli (voir le compte rendu du *parcours pliage* dans la partie 4) : les deux plis forment deux droites se coupant selon 4 angles égaux (superposables par pliage). C'est un moyen facile de se fabriquer une équerre.

Un autre moyen est de construire une figure symétrique, par exemple un losange (avec un segment et deux arcs de cercle de même rayon), ou un cerf-volant : les diagonales se coupent en formant des couples d'angles symétriques donc égaux.

- Comment comparer un angle à un angle droit ?

Si on limite, dans un premier temps, l'ouverture de l'angle à celle d'un angle plat (l'ouverture maximale du bras ou de la jambe, voir la rubrique *Écologie* de la partie 6 *Ressources*), les 2 côtés de l'angle devenant 2 demi-droites opposées, nous venons de voir que l'angle droit (1/4 de tour) correspond à un demi-angle plat (ouverture moitié). Un classement simple peut alors se faire : plus petit ou plus grand qu'un angle droit, aigu ou obtus. L'utilisation de l'équerre, qui est un gabarit de l'angle droit, permet de décider.

Si l'on arrive à voir mentalement l'angle droit ou la perpendiculaire, on a alors un moyen de discriminer mentalement angle aigu et obtus.

Des situations :

- angle de tir au rugby,
- équerres, cerf-volant, cric, charpente, puzzles, angles sur plan/angle dans la réalité, logos, lettres...

Connaissances et compétences :

- ouverture, écart, superposition, angle droit, aigu, obtus, codage, symétrie axiale, axes de symétrie, cerf-volant, losange, triangle isocèle, programmes de construction,
- gabarit, calque, fausse équerre, compas,
- comparer des angles, identifier des angles égaux, aigus, obtus, reporter un angle, des longueurs égales, identifier des figures symétriques, reproduire un angle égal à un angle donné, reproduire des objets, des figures, utiliser la symétrie axiale pour construire des figures.

3. Ajouter des angles

Comment ajouter des angles ?

Cet angle est-il 3 fois plus grand que celui-là ? Ces 2 angles peuvent-ils faire un angle droit ? Comment peut-on savoir que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits ?

1) Comparer un angle par rapport à un angle plus petit

Nous savons maintenant dire qu'un angle est plus grand qu'un autre. Mais saurions-nous dire s'il est un peu plus de 3 fois plus grand, ou un peu moins de 4 fois plus grand ?

Un moyen de le dire est de représenter les deux angles comme on l'a fait pour la comparaison : avec un sommet commun, un côté commun, et le deuxième côté du plus petit à l'intérieur du plus grand. Dans l'angle restant, peut-on reporter à nouveau le petit angle côté à côté 1 fois ? 2 fois ? Les ouvertures du petit angle s'ajoutent jusqu'à dépasser celle du grand angle. Ce faisant, nous avons ajouté des angles. On peut alors parler de multiples d'un angle : double, triple... On est en train d'arithmétiser la grandeur *Angle* (Voir Barbin, 2007, partie 7, annexe 6).

2) Angles adjacents

L'observation de figures polygonales où sont tracés axes de symétrie ou diagonales montre des angles qui en ajoutant leurs ouvertures forment un angle plus grand, ou un angle partagé en plusieurs angles dont la somme des ouvertures donne l'ouverture de l'angle de départ. Ces angles ont la particularité d'avoir le même sommet et un côté commun : on les appelle adjacents. Si des angles ont cette position particulière, on peut aisément définir leur somme et leur différence. On voit que dans cette situation il y a au moins 3 angles ayant le même sommet : on ne peut plus se contenter de nommer un angle par son sommet. Il va falloir faire intervenir les côtés. Le problème de la dénomination des angles se pose alors de façon cruciale. Comment faire ? Les élèves peuvent faire des propositions, en sachant que la tradition a retenu deux moyens : utiliser le nom d'un point sur chaque côté, ou mettre une lettre minuscule en bout de chaque demi-droite. On aura ainsi $\widehat{AOB}$ ou $x\widehat{O}y$.

3) Somme de deux angles

Peut-on définir la somme de 2 angles qui ne sont pas adjacents ? Par exemple la somme des 2 angles aigus d'un triangle rectangle. Il suffit de mettre les 2 angles côte à côte avec le même sommet, c'est-à-dire en position d'angles adjacents. Comment ? En reproduisant un des angles de la figure au bon endroit.

4) Le cas des angles égaux

Si une figure comporte plusieurs angles adjacents égaux, comme la spirale d'Archimède ou une tarte partagée en parts égales, alors on pourra parler d'angle double, triple..., et d'angle moitié, tiers..., comme on le fait avec l'addition répétée d'un nombre entier. Cela permet de travailler la notion de multiple et de fraction simple avec du visuel. On peut même faire des opérations simples et voir en situation des fractions équivalentes, égales.

On peut ajouter des angles grâce à la notion d'ouverture. On met ainsi en place des opérations sur les angles qui vont permettre de définir la mesure d'un angle. C'est ce qui a été amorcé dans le premier paragraphe : il suffirait de choisir le petit angle comme unité. On peut déjà à ce stade prendre l'angle droit pour unité et compter en angles droits (D) dans des situations simples :

- angle plein = 4 D
- un angle plat = 2 D,
- un angle aigu d'un triangle rectangle isocèle (demi carré) = $\frac{1}{2}$ D,
- somme des angles aigus d'un triangle rectangle (demi rectangle) = 1 D,
- un angle d'un triangle équilatéral = $\frac{1}{3}$ (2 D) = $\frac{2}{3}$ D,
- somme des angles de l'hexagone régulier = 4 (2D) = 8 D, ou 6 ($2 \times \frac{2}{3}$ D) = 8 D.

Dans ces situations on peut aussi s'initier à du calcul avec quelques fractions simples.

Des situations :

- éventail, spirale d'Archimède, escalier hélicoïdal vu de dessus, théâtres grecs ou romains, ...
- cerf-volant, puzzles, ...

Connaissances et compétences :

- angles adjacents, somme et différence de deux angles, multiple et fraction d'un angle, triangle équilatéral, angle plat, égalité de fractions,
- fausse équerre, compas,
- reporter un angle, reproduire un angle égal à un angle donné, reproduire des objets, des figures, ajouter des fractions simples.

4. Partager des angles

Comment partager un angle ?

Peut-on partager un angle en 2 angles égaux ? En 3 angles égaux ? ...

Construire un angle 3 fois plus grand qu'un angle donné est maintenant chose facile. On pourrait penser que l'opération inverse, partager un angle en 3 angles égaux l'est aussi. Mais ce n'est pas le cas. Ce problème est même impossible à la règle et au compas. C'est le célèbre problème de la trisection de l'angle qui nous vient de l'Antiquité grecque. On a le même problème avec les nombres entiers : la multiplication (addition répétée) est facile, alors que la division tombe rarement juste !

Nous allons nous centrer sur le problème le plus simple : partager un angle en deux angles égaux, opération qui, répétée, permet le partage en 4, puis en 8, 16, 32 ... Nous abordons ainsi une méthode très puissante qu'utilisent les mathématiciens : la dichotomie. Elle permet souvent d'approcher une solution exacte avec la précision souhaitée. C'est ainsi

qu'Archimède a calculé le périmètre du cercle. Elle peut se pratiquer en pliant une feuille (voir le compte rendu du *parcours pliage* dans la partie 4).

En fait, nous avons déjà rencontré le partage d'un angle en 2 angles égaux, lors de l'étude du cerf-volant et du losange, par pliage et tracé de leurs axes de symétrie. Nous en déduisons deux méthodes pour réaliser ce partage :

- le pliage qui superpose les 2 côtés de l'angle : le pli est un axe de symétrie pour l'angle ; on l'appelle la bissectrice de l'angle (bi-sectrice : qui coupe en deux),
- la construction au compas et à la règle d'un losange (ou d'un cerf-volant) à l'intérieur de l'angle à partager : l'axe de symétrie de ce losange est la bissectrice de l'angle ; le losange est devenu un moyen pour tracer la bissectrice : il peut être transformé en un outil pour tracer bissectrices, perpendiculaires, axes de symétrie (voir la rubrique *Instruments et expériences pour la classe* dans la partie 6 *Ressources*).

À partir d'un cercle, la bisection répétée de l'angle plein permet de construire le carré, l'octogone régulier, convexe ou étoilé, des roses des vents. À partir de là peut se greffer un travail sur les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... On peut remarquer que ce partage de l'angle plein en 16 ou 32 angles égaux (ou même plus : une élève a réalisé un partage en 256 ! Voir le compte rendu du *parcours pliage* dans la partie 4) est la réalisation d'un mesureur d'angle (rapporteur) dont l'unité est la seizième ou trente-deuxième partie de l'angle plein.

On peut s'arrêter là, ou aller un peu plus loin en proposant le partage d'un angle en 3 angles égaux. À partir d'un cercle, la construction d'une rosace permet de voir que l'angle du triangle équilatéral est le tiers de l'angle plat, et que sa bisection réalise la trisection de l'angle droit. Si l'on part d'un angle quelconque, on a une bonne activité de recherche pour les élèves. C'est l'occasion de travailler l'argumentation, la notion de construction approchée et de précision d'une construction. Ce peut être aussi un moment de culture mathématique et historique en parlant du problème de la trisection de l'angle, et en montrant (ou faisant étudier) des trisecteurs. Voir que le partage en 3, 5, ... n'est pas évident à réaliser, alors que l'on conçoit bien que le tiers, le cinquième de l'angle existe, permettra d'apprécier les nouvelles possibilités que va apporter la mesure.

Des situations :

- rose des vents, ...
- trisection de l'angle, trisecteurs, ...

Connaissances et compétences :

- bissectrice, axe de symétrie, fraction d'un angle, égalité de fractions,
- pliage, fausse équerre, compas,
- construire la bissectrice d'un angle, partager un angle en deux angles égaux.

5. Mesurer les angles

Comment mesurer un angle ?

Combien mesure un angle ?

Nous avons maintenant tous les éléments pour mettre en place une mesure des angles : choix d'un angle unité, fraction d'un angle de référence (droit, plat, ou mieux plein si l'on veut expliquer l'origine du 360°), égalité de l'angle à mesurer avec un multiple de l'angle unité.

L'instrument pour réaliser cette mesure, le rapporteur, apparaît alors comme la réalisation concrète du partage de l'angle plein en 360 parties que l'on viendra superposer sur l'angle à mesurer, comme l'on superposait les angles pour les comparer : il s'agit ici toujours de comparer l'angle avec un multiple de l'angle choisi pour unité. Si la mesure ne tombe pas

juste, on divise l'angle unité ... La construction des nombres se fait conjointement avec le problème de la mesure, au fur et à mesure des besoins de précision.

Rapporteur et mesure vont nous procurer de nouvelles techniques pour comparer les angles, les partager, et construire les figures. La construction des polygones réguliers, à partir d'un cercle et du partage de l'angle plein de sommet son centre, permet de travailler la division euclidienne, la notion de valeur exacte et approchée, d'arrêter la division en fonction de la précision désirée pour l'heptagone, de se questionner sur la richesse en diviseurs de 360 ...

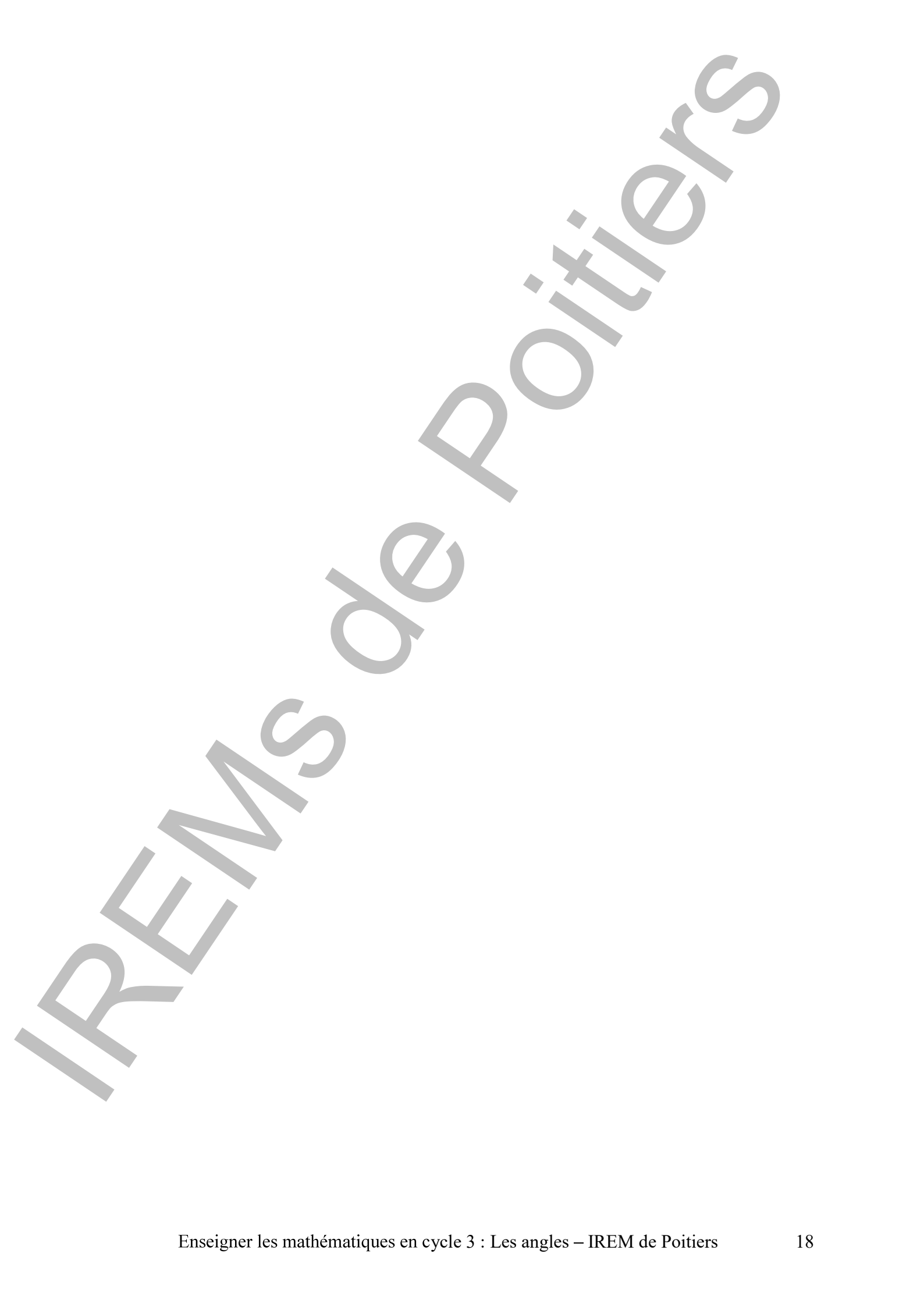
La mesure permet de répondre autrement aux deux grandes questions : Comment comparer ? Comment partager ? Elle permet donc de résoudre autrement les anciens problèmes, d'améliorer certaines solutions (par exemple, le passage de la rose des vents au compas de navigation), de donner des solutions aux problèmes qui n'en avaient pas forcément (par exemple, la trisection de l'angle, la construction des polygones réguliers), de résoudre de nouveaux problèmes (par exemple le calcul de distances inaccessibles).

Des situations :

- plan de navigation, de vol, déplacement de robots, trouver des distances inaccessibles, ...
- construction de polygones réguliers, de constellations, partage du cercle en parts égales (éoliennes, moulins, roues, jantes, partageurs de fruits, de tartes...), ...

Connaissances et compétences :

- mesure des angles en degrés, valeurs remarquables (30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 180° , 360°) associées à des angles ou figures remarquables, valeur exacte/valeur approchée, division euclidienne, fraction d'un nombre, fractions égales, programme de construction,
- utiliser un rapporteur pour mesurer un angle, pour construire un angle de mesure donnée, construire des figures à partir d'angles et de longueurs donnés, utiliser un logiciel de géométrie ou Scratch pour construire des figures, partager un angle en parts égales.



La couverture du programme

À travers les questions abordées, il s'avère que les différentes parties du programme vont être étudiées dans cette grandeur. En effet, il est impossible de dissocier les angles d'autres notions géométriques telles que la symétrie axiale, les figures géométriques planes (triangles, quadrilatères, cercles), le repérage pour décrire des déplacements, mais également la proportionnalité pour les effets d'agrandissement ou de réductions de figures. Du côté numérique, les questions ajouter et partager les angles mettent en œuvre les notions de multiple et de fraction de façon contextualisée. Le passage à la mesure pourra faire travailler la division euclidienne et décimale, ainsi que les fractions d'un nombre. Toutes ces notions seront abordées conjointement au cours de l'étude des angles, et tout au long des années du cycle 3. C'est un des intérêts de notre démarche de ne pas morceler le savoir à enseigner, et de l'acquérir dans un contexte où les notions interagissent et prennent du sens.

Pour avoir une vision synoptique des connaissances et compétences du programme qui peuvent être travaillées en construisant la grandeur *Angle* et sa mesure, nous les avons surlignées dans les différentes parties du programme. Cela montre clairement que l'on peut traiter ainsi tout ce qui concerne les angles dans la partie 2 du programme (*Grandeurs et mesures*), et la quasi-totalité de la géométrie plane de la partie 3 du programme (*Espace et géométrie*).

PROGRAMME – Cycle 3

Nombres et calculs

Attendus de fin de cycle

- Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux.
- Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux.
- Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

Connaissances et compétences associées

Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.

- Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations.

Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).

Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

Comprendre et utiliser la notion de fractions simples.

- Écritures fractionnaires.
- Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions).

Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.

- Une première extension de la relation d'ordre.

Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.

Établir des égalités entre des fractions simples.

Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal.

- Spécificités des nombres décimaux.

Associer diverses désignations d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule et décompositions).

- Règles et fonctionnement des systèmes de numération dans le champ des nombres décimaux, relations entre unités de numération (point de vue décimal), valeurs des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal (point de vue positionnel).

Repérer et placer des décimaux sur une demi-droite graduée adaptée.

Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres décimaux.

- Ordre sur les nombres décimaux.

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul.

Élaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.

Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.

- Addition, soustraction, multiplication, division.

- Propriétés des opérations :

$$2+9 = 9+2 \quad 3 \times 5 \times 2 = 3 \times 10 \quad 5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$$

- Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs.
- Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant.
- Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).

Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.

Calcul en ligne : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.

- Règles d'usage des parenthèses.

Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.

- Techniques opératoires de calcul (dans le cas de la division, on se limite à diviser par un entier).

Calcul instrumenté : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

- Fonctions de base d'une calculatrice.

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.

- Sens des opérations.
- Problèmes relevant :
 - des structures additives ;
 - des structures multiplicatives.

Organisation et gestion de données.

Prélever des données numériques à partir de supports variés. Produire des tableaux, diagrammes et graphiques organisant des données numériques.

Exploiter et communiquer des résultats de mesures.

- Représentations usuelles :
 - tableaux (en deux ou plusieurs colonnes, à double entrée) ;
 - diagrammes en bâtons, circulaires ou semi-circulaires ;
 - graphiques cartésiens.

Proportionnalité.

- Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.

Grandeurs et mesures

Attendus de fin de cycle

- Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle.
- Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

Connaissances et compétences associées

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle

Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.

Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure.

Mesurer des périmètres en reportant des unités et des fractions d'unités, ou en utilisant une formule.

- Notion de longueur : cas particulier du périmètre.
- Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle.
- Formule de la longueur d'un cercle.
- Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération (grands nombres, nombres décimaux).

Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure.

Différencier aire et périmètre d'une surface.

Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.

Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures.

- Unités usuelles d'aire : multiples et sous-multiples du m^2 et leurs relations, are et hectare.
- Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.

Relier les unités de volume et de contenance.

Estimer la mesure d'un volume par différentes procédures.

- Unités usuelles de contenance (multiples et sous-multiples du litre).
- Unités usuelles de volume (cm^3 , dm^3 , m^3), relations entre les unités.

Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités ou en utilisant une formule.

- Formule du volume d'un cube, d'un pavé droit.

Identifier des angles dans une figure géométrique.

Comparer des angles.

Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.

Reconnaître qu'un angle est droit, aigu ou obtus. Estimer la mesure d'un angle.

Estimer et vérifier qu'un angle est droit, aigu ou obtus.

Utiliser un instrument de mesure (le rapporteur) et une unité de mesure (le degré) pour :

- déterminer la mesure en degré d'un angle,
- construire un angle de mesure donnée en degrés.
- Notion d'angle.
- Lexique associé aux angles : angle droit, aigu, obtus.
- Mesure en degré d'un angle.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

Résoudre des problèmes de comparaison avec et sans recours à la mesure.

Résoudre des problèmes dont la résolution mobilise simultanément des unités différentes de mesure et/ou des conversions.

Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.

Formules donnant

- le périmètre d'un carré, d'un rectangle,
- la longueur d'un cercle,
- l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque,
- le volume d'un cube, d'un pavé droit.

Calculer la durée écoulée entre deux instants donnés.

Déterminer un instant à partir de la connaissance d'un instant et d'une durée.

- Unités de mesures usuelles : jour, semaine, heure, minute, seconde, dixième de seconde, mois, année, siècle, millénaire.

Proportionnalité

Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs.

Graphiques représentant des variations entre deux grandeurs.

Espace et géométrie

Attendus de fin de cycle

- (Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations.
- Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire des figures et solides usuels.
- Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques (notions d'alignement, d'appartenance, de perpendicularité, de parallélisme, d'égalité de longueurs, d'égalité d'angle, de distance entre deux points, de symétrie, d'agrandissement et de réduction).

Connaissances et compétences associées

(Se) repérer et (se) déplacer dans l'espace en utilisant ou en élaborant des représentations

Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte.

Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers.

Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran.

- Vocabulaire permettant de définir des positions et des déplacements.
- Divers modes de représentation de l'espace.

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques

Reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire :

- des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples)

- des solides simples ou des assemblages de solides simples

à partir de certaines de leurs propriétés.

- Figures planes et solides, premières caractérisations :

- triangles dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral)

- quadrilatères dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme)

cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné).

- Vocabulaire approprié pour nommer les solides : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône, boule.

Reproduire, représenter, construire :

- des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples)

• des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit).

Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction.

Réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel.

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

Effectuer des tracés correspondant à des relations de perpendicularité ou de parallélisme de droites et de segments.

Déterminer le plus court chemin entre deux points (en lien avec la notion d'alignement).

Déterminer le plus court chemin entre un point et une droite ou entre deux droites parallèles (en lien avec la perpendicularité).

- Alignement, appartenance.
- Perpendicularité, parallélisme (construction de droites parallèles, lien avec la propriété reliant droites parallèles et perpendiculaires).
- Égalité de longueurs.
- Égalité d'angles.
- Distance entre deux points, entre un point et une droite.

Compléter une figure par symétrie axiale.

Construire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné que l'axe de symétrie coupe ou non la figure, construire le symétrique d'une droite, d'un segment, d'un point par rapport à un axe donné.

- Figure symétrique, axe de symétrie d'une figure, figures symétriques par rapport à un axe.

• Propriétés de conservation de la symétrie axiale.

- Médiatrice d'un segment.

Proportionnalité

Reproduire une figure en respectant une échelle.

- Agrandissement ou réduction d'une figure.

Éléments de réflexion

La place des angles dans la reproduction de figures et les constructions géométriques, les liens entre angles et cercle, l'importance de la validation de ce qui est dit et fait, voilà quelques thèmes que nous proposons à votre réflexion.

1. Reproduction de figures et constructions géométriques

La comparaison des angles, dans des situations riches, amène rapidement la nécessité du codage des angles et de leur dénomination.

La reproduction de figures à l'aide de reports d'angles et de longueurs à une échelle simple ($1/1$, $2/1$, $1/2$, $1/100$...) vise à faire comprendre à l'élève que les angles définissent la forme de la figure et donc sont invariants dans tout agrandissement-réduction d'une figure et que les longueurs définissent la taille de la figure.

L'utilisation des angles pour reproduire des figures permet une description simple de la stratégie de construction : on trace un côté, on trace un angle, on trace un côté..., qui débouche sur l'écriture simple de programmes de construction permettant d'expliquer le travail de construction. On en vient à (re)-découvrir l'arpentage par cheminement pour construire le contour ou une représentation du contour d'un objet, d'une cour d'école... Cela débouche naturellement sur la programmation des constructions de figures géométriques à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, ou d'un logiciel de programmation comme Geotortue ou Scratch.

Une chose importante à comprendre pour les élèves dans le chapitre *Angles* est que pour reproduire des figures polygonales il suffit d'utiliser ses angles et ses côtés (les angles donnent la forme de la figure et les côtés sa dimension). Si on utilise la procédure un côté, un angle, un côté..., pour terminer la construction, il faut relier 2 points et il y a donc 3 données de la figure à reproduire qui n'ont pas été utilisées : un côté et deux angles. S'assurer de l'égalité des figures avec ce côté et 2 angles égaux à ceux de la figure de départ (ou pour le côté au double si l'échelle est $2/1$) permet de vérifier que la construction est bien faite (on pourrait ne vérifier qu'une seule des 3 données). En fait on peut vérifier aussi tous les angles et tous les côtés, ce que font certains élèves. Pourquoi pas ? Cela dépend des outils utilisés. Des élèves se fabriquent parfois un calque de la figure donnée pour vérifier tous les angles (c'est ce que certains d'entre nous faisons avec des transparents pour contrôler les constructions des élèves...). Donc tout est possible, mais il semble important que les élèves prennent l'habitude de vérifier ce qu'ils font, de voir qu'en mathématique on peut savoir si ce qu'on a fait est juste (ce que font les artisans, les ingénieurs...), et qu'ils apprennent des techniques de vérification. Si on utilise un angle, un côté, un angle, on termine par l'intersection de 2 demi-droites et les 3 données non utilisées sont un angle et 2 côtés. Pratiquer ce type de vérification (ici 3 données non utilisées) permet de réaliser petit à petit le nombre de degrés de liberté d'une figure : pour construire un triangle 3 données (sur 6) suffisent, pour un quadrilatère 5 (sur 8)... Les autres données leur sont liées rationnellement par des « lois » : ici essentiellement des formules de trigonométrie, mais pour les figures particulières par tous les théorèmes connus : Pythagore, Thalès, propriétés des figures, symétries... C'est tout ce corpus qui permet de calculer les éléments non donnés ou de démontrer que la construction satisfait bien aux conditions imposées.

Nous pouvons noter que le programme de construction, avec ses étapes ordonnées, est en fait un algorithme. Il fait partie de ce qu'on appelle l'« informatique débranchée » et peut servir d'initiation à un certain type de programmation.

Construire un triangle connaissant deux angles et un côté, ou deux côtés et un angle est le cas le plus simple de l'utilisation des angles pour reproduire des figures, mais il est fondamental.

La construction des polygones réguliers permet un réinvestissement des techniques vues. Elle est l'occasion, de surcroît, d'appréhender le cercle comme cas limite de polygones réguliers, et donc de préparer l'étude du périmètre et de l'aire du cercle.

2. Cercle et angles

Le cercle apparaît dans ce chapitre comme un paradigme des angles : il sous-tend la définition de l'angle comme ouverture, et est présent dans la construction de sa mesure (le partage du cercle en 360 degrés, d'où découle la conception du rapporteur). Il intervient dans le codage de l'angle par un arc de cercle. Il est doublement présent dans la reproduction d'un angle avec un compas : par l'arc de cercle marquant l'ouverture de l'angle, et par la corde de cet arc mesurant cette ouverture. Il est aussi sous-jacent dans l'utilisation du losange et du cerf-volant comme instruments de construction.

Il serait par ailleurs dommage de se priver de la notion d'angle plein si présente dans ce partage du cercle en parts égales et que l'on retrouve dans nombre d'objets, dont la reproduction est un bon sujet d'étude que nous valorisons.

3. La validation du faire et du dire

Dans le cours, tel que nous le concevons (voir la rubrique *Cours* dans la partie 3), énoncés et techniques sont justifiés, et on essaie de mettre l'accent sur leur enchaînement, visant ainsi à présenter un savoir structuré qui est une des caractéristiques fondamentales des mathématiques. Et cela peut se faire en utilisant un langage courant qui soit compréhensible des élèves.

Dans les travaux que nous faisons faire aux élèves (études, exercices, devoirs) les demandes de justifications et de vérifications sont omniprésentes : elles nous semblent fondamentales si l'on ne veut pas déroger à la nature du travail scientifique en général et mathématique en ce qui nous concerne. Il s'agit d'accéder petit à petit à une démarche rationnelle, et donc de prendre conscience des différents types de justification et des liens logiques qui existent entre les diverses propriétés rencontrées. Cette démarche participe des points 2 et 4 de la compétence *Raisonner* du programme du cycle 3.

L'idée fondamentale est qu'en mathématiques on explique ce que l'on fait. Un résultat, une figure sans explication ne sont pas valables. Par contre il y a de nombreuses façons d'expliquer. Il ne faut pas trop normaliser, surtout au début. Au lieu de dire aux élèves « Écris ton programme de construction », on peut leur dire « Explique comment tu as construit ta figure ». Certains verront rapidement qu'une explication sous forme de programme ou de calcul est souvent bien plus claire, rapide et performante.

3. Analyse didactique

Dans cette partie, vous trouverez des éléments pour organiser le déroulement de l'étude d'une bonne partie de la géométrie dans votre classe de CM1, CM2 ou 6^e, à partir de celle des angles. Nous avons aussi abordé le problème du cours, mémoire du parcours et des connaissances et méthodes qui ont été rencontrées et qui doivent être acquises. Dans une troisième partie nous insisterons sur l'importance de fournir pour les apprentissages des contextes riches et variés qu'il s'agisse des situations d'étude, de la manipulation d'outils, d'instruments, d'objets, mais aussi de travail mental et de dictées géométriques.

Le parcours d'étude des angles

Il s'agit ici de voir comment on peut organiser l'étude des *Angles* en cycle 3 à partir de 5 questions fondamentales et montrer des choix possibles. À partir de cette réflexion, les mises en œuvre peuvent être très différentes (voir des *exemples de déroulement* dans la partie 4) tout en conservant les traits essentiels. La notion de parcours que nous utilisons vise à rappeler qu'il ne s'agit pas d'un apprentissage morcelé d'un certain nombre de techniques, mais d'un cheminement où, de questions en réponses, on progresse dans la connaissance du sujet étudié, ici les angles, du CM1 à la 6^e.

Étude 1. Comment débiter ? La définition de l'angle (CM1)

L'angle étant une grandeur nouvelle à étudier au cycle 3, comment aborder la notion avec les élèves, comment gérer cette première rencontre ?

Proposition 1

Le mot angle étant utilisé dans le langage courant (angle de rue, angle de tir, angle de coupe...) et l'angle droit vu en cycle 2, on peut demander aux élèves s'ils savent ce qu'est un angle, s'ils peuvent en donner des exemples (dans la vie, dans la salle de classe...). À partir des propositions et des discussions qui peuvent s'engager, le professeur arbitre et retient les éléments qui permettent une ébauche de définition d'un angle.

Puis à partir d'images ou d'objets (voir la *banque de situations*, partie 5, et la rubrique *Écologie* de la partie 6 *Ressources*), on peut demander aux élèves d'identifier des angles, en les montrant ou en les dessinant. Il s'agit de se représenter petit à petit ce qu'est un angle. On est alors dans une phase d'appropriation liée à de la manipulation (utilisation de gestes, de dessins). On pourra en voir une mise en œuvre dans la partie 4.

On termine par une phase de verbalisation en demandant : *Qu'est-ce qu'un angle ?* Cela va déboucher sur une définition abstraite. On doit alors pouvoir, au moins dans un premier temps, s'entendre sur un énoncé du type : *un angle est formé de 2 côtés qui partent du même point.* (C'est l'angle objet géométrique : voir la question 1 dans la partie 2 *Analyse mathématique*).

Il faudra ensuite prendre conscience que les côtés sont des demi-droites. Cela pourra se faire dans des situations où :

- la longueur des côtés est infinie (angle de vision par exemple),
- on compare les angles de deux objets ayant la même forme (par exemple un petit triangle équilatéral et un grand triangle équilatéral, les pièces triangulaires d'un Tangram),
- on compare des angles, car alors on comprend que l'important, c'est l'ouverture des côtés et pas leur longueur tracée.

Enfin la définition de l'angle comme *ouverture formée par deux demi-droites de même origine* suppose d'avoir abordé des situations où les côtés pivotent autour d'un point (position des membres en gymnastique, ouverture des bras qui montrent l'angle de vue, ouverture d'une porte, d'un compas...), ou bien le problème de la grandeur de l'angle en se posant la question de la comparaison des angles : *Quel est l'angle le plus grand, le plus petit ?*

Donc, pour arriver à cette définition, il faudra faire le choix d'étudier quelques autres situations (voir la *banque de situations*, partie 5).

Proposition 2

On donne aux élèves une situation dans laquelle ils sont obligés de reproduire un écartement, une ouverture entre deux côtés issus d'un même point.

C'est le problème d'arpentage de Clairaut dont nous avons parlé dans l'introduction (voir le texte original dans la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*) : il lui faut reproduire un triangle dont on ne peut mesurer que deux côtés. Donc il faut arriver à faire pencher un côté sur l'autre comme ils penchent dans le triangle initial : il dit alors que c'est ce que les mathématiciens appellent un angle, et qu'il faut donner aux deux angles la même ouverture. Pour cela il utilise un instrument fait de deux règles qui tournent autour d'un point, et que l'on pose sur les deux côtés du triangle : c'est ce qu'on appelle une fausse équerre.

Suivant les objets et le contexte, on peut penser à décalquer l'angle, ou à construire un gabarit, ou à construire une fausse équerre. On peut remarquer que calque et gabarit sont à usage unique : pour reproduire un autre angle, il faudra un autre calque, un autre gabarit, alors que la fausse équerre permet de reproduire n'importe quel angle. C'est l'outil, facile à fabriquer, que nous privilégions (voir le paragraphe suivant et la rubrique *Instruments et expériences pour la classe* de la partie 6 *Ressources*).

Des exemples de situations pour mettre en œuvre ce type de rencontre avec la notion d'angle sont fournis dans la *banque de situations* de la partie 5. En voici trois : « *Jaune, Rouge, Bleu* » de Vassily Kandinsky, *Faire un plan : arpentage par cheminement*, *Angle de tir et terrain de rugby*.

Pour la première et la troisième de ces situations, vous trouverez un compte rendu d'expérimentation en classe dans la partie 4 (*Mise en œuvre dans la classe*).

On voit qu'un tel type de situation oblige à la fois à *définir un angle* et à trouver un moyen pour *reproduire un angle*. Donc à la fin de l'étude, la structuration des connaissances portera sur :

- la définition de l'angle comme *ouverture entre deux côtés qui partent du même point*,
- la définition de l'égalité des angles déduite de la définition : *même ouverture*,
- des méthodes pour reproduire un angle : calque, gabarit, fausse équerre.

Pour bien ancrer cette définition de l'angle on peut, avant de passer à l'étude 2, faire étudier d'autres situations permettant d'*identifier des angles* dans des contextes variés et différents de celui de l'étude faite (voir la *banque de situations* de la partie 5).

Bilan

Dans les deux cas on voit que l'étude 1 porte sur la première question de notre parcours : *Comment définir un angle ?* Elle débouche sur une définition abstraite de l'angle sur laquelle on va pouvoir s'appuyer pour continuer à travailler sur les angles.

Pour ce qui est de la notation des angles, elle ne devrait pas être introduite d'emblée mais quand sa nécessité se fera sentir. La transcription de l'oral est une première étape (voir à ce propos l'histoire de la notation des angles à la fin de l'article *L'angle un concept ambivalent* dans la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*).

On voit, dans les deux propositions, que des éléments de notre deuxième question *Comment comparer des angles ?* ont aussi été abordés. Et c'est normal car les questions interagissent souvent quand elles sont étudiées à partir de situations.

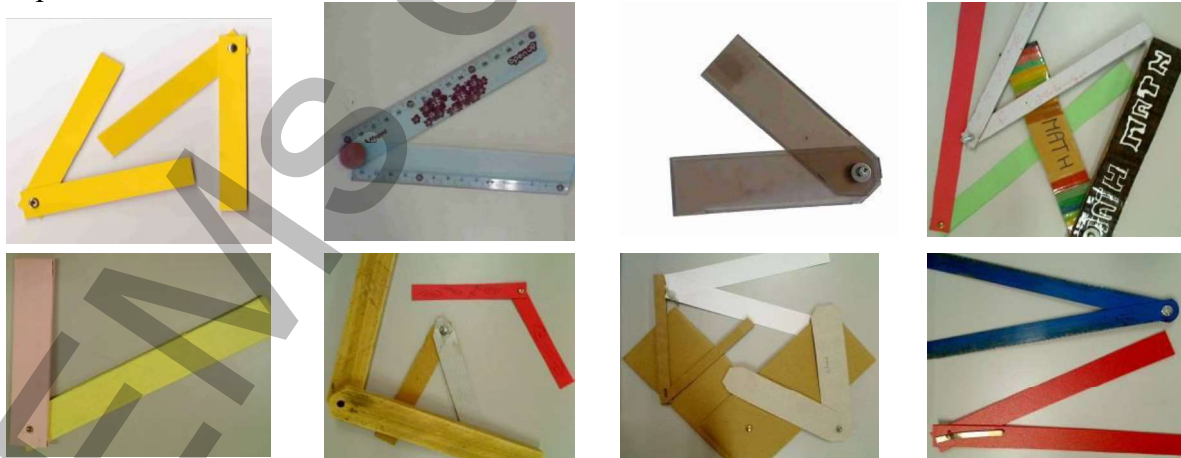
Étude 2. L'angle comme grandeur. La comparaison, le report et la reproduction d'objets et de figures (CM1/CM2)

La définition de l'angle élaborée dans l'étude 1 va permettre de dire qu'un angle est plus grand qu'un autre, et que deux angles sont égaux quand ils ont la même grandeur. Elle se matérialise par un outil (la fausse équerre) qui permet le report des angles, c'est-à-dire la construction d'un angle égal à un angle donné, et, à partir de là, la reproduction de figures, mais aussi d'objets ; c'est un sujet trop souvent négligé, bien que très vivant dans la vie des hommes : bricolage, artisanat, industrie. On a tout à gagner à ne pas couper l'enseignement des mathématiques de la société, comme le préconise Yves Chevallard (voir l'annexe 6).

Comment mettre en œuvre cela dans la classe ?

1) On peut commencer par présenter aux élèves des fausses équerres professionnelles, et leur demander à quoi peut servir cet instrument, quels métiers les utilisent. À partir des propositions des élèves, le professeur peut ainsi revenir sur la notion d'angle et sa définition, et montrer que cet outil est la matérialisation de la définition d'un angle. Si l'on est en CM2, cela permettra au professeur de prendre la mesure du degré d'acquisition de la notion d'angle, et, sans révisions, de revenir au cours de l'étude 2 sur la définition de l'angle.

On peut fournir alors aux élèves une fausse équerre (première photo) : l'IREM en propose à la vente (voir la rubrique *Instruments et expériences pour la classe* de la partie 6 *Ressources*). On peut aussi leur demander d'en fabriquer chez eux (voir les photos ci-après). C'est une expérience intéressante à mener : les élèves utilisent des matériaux variés (plastique, carton, métal), des articulations variées (vis-écrou, vis papillon, attache parisienne), en recyclant règles ou objets divers, ne donnant pas forcément la même longueur aux deux branches de l'instrument, montrant par là qu'ils ont bien saisi que c'est la notion d'ouverture qui est importante.



Cela amène souvent les élèves à demander de l'aide aux parents, ce qui enclenche dans les familles un intérêt pour les mathématiques que font leurs enfants. À cette occasion nous avons eu un parent menuisier qui a fabriqué pour la classe, une grande fausse équerre en bois. L'utilisation de leur propre fausse équerre leur montre les problèmes qui se posent pour fabriquer un tel instrument : rigidité, serrage. Une fois encore les mathématiques restent en prise avec la vie : elles créent un instrument, mais il faut arriver à le réaliser concrètement, et il est bon, pour les élèves, de voir les problèmes rencontrés et d'essayer de les résoudre.

2) L'objectif de notre étude est de pouvoir répondre à la question *Comment comparer des angles ?* Pour cela nous proposons de comparer les angles de divers objets réels ou d'images de ces objets, et de repérer les angles égaux. Dans l'étude 1 ont été utilisées des situations pour identifier des angles : elles peuvent être reprises pour les comparer. Mais on peut choisir d'étudier divers objets comme des cerfs-volants, crics, charpentes, ou les pièces d'un

Tangram (voir la *banque de situations* de la partie 5) ; cela permet de travailler en même temps sur les figures du programme de géométrie, et sur la symétrie axiale. Montrons comment peut se mener l'étude sur un exemple.

a) *Étude d'un objet : le cerf-volant*

À partir d'une image de cerf-volant, on demande aux élèves de marquer sur l'image les angles et les côtés égaux, et d'expliquer pourquoi ils sont égaux. C'est une phase d'analyse de l'objet qui va permettre d'en découvrir des propriétés. On peut remarquer que la position inclinée du cerf-volant (variable importante) rend peu manifeste l'existence d'un axe de symétrie, ce qui se confirme en classe. On voit que si l'on étudiait en classe un vrai cerf-volant (qu'un élève aurait amené), la donne serait différente car l'axe de symétrie existe comme élément du squelette de l'objet.



Les élèves identifient 2 angles égaux sur 2 sommets opposés en utilisant la fausse équerre ou le papier calque.

Ils vérifient que les 2 autres angles opposés ne sont pas égaux. On peut alors leur demander : des 4 angles, quel est le plus grand et pourquoi ? On peut aussi leur demander de classer les 4 angles par exemple du plus grand au plus petit, ou de comparer ces angles à l'angle droit qu'il connait. En prenant l'angle droit comme référence on peut introduire la définition d'un angle aigu et d'un angle obtus.

Le décalque de la figure entière par tous les élèves permet de trouver par pliage un axe de symétrie à la figure, et d'avoir ainsi une nouvelle méthode pour justifier que 2 angles sont égaux dans une figure ayant un axe de symétrie. Le pliage fait aussi découvrir le partage du grand angle et du petit angle en deux angles égaux : pliage implique superposition, superposition implique même ouverture. On voit ainsi comment on peut établir de façon très simple, en utilisant des manipulations, le théorème : deux angles symétriques sont égaux. Ainsi, nous faisons des mathématiques avec des choses très simples.

Cette étude est l'occasion de revoir le codage des longueurs égales et d'apprendre celui pour les angles. Par contre la notation des angles n'est pas une obligation.

Bilan de l'étude :

- deux angles sont égaux s'ils ont la même ouverture
- deux angles sont égaux s'ils sont superposables (car ils ont alors la même ouverture)
- un angle est plus grand qu'un autre si son ouverture est plus grande
- un angle plus petit qu'un angle droit est appelé un angle aigu, plus grand il est appelé un angle obtus
- si en pliant une figure les deux parties se superposent, on dit que la droite de pliage est un axe de symétrie, et que les deux parties sont symétriques.

Ce sont les connaissances nécessaires pour comparer des angles.

On peut en réaliser la trace écrite sous forme de cours, mais on peut attendre d'avoir fait d'autres études, liées à d'autres figures comme le losange (voir la *banque de situations* de la partie 5), avec le même type de questionnement, pour écrire le cours.

Vous trouverez un compte rendu d'expérimentation en classe de cette étude sur le cerf-volant dans la partie 4 (*Mise en œuvre dans la classe*).

Pour permettre l'appropriation des connaissances découvertes dans cette étude sur le cerf-volant, il sera utile, comme on vient de le dire, de faire étudier d'autres situations analogues, mais dans des contextes différents (voir la *banque de situations* de la partie 5).

b) *Le cerf-volant : reproduire l'objet*

Toujours avec le cerf-volant, on peut poser aux élèves le problème de sa reproduction. Les connaissances acquises sur les angles et le cerf-volant vont pouvoir être utilisées pour le reproduire. On pourrait même à partir de là envisager sa construction. Vous pouvez en lire un compte rendu en classe, en lisant dans son intégralité le compte-rendu signalé ci-dessus.

Les méthodes pour reproduire le cerf-volant sont nombreuses, suivant que l'élève utilise ou non l'axe de symétrie. Si on utilise l'axe de symétrie et la deuxième diagonale, on peut ne pas reporter d'angle. Le professeur peut alors imposer de ne pas utiliser cette diagonale, d'utiliser ou pas l'axe de symétrie.

Voici quelques méthodes :

- par cheminement (comme en arpentage, ou pour la tortue Logo) : 1 angle, 1 côté, 1 angle, 1 côté, 1 angle ; ou bien : 1 côté, 1 angle, 1 côté, 1 angle, 1 côté
- avec les angles opposés : un des angles égaux et ses côtés, l'axe de symétrie (qui joint les extrémités des côtés), le symétrique du sommet du premier angle (cela suppose de voir en classe comment on fait pour reproduire une figure par symétrie).
- avec l'axe de symétrie : l'axe de symétrie et les 2 sommets qui sont sur lui, 1 demi-angle et son côté, puis l'autre.

On voit que dans les trois cas pour construire un angle, il faut prendre l'ouverture sur le dessin puis reporter cette ouverture pour avoir un angle égal. On peut le faire avec la fausse équerre, avec un calque, ou en construisant des gabarits. L'inconvénient des gabarits c'est qu'il faut en construire un pour chaque angle. Par contre c'est une technique qui serait rapide pour tracer de nombreux angles égaux (voir l'étude 3). On peut se fixer comme objectif de base que tout élève arrive à faire sa construction quelque soit l'outil qu'il utilise. Utiliser du calque ou des gabarits suppose que l'élève ait son matériel ou que le professeur le lui fournisse (mais comment fera-t-il chez lui ou en aide aux devoirs s'il veut réaliser de telles constructions ?). De plus ces méthodes créent des déchets. On peut donc vouloir qu'à terme tous les élèves possèdent et utilisent une fausse équerre, tout en sachant qu'il est bon de connaître plusieurs méthodes pour affronter les problèmes. Pour les élèves les plus rapides on peut leur faire découvrir la méthode avec le compas, ou la leur faire chercher.

Pour le report de longueurs, les élèves ont le choix du compas, ou de la règle graduée. Par analogie avec le report des angles qui se fait sans mesure (au moins jusqu'en 6°), il pourrait être intéressant dans ces situations de reproduction de faire utiliser le compas (voir un peu plus loin, le paragraphe 2 consacré aux instruments dans la rubrique *Les contextes d'apprentissage*).

Ce travail de reproduction de figures peut déboucher sur l'écriture de programmes de construction obligeant à désigner les points de la figure et donc à utiliser des notations pour les angles. Elle peut déboucher aussi sur la réalisation de l'image du cerf-volant sur un écran d'ordinateur, soit en utilisant un logiciel de construction géométrique (Geoplan, Cabri, Carmetal, Geogebra) ou de programmation (Geotortue, Scratch).

Bilan de l'étude :

- outils et méthodes pour reproduire un angle égal à un angle donné
- méthode pour construire une figure symétrique.

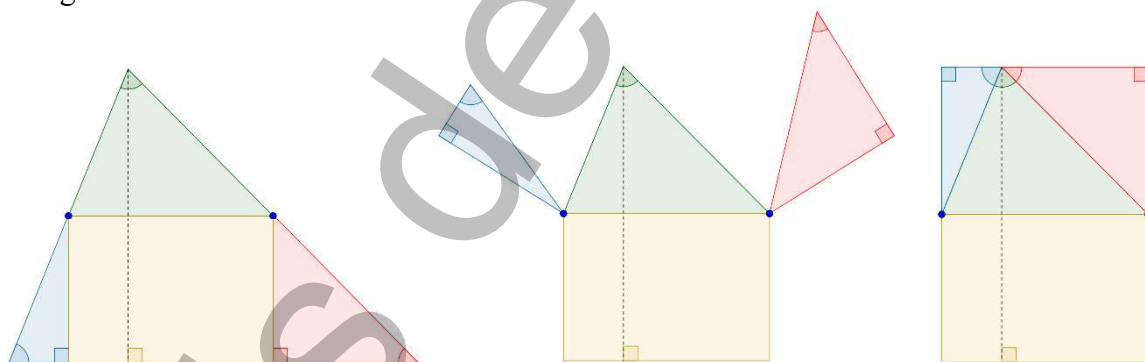
La comparaison des angles dans l'étude d'objets tels que cerf-volant, cric, charpente, est l'occasion de parler de symétrie axiale et d'utiliser cette symétrie à la fois pour comparer des angles et pour construire des figures symétriques : angles égaux, symétrie axiale, figures au programme, programmes de construction et codages des angles, trouvent ainsi une place naturelle dans notre étude. Tout comme l'utilisation de logiciels de construction géométrique ou de programmation permettant de réaliser les figures ou objets étudiés sur écran.

On pourrait aussi envisager des reproductions d'objets. Par exemple fabriquer les pièces d'un jeu comme le Tangram (en carton, en plastique, en bois) et créer des liens avec certains métiers, avec certaines personnes.

On voit donc que l'étude des angles en tant que grandeur peut être une très bonne entrée pour l'étude de la géométrie au programme de cycle 3. Et à travers cette étude, la notion d'angle se construit progressivement dans le contexte qui est le sien : celui de la géométrie des figures en lien avec les objets et l'environnement des hommes d'hier et d'aujourd'hui.

Étude 3. Rendre calculable la grandeur. L'addition des angles (CM2/6^e)

Le fait que l'on puisse parler de la somme des angles d'un triangle, et dire qu'elle est égale à un angle plat, ou à deux angles droits, ou à 180° , suppose que l'on ait défini une addition des angles, qui figure dans le programme actuel du cycle 3 mais ne figurait pas dans les programmes précédents. Pour pouvoir ajouter les ouvertures de deux angles, il va falloir les mettre côte à côte avec même sommet : d'où l'importance de la notion d'angles adjacents. Mettre 2 angles dans la position d'angles adjacents, n'est pas difficile avec ce que nous avons appris dans l'étude 2 : grâce à la fausse équerre (ou à un gabarit), on peut transporter un angle où l'on veut, et donc construire un angle égal à un angle donné à côté de n'importe quel angle. Regardez ce puzzle articulé (Voir *Maths & Puzzles*, partie 6, *Bibliographie*) qui rend adjacents les 3 angles d'un triangle, et prouve le théorème sur la somme des angles du triangle :



On trouve des angles adjacents dans les bandes colorées de certains cerf-volants, dans de nombreux puzzles (tangram, stomachion, ... : voir le catalogue de l'exposition *Maths & Puzzles* déjà cité). Pour travailler en classe sur les angles adjacents et leur somme, vous pouvez faire étudier à vos élèves quelques-uns des objets cités (que vous retrouverez dans la banque de situations). On peut aussi proposer aux élèves de manipuler des pièces de puzzles pour réaliser des angles droits et des alignements. La réalisation de figures avec un puzzle passe souvent par une bonne connaissance des pièces du puzzle qui permettent de réaliser un angle droit ou un angle plat (alignement).

Comme dans l'étude 2, on peut envisager deux temps, à séparer ou enchaîner, pour l'étude de chaque objet ou figure choisis : son analyse et sa reproduction.

Prenons un exemple.

a) *Étude d'un objet : le Tangram :*

À partir d'une photo d'un Tangram, on demande aux élèves de trouver des angles qui forment ensemble un angle droit. On en trouve 3 paires qui forment 3 des 4 angles droits du grand carré. Mais il y en a aussi une à l'intérieur du Tangram : il va être plus difficile de justifier qu'ils forment bien un angle droit, mais c'est l'occasion de mener un débat en classe et de vivre ce qu'est une argumentation mathématique, avec un langage simple. Par exemple on peut dire que l'angle qu'ils occupent est le même que celui du carré orange, car il faut 2 angles droits pour s'appuyer exactement sur le côté du triangle rouge (2 angles droits forment un angle plat). On pourrait aussi utiliser des considérations de symétrie (avec la diagonale du carré qui passe entre les deux grands triangles jaune et rouge). On pourra aussi remarquer, et faire justifier, que les 2 angles sont égaux à la moitié d'un angle droit. Une nouvelle fois, on anticipe sur l'étude suivante : la question du partage d'un angle. C'est la conséquence de l'étude de véritables situations et cela présente l'avantage de pouvoir s'y référer par la suite.



On demande ensuite aux élèves de trouver des angles qui forment ensemble un angle plat (alignement). On trouve 3 paires d'angles droits, 2 paires d'angles différents (l'angle obtus du parallélogramme et un angle aigu d'un demi carré), 2 triplets comportant un angle droit et 2 demi-angles droits. Pour justifier ces alignements on va utiliser la propriété des angles droits de donner un angle plat (c'est la définition de l'angle droit donnée par Euclide dans ses *Éléments* : définition 10). On va s'y ramener dans le cas des demi-angles droits. Par contre avec la figure bleue on va être gêné car on ne sait pas comment elle a été conçue, et donc quels sont ses angles. Et ce sont les alignements, prévus par le concepteur du puzzle, qui vont permettre aux élèves de les découvrir par différence, ce qui va permettre de parler de la différence de deux angles. Pour l'angle aigu de la pièce bleue c'est facile : $\frac{1}{2}$ angle droit. On a déjà vu qu'il en complétait un autre dans l'un des angles du Tangram. On a en acte une soustraction avec des fractions simples : $1 D - \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} D$, d'où $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Nous sommes en train d'« arithmétiser » la grandeur angle pour pouvoir faire des calculs sur elle (voir Barbin, 2007, dans l'annexe 6). Revenons à l'angle obtus de la pièce bleue : c'est l'angle qui ajouté à un demi-droit fait un angle plat. Donc il vaut 1 angle droit plus un demi-angle droit, ce que les Anglo-saxons écrivent $1 \frac{1}{2} D$. Connaissant la valeur des angles de la pièce bleue on peut justifier tous les alignements, et on peut même s'initier à le faire par un calcul. L'élève découvre ainsi des rudiments de calcul sur les fractions et la possibilité de calculer sur les angles.

Les angles peuvent donc s'ajouter (et se soustraire), mais à condition d'être côte à côte, ce qui sera l'objet du bilan (structuration des connaissances).

Bilan :

- définition des angles adjacents
- définition de la somme et de la différence de 2 angles
- 2 angles droits adjacents forment un angle plat.

Ce bilan pourra être formalisé sous forme de trace écrite (cours) après que ces 2 définitions auront été utilisées dans d'autres études de situations (voir la partie 5), ou après un travail mental (voir un peu plus loin, le paragraphe 3 consacré au travail mental dans la rubrique *Les contextes d'apprentissage*).

b) *Le Tangram : reproduire l'objet*

La reproduction du Tangram finalise le travail d'analyse fait précédemment qui peut déboucher ainsi sur une réalisation concrète, sur le faire.

Chaque élève choisit (ou se voit affecté) une, deux ou trois pièces à construire. La reproduction du parallélogramme peut-être imposée à tous. La répartition peut se faire au sein d'un travail de groupe. Il faut choisir la dimension du puzzle à réaliser : librement ou imposé par le professeur, par chaque groupe ou pour toute la classe. La mise en commun des pièces et la reconstitution du carré permettra une validation interne de la correction des constructions.

Ce travail de reproduction aura de grandes chances de faire travailler la reproduction des angles, en particulier pour le parallélogramme bleu. Elle devient incontournable si on travaille sur un puzzle tel que le stomachion (ou *loculus* d'Archimède).

Il est aussi possible de faire reproduire à chaque élève le Tangram sur du papier épais ou du carton, de le colorier et découper ; chacun a ainsi un jeu lui permettant de réaliser des formes classiques fournies par le professeur (voir le catalogue de l'exposition *Maths & Puzzles* déjà cité) ; on peut même envisager, dans le cadre d'un projet, une réalisation en bois ou en plastique découpable. Il y a plusieurs possibilités pour la mise en œuvre : soit on fournit à chaque élève une feuille avec l'image en vraie grandeur du puzzle, soit cette image est réduite et on demande de fabriquer un puzzle deux fois plus grand (ce qui permet de bien prendre conscience que les angles sont invariants dans un agrandissement), soit on fournit aux élèves seulement les dimensions du grand carré (ou on laisse choisir à chacun la dimension du carré), soit on leur fournit un vrai puzzle et on les laisse poser des questions et prendre des initiatives. Mais ce travail de reproduction, intéressant par bien des aspects (repérer des milieux et des diagonales, axes de symétrie du carré), ne fait pas intervenir de reproduction d'angles.

Il serait intéressant que chaque élève explique et justifie sa méthode. On voit qu'il y a là encore un travail mathématique assez simple mais riche.

c) Angles égaux : multiples et diviseurs

À partir de situations dans lesquelles tous les angles adjacents sont égaux (voir, dans la *Banque de situations*, l'éventail, la spirale d'Archimède, le théâtre d'Épidaure), on peut définir les multiples d'un angle (double triple, quadruple, ...) et les fractions qui leur correspondent (demi, tiers, quart, ...) ; cela permet alors de travailler de façon concrète sur des fractions que l'on peut ajouter, ou multiplier par un nombre. Vous trouverez un compte rendu d'expérimentation en classe de l'étude du théâtre d'Épidaure dans la partie 4 (*Mise en œuvre dans la classe*).

Étude 4. Vers la mesure : le partage des angles (CM2/6^e)

Les situations du paragraphe c) de l'étude précédente mettent en jeu l'addition répétée d'angles égaux, et l'angle somme est alors partagé en un certain nombre de parties égales. Donc ce paragraphe peut tout aussi bien être le début de l'étude 4 que la fin de l'étude 3. Par exemple pour le théâtre d'Épidaure, l'analyse de son plan relève de l'étude 3, alors que sa construction relève de l'étude 4 : il va falloir savoir comment partager l'angle plat en 10 angles égaux.

a) La bisection : la rose des vents

Le partage de l'angle en deux angles égaux, à la règle et au compas, est le plus simple et il est fondamental. C'est par lui que nous commençons. En effet le partage de l'angle en 3 est impossible à la règle et au compas, et celui en 5 est non évident, difficile. On réalise donc qu'avec la question du partage des angles on est au cœur des mathématiques, et les mathématiciens ont développé des trésors d'imagination et de techniques pour le résoudre (on pourra consulter la brochure *Angles* de 5^e de l'IREM : voir l'annexe 6).

Voici une proposition pour débiter l'étude du partage de l'angle en deux.

Nous proposons aux élèves des représentations de plusieurs roses des vents (voir la *banque de situations*, partie 5), nous leur demandons de les observer, et de trouver comment on peut les construire. Puis chacun en construit une de son choix à partir d'un cercle de rayon donné :

tracé d'un diamètre du cercle, d'un diamètre perpendiculaire, de la bissectrice d'un angle droit, puis de celle d'un demi-angle droit. Si la construction de la bissectrice de l'angle droit peut être contournée (par exemple en construisant la diagonale d'un carré), celle du demi-angle droit ne le pourra pas, et ce sera l'occasion de réfléchir à la construction de la bissectrice d'un angle, à partir des axes de symétrie des figures déjà étudiées (cerf-volant, losange, triangle isocèle). On voit comment toutes les connaissances acquises contribuent à concevoir la construction de la bissectrice qui se trouve alors justifiée. On est vraiment dans un travail mathématique, et loin d'un mode d'emploi ou programme de construction que l'élève doit exécuter sans en comprendre ni voir le sens. On peut alors partager n'importe quel angle en 2, 4, 8, 16, 32... angles égaux, et construire des polygones réguliers à 8, 16, 32 côtés, et à 6, 12 côtés, 24 côtés en partant d'un triangle équilatéral. On voit aussi qu'avec de tels sujets il peut y avoir du travail pour tous, et de la motivation à bien faire y compris pour des élèves en difficulté.

On peut ensuite poursuivre avec un travail sur les fractions en situation, ce qui veut dire avec des moyens de vérifier les réponses données. La rose des vents permet ainsi d'exprimer l'angle entre deux « vents » en fonction de l'angle plein, de l'angle plat ou de l'angle droit. Pour la rose à 16 vents apparaissent alors tous les multiples de $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ et des égalités de fractions de dénominateurs différents.

Et nous concevons facilement que notre rose à 16 vents nous permet de mesurer n'importe quel angle au $\frac{1}{16}$ d'angle près ; et que si nous voulons augmenter la précision, il suffit de

passer à une rose à 32 vents, et ainsi de suite, la précision théorique atteinte étant sans limite, alors que celle à laquelle peut prétendre le navigateur est, elle, limitée.

Nous mettons ainsi en œuvre de façon simple, avec les élèves, des méthodes fondamentales des mathématiques : la duplication et la dichotomie.

Quant au principe de la mesure des angles, il est mis en place. Pour transformer une rose à 8 vents en notre rapporteur circulaire, il suffirait de partager son angle « unité » le huitième de l'angle plein, en 3, puis encore en 3, puis en 5. Le partage d'un angle en 3 ou 5 parties égales peut être alors posé et discuté.

Bilan de connaissances

- définition et constructions de la bissectrice d'un angle (voir un peu plus loin la rubrique *Le cours*).

b) D'autres partages

La trisection de l'angle sans rapporteur, en utilisant règle et compas, n'est possible que pour certains angles. La technique de la rosace permet de travailler le cas intéressant de l'angle du triangle équilatéral : on le trouve égal au tiers de l'angle plat, et sa moitié égale au tiers de l'angle droit. On peut ensuite soumettre le problème général de la trisection de l'angle : nous avons été capables de partager un angle en deux angles égaux ; serions-nous capables de le partager en trois angles égaux ? Soumettre ce problème historique à des élèves de 6^e est un vrai bonheur pour les amener à argumenter et à infirmer leur construction qui consiste dans la majorité des cas à diviser une corde en trois parties égales. Ce peut être l'occasion de leur montrer des trisecteurs (voir la brochure *Angles 5^e*, Annexe 6).

Bilan

Il peut être intéressant de faire un bilan de cette étude 5 dans le cours qui garde trace du parcours et des problèmes rencontrés. Vous en trouverez un exemple dans la rubrique *Le cours*.

Étude 5 La mesure des angles : rapporteur et constructions géométriques (6^e)

C'est dans cette dernière partie du parcours que l'usage du rapporteur va être travaillé en vue d'acquérir les 2 compétences fondamentales du programme :

- utiliser le rapporteur pour déterminer la mesure d'un angle en degrés,
- utiliser le rapporteur pour construire un angle de mesure donnée en degrés.

Nous centrons l'apprentissage sur 3 utilisations des angles qui nous paraissent essentielles, comme nous l'avons dit dans l'introduction :

- reproduire et construire des figures polygonales,
- trouver des distances inaccessibles,
- tracer sa route sur mer, sur terre ou dans les airs.

Donc nous proposons un apprentissage de l'usage du rapporteur à travers l'étude de situations de mesure et de construction, en phase avec les prescriptions du programme.

a) Le rapporteur

Le principe du rapporteur a été acquis dans l'étude 4 : on partage le cercle (l'angle plein) en un certain nombre d'angles égaux. En choisissant un de ces angles pour unité, pour tout angle on peut dire combien de fois il faut ajouter l'unité pour obtenir l'angle. Plus on choisit pour unité un angle petit, plus la mesure (le nombre de fois) sera précise. Nous pouvons donc présenter aux élèves les choix faits par les hommes (voir la rubrique *Histoire* dans la partie 6 *Ressources*) et celui qui s'est imposé et s'est maintenu (malgré le système décimal) : le partage du cercle en 360 parties égales. Puis il faut présenter l'instrument et son utilisation en faisant comprendre que cet outil, comme la fausse équerre, n'est que la matérialisation du partage du cercle en 360 parties égales, dont, pour des raisons pratiques, on ne garde souvent que la moitié (un demi-cercle). Et ensuite montrer que son utilisation découle de son principe : il suffit de bien repérer le centre du rapporteur qui correspond au centre du cercle et son diamètre (que les anciens appelaient la ligne de foi) qui repère le côté de l'angle d'où part la mesure. Enfin on peut questionner les élèves sur ce que va nous permettre de faire ce nouvel instrument : nous allons en particulier pouvoir partager tous les angles et les reproduire. On peut le montrer en reprenant la construction des polygones réguliers que nous ne savons pas construire : pentagone, heptagone, enneagone, et voir une autre construction de l'hexagone. La division exacte ou approchée de 360° établit un lien fonctionnel entre le numérique et le géométrique.

Voyons maintenant comment aborder le deuxième temps de l'étude 5.

b) Trouver sa route

Faire un plan de vol pour un avion, un plan de route pour un bateau, un plan de déplacement pour un robot, permet de faire de nombreuses *mesures d'angles*. C'est donc un thème par lequel on peut débiter l'étude pour se familiariser avec l'usage du rapporteur.

c) Distances inaccessibles

Trouver une longueur inaccessible à une mesure directe, mais dont on a besoin pour le calcul de l'aire d'un terrain était la raison de l'introduction et de l'utilisation de la notion d'angle par Clairaut. Trouver une longueur inaccessible est souvent un problème qui s'est posé et se pose aux arpenteurs, mais aussi aux navigateurs, aux cartographes, aux ingénieurs... La mesure des angles a été et est encore un moyen souvent utilisé pour résoudre ce problème. Ce thème permet de travailler la technique de *construction d'un angle de mesure donnée* à l'aide du rapporteur, et peut donner lieu à des dictées géométriques (voir ci-après le paragraphe 4 dans la rubrique *Contextes*).

d) Reproduction de figures

La reproduction de figures polygonales données, vue dans les études précédentes à l'aide de la fausse équerre, peut être revisitée en utilisant le rapporteur. Ce type de situation a l'avantage

de mettre en œuvre conjointement les deux techniques fondamentales au programme : *mesure des angles de la figure à reproduire*, et *construction d'angles ayant ces mesures*.

Par contre la construction de figures où les mesures d'angles et de longueurs sont données, ne permet de travailler que la deuxième technique comme c'était le cas pour les distances inaccessibles.

Vous trouverez dans la *banque de situations* (partie 5) de nombreux exemples de situations correspondant aux trois thèmes dont nous venons de parler. Les étudier permettra à vos élèves d'acquérir toutes les techniques et connaissances du programme concernant les angles et la plupart de celles concernant les figures géométriques.

Remarquons que de telles situations remplacent avantageusement une série d'exercices techniques décontextualisés où on apprend une technique sans aucune finalité. Elles montrent l'utilité des mathématiques et sa place dans la vie des hommes.

Le cours

Le cours de mathématiques, à savoir ce qu'il faut retenir et savoir utiliser (définitions, propriétés, méthodes) pour faire des mathématiques, est souvent donné sous forme de fiches qui ne font pas apparaître l'articulation logique de ces différents éléments. Or c'est cette articulation logique qui fait l'essence même des mathématiques. Il est important que les élèves, quelles que soient les formulations employées, perçoivent qu'en mathématique il n'y a pas d'arbitraire, contrairement à l'image dégradée des mathématiques qu'ils nous renvoient. D'autre part, il est important que la trace écrite soit adaptée pour être compréhensibles à la fois par les élèves, les familles et les aidants, comme le préconise le rapport Villani-Torossian.

Si nous reprenons le parcours sur les *Angles* que nous proposons, il y figure une définition d'un angle, rarement présente dans les manuels. C'est cette définition que nous avons choisie qui va permettre de comparer les angles (en grandeur), de dire ce que sont des angles égaux (de même grandeur), de justifier le report d'un angle avec la fausse équerre (ou le compas). Elle permettra aussi, si l'on définit la symétrie axiale par le pliage, de dire que les angles symétriques sont égaux (superposables par pliage et donc de même ouverture). Les propriétés des figures du programme qui ont des axes de symétrie (cerf-volant, losange, trapèze isocèle, triangle isocèle) ne sont pas le résultat d'observations : elles acquièrent leur statut de propriété par l'existence de leurs axes de symétrie, et les propriétés du pliage. C'est aussi le pliage qui va permettre de partager l'angle en deux parties égales, et de définir la bissectrice. C'est le partage de l'angle plein en 360 parties qui va permettre de définir la mesure des angles en degrés, de comprendre la construction du rapporteur et son utilisation. Apprendre à utiliser un rapporteur sans connaître cette filiation logique, en suivant aveuglément un mode d'emploi, explique certainement l'échec massif de sa bonne utilisation, et la difficulté des élèves à s'adapter aux diverses réalisations commerciales de cet instrument. Plus généralement, donner des techniques non justifiées (sans éléments technologiques comme dirait Chevallard), donc juste en montrant ce qu'il faut faire, est pour nous une raison majeure des nombreuses erreurs rencontrées, et du désintérêt des élèves pour les mathématiques qu'ils perçoivent comme un ensemble de techniques arbitraires qu'il faut exécuter.

En pratique que faire ?

Si la forme matérielle du cours peut être adaptée par chaque professeur, il faudrait garder à l'esprit les points suivants sur l'élaboration de sa trace écrite.

- 1) La trace écrite des définitions, propriétés, méthodes est importante : elle est une référence.
- 2) Des éléments de justification, des liens logiques devraient y être présents : les connaissances en mathématiques ne doivent pas apparaître comme arbitraires.
- 3) Elle doit pouvoir être consultée et utilisée par l'élève lors de son travail : c'est essentiel quand les connaissances sont nouvelles, et tant qu'elles ne sont pas disponibles sans support.
- 4) Elle doit être compréhensible, donc privilégier le langage courant, tout en étant précise et rigoureuse.
- 5) Elle ne doit être donnée dans sa forme définitive qu'après un temps plus ou moins long d'appropriation des connaissances, mais jamais d'emblée.
- 6) Le temps qui lui est consacré sur une séance ne doit pas être trop long.
- 7) Faire référence à des situations travaillées en classe, ce qui peut aider les élèves à mémoriser les savoirs ou savoir-faire.

Un exemple d'organisation structurée des connaissances sur les angles pour le cycle 3

1 Définir et comparer des angles (CM1/CM2)

1) Définition : on appelle **angle** l'ouverture formée par deux demi-droites de même origine. Cette origine s'appelle le **sommet** de l'angle et les demi-droites les **côtés** de l'angle.

On **marque** les angles par de petits arcs de cercle qui ont pour centre le sommet de l'angle.

On **désigne** un angle par le nom de son sommet avec au dessus le dessin d'un angle : $\hat{P}$.

Quand il y a plusieurs angles de même sommet, on ajoute à droite et à gauche deux points par où passent les côtés. **Notation** : $\widehat{APB}$.

(C'est une notation française ; il y en a d'autres : voir la rubrique *Histoire* dans la partie 6 *Ressources*).

2) Comparaison

D'après ce que dit la définition de l'angle

Théorème 1

Deux angles sont **égaux** s'ils ont la même ouverture : donc on peut les superposer.

Un angle est **plus petit** qu'un autre si son ouverture est la plus petite :

- Si on superpose son sommet et un de ses côtés sur l'autre angle, alors son deuxième côté est à l'intérieur de cet angle.
- Si on trace les écarts entre les deux côtés à la même distance du sommet, alors le plus petit est celui qui a le plus petit écart.

Outils pour reproduire un angle égal à un angle donné, et pour comparer des angles :

- papier calque : pour superposer
- fausse équerre : pour prendre l'ouverture
- règle et compas : pour prendre l'écart
- rapporteur : pour mesurer (voir plus loin)

3) Angles égaux

Théorème 2 : si une figure a un axe de symétrie (c'est-à-dire qu'en la pliant autour de cet axe les 2 parties se superposent), alors les angles symétriques sont égaux puisqu'ils se superposent.

Exemples : triangle isocèle, cerf-volant, trapèze isocèle, losange

Méthode pour construire une figure symétrique : à partir de la moitié de la figure et de son axe.

Avec les points et des perpendiculaires à l'axe.

4) Types d'angles du plus petit au plus grand (ouverture croissante) :

angle nul, angle aigu, angle droit, angle obtus, angle plat, angle rentrant, angle plein.

L'angle est aigu est défini comme plus petit qu'un angle droit, et l'angle obtus comme plus grand que l'angle droit (et plus petit que l'angle plat si l'on parle d'angles plus grand qu'un angle plat).

2 Additionner et partager des angles (CM2/6^e)

1) Angles adjacents Illustrer

Définition : ce sont des angles placés côte à côte : ils ont le même sommet et un côté commun. Ils forment un angle plus grand que chacun d'eux qui est appelé leur somme (on a ajouté leurs ouvertures). Si l'on soustrait de la somme un des angles, on retrouve l'autre.

2) Multiples

Si on dessine 2 angles égaux côte à côte avec le même sommet, on obtient un angle 2 fois plus grand (ouverture 2 fois plus grande, ou double). Si on en rajoute un, on obtient un angle 3 fois plus grand (triple), et si on continue on obtient un angle 4 fois, 5 fois, 6 fois... plus grand (quadruple, quintuple, sextuple...).

3) Partager en 2

Définition : on peut partager un angle en 2 angles égaux en le repliant sur lui-même ; la droite de pliage s'appelle la **bissectrice** de l'angle. C'est son **axe de symétrie**. Chacun des deux angles égaux vaut la moitié de l'angle de départ.

Construction de la bissectrice d'un angle

- par pliage,
- avec des instruments.

Méthode du triangle isocèle

- 1) On trace un arc de cercle ayant pour centre le sommet de l'angle S, et pour rayon la longueur que l'on veut SA.
- 2) On trace l'écartement AB.
- 3) On place I au milieu du segment [AB].
- 4) On trace la droite passant par S et I : (SI). C'est la **bissectrice** de l'angle $\widehat{ASB}$.

Méthode du losange

- 1) On trace un arc de cercle ayant pour centre le sommet de l'angle S, et on obtient, sur les côtés de l'angle 2 côtés du losange : SA et SB.
- 2) Avec le même rayon, on trace le cercle de centre A et le cercle de centre B : ils se coupent en C.
- 3) On trace la droite passant par S et C : (SC). C'est un axe de symétrie du losange SACB, et donc c'est la **bissectrice** de l'angle $\widehat{ASB}$.

Théorème : dans un triangle rectangle isocèle (demi-carré), les deux angles aigus sont égaux à la moitié d'un angle droit.

4) Autres partages

- Avec la bissectrice on peut partager n'importe quel angle en 2, 4, 8, 16... parties égales. C'est ainsi que l'on peut construire la rose des vents.
- Avec la technique de la rosace, l'angle du triangle équilatéral égal au tiers de l'angle plat.
- Par contre il est plus difficile de partager n'importe quel angle en 3, 5, 7, 9... parties égales. On pourra le faire en utilisant le rapporteur. On verra plus loin comment faire.

3 Mesurer un angle (6°)

1) **Unité de mesure** comme pour les longueurs, pour pouvoir comparer les angles à l'aide de nombres, il faut choisir un angle pour unité. Depuis plus de 4000 ans l'unité usuelle d'angle est le **degré** : c'est l'angle correspondant à la trois cent soixantième partie du cercle.

(Illustrer avec un cercle divisé en 8, en indiquant les 8 graduations en degrés)

Mesure des angles : nul (0°), aigu (entre 0° et 90°), droit (90°), obtus (entre 90° et 180°), plat (180°), rentrant (entre 180° et 360°), plein (360°).

2) **Le rapporteur** : c'est un instrument pour mesurer les angles. C'est un cercle ou un demi-cercle gradué en degrés (360 pour le cercle, 180 pour le demi-cercle)

3) Mesurer un angle

- 1) On place le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle, **et** la ligne 0° - 180° sur un côté de l'angle.
- 2) À l'endroit où le deuxième côté de l'angle coupe la graduation, on lit la mesure de l'angle (**en partant de 0°**)

4) Construire un angle de mesure donnée

- 1) On trace un côté de l'angle, et on marque son sommet : S.
- 2) On place le centre du rapporteur sur le sommet S, **et** la ligne 0° - 180° sur le côté de l'angle.
- 3) On repère la mesure donnée sur la graduation du rapporteur (**en partant de 0°**), et on place un point.

4) On trace le deuxième côté de l'angle qui part du sommet S et qui passe par ce point.

5) Utilisation

a) Pour comparer des angles : on les mesure et on compare les mesures.

b) Pour partager un angle : on le mesure et on partage sa mesure.

Applications

- Pour partager un angle en 3 angles égaux.
- Pour construire des polygones réguliers (et des étoiles) à partir d'un cercle : pour un polygone à n côtés, on partage l'angle plein en n angles égaux en divisant 360° par n .

c) Dans la vie :

- pour construire des figures, des objets,
- pour s'orienter : sur terre, en mer, dans les airs (cartes, boussoles, compas de navigation...),
- pour trouver des distances inaccessibles (largeur d'une baie, hauteur d'une tour...).

Les contextes d'apprentissage

Nous pensons que pour investir, impliquer un maximum d'élèves dans l'apprentissage en mathématiques nous avons intérêt à proposer des activités riches et variées faisant appel au toucher (manipulation, fabrication, utilisation d'instruments), au visuel (observation, images, photos, diaporama, activités mentales), à l'écoute (débat, verbalisation, dictées géométriques), à l'écrit (lecture de textes, rédaction de réponses, de solutions, prises en note du cours). Le travail écrit est certes fondamental, mais les activités de l'élève ne doivent pas s'y réduire. Il faut proposer des situations qui permettent à tous les élèves, quel que soit leur niveau, de réfléchir, d'essayer et de proposer tout en acceptant des réponses plus ou moins abouties ou expertes.

Comment faire en pratique ?

Nous avons privilégié 4 axes que nous vous présentons : le type de situations que nous faisons étudier à nos élèves, l'utilisation d'instruments, le travail mental, les dictées géométriques.

Il est enfin à noter que depuis de nombreuses décennies la tendance est à l'individualisation de l'enseignement, soit en adaptant l'enseignement à des typologies d'individus (La Garanderie, Cain...), soit en utilisant l'informatique. Nous pensons au contraire qu'il faut utiliser la richesse de la communauté qu'est la classe pour débattre, proposer, travailler à plusieurs, aider, mener des projets en commun, sous la direction du professeur qui, connaissant les enjeux de ce qu'il a à enseigner, peut arbitrer, décider, diriger l'étude (voir Chevallard, Annexe 6, *Bibliographie générale*).

1. Les situations

a) Ne pas se couper du monde et de la société

La démarche que nous proposons prolonge le *Questionner le monde* du programme de cycle 2. Pour étudier les *Angles*, comme toutes les autres grandeurs, nous privilégions l'étude de situations en prise avec la réalité que nous questionnons. Nous voulons que les élèves réalisent qu'une des raisons d'être des mathématiques est de structurer et d'expliquer certains éléments du monde qui les entoure : l'espace, mais aussi le temps et les échanges. Les mathématiques donnent à l'homme des moyens d'action sur le monde dans lequel il vit.

Les angles font partie de notre environnement quotidien à travers les objets qui nous entourent et qu'ont créés les hommes. Nos situations visent à étudier des objets du monde, et à les reproduire.

Les angles permettent à l'homme de s'orienter sur terre, sur mer et dans les airs. Nous proposons d'étudier la rose des vents, des trajets maritimes et aériens. Ils permettent aussi de guider des robots (tondeuses, aspirateurs...). Nous proposons donc de programmer les déplacements d'un robot et de s'initier à Geotortue.

Les angles permettent aussi de mesurer des longueurs inaccessibles, car ils peuvent se jouer des obstacles, et des distances : on peut mesurer l'angle entre deux étoiles par simple visée, ce que les hommes font depuis plus de 2500 ans ! Nous proposons des situations de mesure de distances inaccessibles.

b) Modéliser

Dans l'étude de toutes ces situations on est amené à remplacer les objets réels par des figures de géométrie. On travaille alors sur des objets géométriques avec des notions géométriques qu'on élabore. Puis on revient au réel en répondant aux questions que l'on s'était posées. Nos élèves se forment ainsi à la démarche d'abstraction et de modélisation.

c) Chercher

L'étude de toutes ces situations nécessite de la recherche de la part des élèves, compétence importante à développer en mathématiques, et qui est mise en avant par les programmes.

On sait que les mauvais résultats de nos élèves aux évaluations internationales comme PISA viennent en grande partie du fait que nos élèves ne savent pas prendre d'initiative, qu'ils sont en difficulté dès lors qu'ils ne sont pas guidés. Il faut donc veiller à ce que nos questions soient ouvertes et favorisent le questionnement des élèves. Certaines questions des élèves peuvent devenir, avec l'aval du professeur, des sujets d'étude pour une partie ou la totalité de la classe.

d) Exercices et situations

Les exercices sont le support de l'étude de la grande question abordée. Ils permettent de faire travailler les notions et techniques rencontrées dans la situation de départ, mais aussi de les approfondir, de les enrichir en rencontrant la même question dans d'autres cadres. Les exercices vont donc être centrés autour du même grand type de tâche que la situation de départ : ils sont en eux-mêmes des situations complexes qui amènent l'élève à réfléchir à des stratégies, à choisir des techniques, à s'adapter. La question étant ouverte et l'accent étant mis sur l'explication de la méthode mise en œuvre, les élèves peuvent explorer de nombreuses pistes et choisir des méthodes différentes. Nous choisissons la plupart de nos exercices dans notre *banque de situations* (Partie 5).

e) Culture

Nous veillons à ce qu'un certain nombre de situations étudiées enrichisse la culture des élèves soit au niveau de l'histoire des mathématiques (Spirale d'Archimède, mesure de la largeur d'une baie dans le Manesson Mallet) ou de la culture générale (Kandinsky, Théâtre d'Épidaure, mosaïque romaine, portulan, constellations). L'étude de telles situations peut-être l'occasion de croiser les disciplines à l'École et de faire du travail interdisciplinaire en 6^e.

d) Ouvertures

Notre volonté de rester en prise avec des situations de la vie permet d'explorer de nombreuses pistes : recherches, fabrication et utilisation d'outils pour mesurer les angles, interventions de professionnels parlant de la mesure des angles dans leur métier...

Dans un de nos collèges, un ouvrier technique de l'établissement vient tous les ans présenter aux élèves de 6^e les outils de mesure des angles qu'il utilise dans sa vie professionnelle et dans ses loisirs (spéléologie, construction de canoës).

2. Les instruments pour reproduire les angles

Pour les *Angles*, l'approche de la grandeur comme ouverture permet d'utiliser plusieurs sortes d'outils pour comparer les angles suivant leur ouverture : papier calque, gabarits, fausse équerre, compas. Nous privilégions dans notre démarche la fausse équerre, instrument dont nous avons déjà montré les avantages :

- son usage est facile à comprendre car il reproduit la notion d'ouverture,
- il permet de bien ancrer ce qu'est la grandeur d'un angle,
- il permet de reproduire les angles, donc de réaliser des constructions géométriques avec précision.

Mais lorsque nous confrontons les élèves au problème de la définition et de la comparaison des angles (études 1 et 2), ils doivent pouvoir (sans guidage) réfléchir à l'élaboration de moyens matériels pour effectuer la comparaison de deux angles. Ils peuvent le faire avec deux doigts qu'ils écartent et ce peut être suffisant dans la situation proposée. Il ne faut rien rejeter d'emblée, mais éventuellement discuter sur la précision, la fiabilité de la méthode pour la faire évoluer vers la conception d'un instrument.

Nous avons peu parlé du compas pour comparer les angles. Or les élèves en possèdent tous un pour réaliser d'autres gestes géométrique : reporter des longueurs, tracer un cercle ... Le compas peut aussi « mesurer » une ouverture, comme l'écartement des deux doigts, ou de la fausse équerre, et des professeurs l'utilisent ainsi pour visualiser un angle. Le compas permet la reproduction d'un angle par une construction qui met en œuvre la notion d'écartement qui, comme celle d'ouverture, permet de dire la grandeur d'un angle. Ce mot d'écartement est souvent utilisé par les élèves pour comparer des angles. Comment le mettre en œuvre avec le compas : on trace un cercle (ou un arc de cercle) ayant pour centre le sommet de l'angle et coupant les côtés de l'angle en deux points. L'arc de cercle entre ces deux points figure l'ouverture (il sert de codage de l'angle). La distance entre ces deux points mesure l'écartement (c'est la corde de l'arc). Si on garde, pour plusieurs angles, le même rayon pour le cercle, on peut alors comparer les écartements (au compas, à la règle graduée). En faisant cela on sème des graines pour comprendre plus tard ce que sera la trigonométrie (la mesure des angles à partir de longueurs de segments). Pour reproduire un angle au compas il suffit de refaire la construction « à l'envers ». C'est une méthode de construction d'un angle égal à un angle donné utilisée autrefois dans tous les traités et manuels de mathématiques (elle figure dans le texte de Clairaut (voir la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*). Elle est toujours utilisée dans des domaines professionnels. Donc si la notion d'écartement apparaît en classe on pourra essayer de l'exploiter, en débouchant sur cette méthode. Et si les élèves n'ont d'autres instruments que la règle et le compas, ils seront obligés de la connaître.

L'essentiel est que les élèves arrivent à répondre à la question de la comparaison des angles et à reproduire des figures. Dans un premier temps, peu importe l'outil. Si celui-ci se révèle mal adapté pour le traitement de certains problèmes géométriques, leur pratique évoluera, et ils pourront se faire aider par ceux qui maîtrisent toutes les techniques. On voit sur cet exemple comment une richesse d'approches et de matériels peut permettre à chacun d'accomplir la tâche, alors qu'il serait en échec s'il utilisait un instrument dont il n'a pas compris le fonctionnement. Dans notre démarche, il y a bien une prise en compte des différences entre élèves, mais sans aide spécifique.

L'utilisation réfléchie d'instruments conçus en lien direct avec des notions ou des figures géométrique est importante pour l'apprentissage de la géométrie. Vous trouverez dans la rubrique *Instruments* de la partie 6 *Ressources* un kit d'instruments conçu et réalisé par l'un d'entre nous, accompagné d'un grand nombre d'activités qu'il est possible de mener en cycle 3, activités qui donnent sens et intérêt aux contenus mathématiques enseignés dans cette étude des *Angles*.

Il y a aussi bien d'autres instruments que les hommes ont inventés pour mesurer les angles : voir la brochure *Angles 5^e* (Annexe 6).

3. Les activités mentales

a) Le calcul mental

Concernant le calcul mental, l'analyse des résultats aux évaluations nationales, PISA, CEDRE, TIMSS ainsi que les observations de classe et les rapports des inspections, générales et régionales, incitent à penser que nous devons proposer aux élèves des activités régulières de calcul mental. Aussi, certains d'entre nous proposent plusieurs séances de calcul mental par semaine sur chaque niveau du cycle 3. Ces séances de calcul mental résultent d'une réflexion sur des situations de la vie courante, et sont basées sur du calcul à partir de mesures de diverses grandeurs. Nous les proposons sous la forme de diaporamas, directement utilisables, de 5 diapositives. Un ensemble de diaporamas est disponible sur le serveur de l'IREM (pour les modalités d'accès, voir l'annexe 7 *Pour expérimenter*).

b) Le travail mental

Concernant le travail sur les angles, il nous semble bon d'alterner travail de manipulation et de recherche, travail écrit, et activités mentales.

En effet, comme en calcul mental, être obligé de réfléchir mentalement pour produire une réponse brève à une question posée permet à l'élève de s'approprier les connaissances vues lors des phases de recherche et de travail écrit mais d'une autre façon. Il faut mentaliser des notions et des procédures, et, en géométrie, se concentrer et réfléchir sur une image est essentiel pour résoudre des problèmes.

Comment s'y prendre ?

Voici quelques pistes illustrées d'exemples.

1. Pour comparer les angles

On projette une figure ou un objet et on fait comparer les (ou des) angles de la figure.

Par exemple, on peut projeter la photo d'une équerre et on pose l'une des questions suivantes :

- quel est le plus grand des 3 angles ?
- quel est l'angle le plus grand ?
- quel est l'angle le plus petit ?
- classer les 3 angles (en précisant ou non l'ordre).

2. Pour les angles aigus et obtus

a) On projette une figure ou un objet (triangles, quadrilatères, cerf-volant, cric, charpente, ...), et on demande :

- a-t-elle un angle obtus ? (ou un angle droit)
- combien a-t-elle d'angles aigus ? (d'angles droits ?)

b) Ou bien on fait identifier des angles de la figure :

- donner le nom d'un angle aigu, d'un angle obtus, de 2 angles aigus ...

3. Pour les angles égaux

a) On projette des figures ou un objet ayant un axe de symétrie (losange, cerf-volant, triangle isocèle, charpente, ...) et des figures sans angles égaux, et on demande :

- dans cette figure y a-t-il des angles égaux ?
- dans cette figure, donne le nom de 2 angles égaux

b) On projette 2 figures (ou plus) et on demande si elles ont des angles égaux (et éventuellement combien). Par exemple :

- un carré et un rectangle
- un carré et un triangle rectangle

- 2 triangles rectangles isocèles de tailles différentes (ce peut être les photos de 2 ou 3 pièces du Tangram)
- les 2 triangles moitiés d'un rectangle (rectangle coupé par une diagonale)
- les 2 triangles formés par une médiane dans un triangle quelconque (ou rectangle ...)

4. Pour les angles adjacents et la somme des angles.

On peut reprendre des figures et objets comme des quadrilatères avec une diagonale tracée, un triangle avec une hauteur ou une médiane, une charpente, un puzzle comme le tangram ou le stomachion (voir Maths & Puzzles dans la partie 6 *Ressources*), un cerf-volant avec des bandes de tissu adjacentes..., et demander :

- citer 2 angles adjacents (ou 3, ou 4 ...)
- citer des angles adjacents dont la somme est égale à un angle droit, un angle plat.

4. Pour le partage des angles

À partir d'un angle plein ou d'un angle plat divisé en parties égales (éventail, roues, jantes, ailes de moulins, partageurs de tartes...), on peut demander :

- à quelle fraction de l'angle plein est égal un angle ? 2 angles ? 3 angles ? ...

À quel moment ?

Ce peut être une façon de faire un bilan (structuration des connaissances) en fin de séance, ou une réactivation rapide de choses vues à la séance précédente. Mais il faut voir que c'est un vrai travail d'appropriation des connaissances, même si on peut ensuite réutiliser certaines diapositives pour faire un contrôle de connaissances.

Pour quels apprentissages ?

Comme pour les ordres de grandeurs, pouvoir à l'œil être capable d'estimer l'ouverture d'un angle et dire si l'angle est petit ou grand, si un angle est plus petit ou plus grand qu'un angle droit, cela fait partie des compétences que tout un chacun devrait avoir et qui témoigne, a priori, d'une bonne appropriation de la notion d'angle.

Mais on peut remarquer que la plupart des réponses aux questions que nous avons proposées peuvent être justifiées par des éléments du cours : définitions, propriétés des figures proposées, ou théorèmes. Après le travail mental lui-même, c'est un moment important que celui de la validation ou de la non validation des réponses. Car l'élève doit percevoir qu'une des caractéristiques des mathématiques c'est qu'il n'y a dans les réponses données aucun arbitraire : tout peut être, et doit être justifié.

Les notations et le codage

On peut rajouter que ce travail mental va obliger, de par sa forme, à se confronter aux problèmes de codage et de désignation des angles. En effet pour que l'élève puisse dire par écrit quel angle est obtus, quels angles de la figure sont égaux, etc., il va falloir qu'il puisse les nommer, et que le professeur mette sur la figure des éléments qui vont permettre de les désigner : noms de points, codages numérotés. Si la figure projetée est un triangle ABC ayant un angle obtus en A, la réponse écrite pour le nom de l'angle obtus pourra être l'angle A, ou l'angle de sommet A, ou $\hat{A}$. La notation $\widehat{BAC}$ n'a pas de raison d'être introduite tant que la situation ne le nécessite pas. Par contre si l'on donne des figures où il y a des angles adjacents (charpente, quadrilatère avec une diagonale, triangle avec une hauteur ou une médiane), on ne pourra plus se contenter de dire et d'écrire l'angle M ou $\hat{M}$: il faudra écrire l'angle AMB ou $\widehat{AMB}$. En évaluation, il ne faudrait pas accepter A comme réponse, mais l'angle A, ou l'angle de sommet A, ou $\hat{A}$ (voir le point sur les notations dans la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*).

Pour désigner des angles on peut aussi mettre des petits arcs de cercles (cette notation a un sens qu'il faut montrer aux élèves) sur les figures ou objets, avec un chiffre ou une lettre minuscule (a, b, c ...) à côté de l'arc de cercle ce qui est très pratique et intuitif. Les réponses prennent alors la forme de : l'angle a, ou l'angle 1. L'important est que le mot angle figure

dans la réponse. La pratique de notations sans le nom en français de l'objet qu'elles désignent est une pratique experte, non indispensable, comme le montre l'histoire des notations en géométrie, et qu'il faut retarder le plus possible, contrairement à la pratique usuelle héritée des mathématiques modernes et d'une fausse idée de la rigueur mathématique. L'objectif n'est pas d'apprendre du vocabulaire ; et, d'une manière générale, passer trop de temps à faire faire des exercices sans intérêt mathématique peut même être contre-productif. Comme le dit le programme, les notations doivent s'introduire progressivement et en fonction de leur utilité : donc en situation et en étant utilisées. La maîtrise de leur utilisation s'évalue à travers les réponses données lors d'autres travaux. La notation et le codage rentrent dans une compétence bien plus globale qui est la communication (savoir s'exprimer pour être compréhensible).

4. Les dictées géométriques

La technique pour trouver des distances inaccessibles (voir le texte de Manesson Mallet dans la rubrique *Histoire* de la partie 6 *Ressources*), peut être reprise sous la forme de *dictée géométrique* : on dicte les données mesurées par un géomètre et on demande la valeur de mesures d'angles ou de longueurs non données. L'élève, pendant la dictée, réalise un schéma à *main levée* (comme le géomètre sur son mémorial), puis il **construit** une figure à l'échelle pour trouver les mesures demandées (comme le géomètre dans son cabinet). On voit la fonctionnalité de la figure à main levée, du codage, de la figure faite aux instruments avec soin pour évaluer avec précision les mesures inconnues, et la nécessité de savoir tracer un angle de mesure donnée et de mesurer un angle sur une figure. C'est une tâche qui met en œuvre une pluralité de compétences du programme et qui leur donne du sens. Mais il est important d'introduire cette pratique en expliquant et illustrant le travail du géomètre, ou mieux, en faisant étudier la situation qui y correspond dans la *banque de situations* (partie 5), ou mieux encore, en faisant réaliser par les élèves un travail d'arpentage sur le terrain (dans la cour de l'école ou du collège). C'est la gestion de la situation qui impose l'utilisation de figures à main levée, de codage du schéma, de l'utilisation d'un vocabulaire mathématique, d'une construction précise de la figure avec des instruments.

Concrètement, nous proposons des sujets qui doivent être dictés. Le texte est lu deux fois et l'élève réalise le travail sur une demi-feuille blanche. La première étape consiste à faire un croquis à main levée en y indiquant les informations données et la seconde consiste à répondre à la question. Ce qui nécessite de construire la figure en vraie grandeur ou à l'échelle.

Exemple

ABC est un triangle, son angle A mesure 45° , son côté AB 11,5cm, et son côté AC 8cm. Combien mesure le côté BC ?

Variante contextualisée

ABC est un champ triangulaire. La mesure de son angle A est 45° , celle de son côté AB est 115m, et celle de son côté AC est 80m. Combien mesure son périmètre ?

4. Mise en œuvre dans la classe

Dans cette partie nous vous proposons des exemples de déroulements en classe pour les trois niveaux du cycle 3, des fiches de séances en CM1/CM2, des comptes rendus d'étude de situations, mais aussi des exemples de cours (traces écrites), d'activités mentales et d'évaluations.

Des déroulements en classe

Dans cette rubrique vous trouverez :

- deux exemples de déroulements différents en CM1/CM2 : l'un sur 6 semaines en début d'année, l'autre sur 4 semaines en fin d'année ;
- deux exemples de déroulement en 6^e : l'un sur 8 semaines dans la continuité de ceux de CM1/CM2, l'autre sur 9 semaines, sans qu'il y ait eu un travail sur les angles en CM1/CM2 à partir de notre démarche.

Niveau CM1/CM2

Exemple 1 sur 6 semaines (fiche professeur)

Cette grandeur est la première abordée (voir l'annexe 5 : *Gestion sur l'année*) dans le bassin d'expérimentation du collège Pierre Mendès France. Chaque journée travaillée comporte une séance de mathématiques.

Le volume d'heures indiqué peut apparaître comme important mais cela permet d'aborder dès le début de l'année l'approche méthodologique des situations, le débat scientifique ainsi que nombre de notions mathématiques du cycle 3.

Par ailleurs il est aussi possible d'effectuer l'enseignement de la grandeur *Angles* en trois périodes (Étude 1/ Étude 2/ Étude 3).

Du point de vue de l'organisation de la classe, les CM1/CM2 des écoles de la circonscription sont scolarisés dans des classes à double niveaux. Pour faciliter la gestion du groupe classe, les enseignants ont fait le choix de répartir les élèves en groupes de cycle 3 c'est-à-dire en mélangeant ces deux niveaux. La proposition de déroulement est donc parfois la même pour les CM1 et les CM2.

Enfin, chaque séance débute avec un moment de 15 minutes de calcul mental, souvent décontextualisé des angles : c'est un travail sur les nombres et le calcul. Mais on peut aussi utiliser ce temps de début de cours à faire du travail mental sur les angles (voir la rubrique *Les activités mentales* dans la partie 3 précédente). Ce travail permet alors de réactiver des connaissances sur les angles vues dans les séances précédentes, et de contrôler leur degré d'intégration.

Remarque : les situations étudiées se trouvent dans la banque de situations (partie 5).

Étude 1 : Qu'est-ce qu'un angle ?

Notion d'angle – Identifier un angle – Angle droit et perpendiculaire – Gabarit

Séance 1 60 min	(15') Calcul mental (30') Activité d'étude et de recherche Tableau de Vassily Kandinsky Recherche, puis bilan En application, recherche de différents angles dans la classe (15') Synthèse Définition d'un angle Utilisation de gabarits	Objectif : approche de la notion d'angle (CM1), réactivation de la notion (CM2) Compétence : reproduire une figure Matériel : reproduction d'un tableau
Séance 2 60 min	(15') Calcul mental (30') Appropriation Étude d'une situation : Parc de Mireuil (CM1), Angles de rues (CM2) Travail de recherche (15') Synthèse Angles droits et perpendiculaires Intersections de droites et angles Codage des angles Dénomination des angles (CM2) Les côtés d'un angle sont des demi-droites	Objectif : appropriation de la notion d'angle Compétence : identifier des angles Matériel : plans de quartier
Séance 3 60 min	(15') Calcul mental (30') Appropriation Étude de photos et schémas : panneaux solaires, collège de Mireuil (vue aérienne) (15') Synthèse Angles droits et perpendiculaires Intersections de droites et angles	Objectif : appropriation de la notion d'angle Compétence : identifier des angles Matériel : photocopies des documents, équerre
Séance 4 60 min	(15') Calcul mental (40') Activité d'arpentage Faire un plan : arpentage par cheminement de 4 figures tracées au sol : triangles, quadrilatères Plan à l'échelle $\frac{1}{2}$ (5') Bilan Utilisation de la fausse équerre pour prendre l'ouverture des angles	Objectif : Découvrir la fausse équerre Compétence : reproduire une figure Matériel : fausse équerre, ficelle, mètre ruban

Étude 2 : Comparer des angles

Angles égaux – fausse équerre – angle aigu, obtus – reporter un angle – reproduire un angle – symétrie axiale – reproduire une figure – cerf-volant – losange – triangle isocèle, triangle rectangle

Séance 5 60 min	(15') <i>Calcul mental</i> (30') Activité d'étude et de recherche À partir de la partie manquante du tableau de Kandinsky, on compare des angles Synthèse : Comment comparer des angles ? On doit les superposer. On peut utiliser un papier calque, un gabarit, une fausse équerre ... (15') Synthèse Cours noté sur la fiche de cours (partie sur le report des angles)	Objectif : différentes méthodes pour comparer des angles Compétence : comparer des angles Matériel : fausse équerre
Séance 6 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') Appropriation CM1 : Situation sur les équerres et l'équerre à simple onglet en menuiserie CM2 : Situation sur les angles des deux équerres	Objectif : utiliser la fausse équerre Compétence : comparer des angles Matériel : fausse équerre
Séance 7 60 min	(15') <i>Calcul mental</i> (30') Entraînement CM1 : Situation sur les angles du quadrilatère et situation sur les angles du cerf-volant CM2 : Situation sur les angles du quadrilatère (version 2) (15') Synthèse Cours noté sur la fiche de cours (partie sur la comparaison des angles)	Objectif : utiliser la fausse équerre Compétence : comparer des angles Matériel : fausse équerre
Séance 8 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') Découverte/Travail de techniques CM1 : Situation sur les angles du cric et situation sur les angles du tire-bouchon CM2 : Situation sur l'encadrement d'un tableau	Objectif : le losange et ses propriétés angulaires Compétence identifier des angles égaux Matériel : fausse équerre
Séance 9 60 min	(15') <i>Calcul mental</i> (30') Appropriation/Travail de techniques CM1 : Situation sur les angles de la charpente CM2 : Situation sur la construction d'un cerf-volant (15') Synthèse Cours noté sur la fiche de cours (partie sur le gabarit d'un angle droit)	Objectif : utiliser la symétrie et la fausse équerre Compétence : comparer/construire des angles Matériel : fausse équerre
Séance 10 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') Entraînement/Travail de techniques CM1 : Situation sur les angles des portes d'entrée CM2 : Situation sur la construction d'un chevron	

Séance 11 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement</u> CM1 : Dictées géométriques CM2 : Situation sur un élément de la charpente	Objectif : codage et construction Compétence : comparer / construire des angles Matériel : fausse équerre
Séance 12 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement</u> CM1 : Dictées géométriques. CM2 : Situation sur la construction des logos	Matériel : fausse équerre
Séance 13 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Activité d'arpentage</u> Angle du terrain de mon école	Objectif : accomplir une tâche de synthèse Compétence : relever et reproduire des angles Matériel : fausse équerre
Séance 14 30 min	Évaluation sommative (comparaison d'angles)	

Les 4 séances suivantes peuvent permettre de faire de la remédiation ou de l'approfondissement.

Séance 15 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement</u> CM1 : situation sur la construction des figures ayant des axes de symétrie (triangle isocèle) CM2 : situation sur la construction des figures ayant des axes de symétrie	Objectif : Construire et reproduire des figures Compétence : construire des angles Matériel : fausse équerre
Séance 16 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement</u> CM1 : situation sur la reproduction de lettres CM2 : situation sur la reproduction de lettres	
Séance 17 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement</u> Situation sur le cerf-volant coloré	
Séance 18 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Entraînement et approfondissement</u> Construction dans le port de Hambourg	

Étude 3 : Additionner des angles

Angles adjacents - somme d'angles – reproduction de figures

Séance 19 60 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Découverte</u> Situation sur le cerf-volant coloré (15') <u>Synthèse</u> Cours noté sur la fiche de cours (partie sur les angles adjacents)	Objectif : faire le lien entre angles adjacents et addition des angles Compétence : additionner des angles
----------------------------	---	---

Séance 20 60 min	(15') <i>Calcul mental</i> (30') <u>Appropriation</u> Situation sur « ajouter des angles » (15') <u>Synthèse</u> Cours noté sur la fiche de cours (partie sur l'addition et la soustraction des angles)	Matériel : fausse équerre
Séance 21 55 min	(15') <i>Calcul mental</i> (40') <u>Appropriation</u> CM1 : dictées géométriques CM2 : situation sur la boule de billard, situation sur l'encadrement du triangle équilatéral	
Séance 22 30 min	Évaluation sommative sur les angles (comparaison et addition)	

Niveau CM1/CM2

Exemple 2 sur 4 semaines (fiche professeur)

En nous appuyant sur notre première année d'expérimentation sur le secteur de La Roche Posay, nous vous proposons un parcours différencié CM1/CM2 détaillé séance par séance.

Cette année 2017/2018 ne nous a pas permis de distinguer les deux niveaux. En effet les CM2 n'avaient pas encore suivi la progression envisagée lors de leur année de CM1.

Parallèlement au déroulement expérimenté, les élèves travaillent sur les tangrams et continuent d'utiliser geoplan pour des tracés de figures. Nous voulons ainsi faire travailler, et continuer à renforcer certaines compétences géométriques : reconnaissance d'égalité d'angles, de longueurs, estimation de rapports entre des longueurs, entre la surface d'une pièce du puzzle et celle du modèle, notion de droites parallèles, perpendiculaires, milieu ...

Nos objectifs propres à cette grandeur *Angles* sont

- 1- La définition de la notion d'angle (l'angle droit, abordé les années précédentes, n'est qu'un angle et n'a pas initié cette vision d'une infinité d'écartements)
- 2- La comparaison d'angles (en multipliant les techniques et les exercices avant de leur donner une fausse équerre mais aussi « à l'œil »)
- 3- Le report d'angles (souvent pour la construction de figures)
- 4- Le partage d'un angle en 2 angles égaux
- 5- La multiplication d'un angle.

La mesure en degré est réservée à la classe de 6^e.

Enfin, placée en fin d'année, la grandeur *Angles* aura été l'occasion de revisiter les quadrilatères et les triangles particuliers, la symétrie et de travailler les tracés (propreté et précision mais aussi ordre des étapes).

Déroulement de l'expérimentation de 2017/2018 sur le secteur de La Roche Posay

Séance 1 30 min	(20') <u>Appropriation de l'activité</u> Projeter des photos et demander aux élèves de reproduire physiquement le même angle (5') <u>Structuration des connaissances</u> Introduire la notion d'angle La définition : l'angle c'est l'ouverture, l'écartement ... (10') <u>Application</u> Leur demander de prendre des photos de leurs bras plus ou moins écartés, de leurs jambes plus ou moins pliées	Objectif : identifier la notion d'angle Compétence: donner un sens à la notion d'angle Matériel : appareils photos de l'école
Séance 2 40 min	(5') <u>Appropriation de l'activité</u> Groupes de 2 avec une série de photos (prises la veille) Classer les angles du plus petit au plus grand (10') <u>Phase de recherche</u> Techniques : avec les doigts, superposition, deux règles.... (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses Validation de la réponse (10') <u>Mise en application</u> Comparaison d'angles	Objectif : comparer des angles Compétence : comparer des angles Matériel : les photos d'angles prises lors de la séance 1 (varier les tailles des photos)
Séance 3 35 min	(5') <u>Rappel de la séance précédente</u> (10') <u>Appropriation de l'activité</u> Identifier sur un cerf-volant les angles. Quels sont les angles égaux ? Classe les angles du plus petit au plus grand (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses. Introduction du métalangage (lexique) : angles droits, obtus et aigus Validation de la réponse (10') <u>Exercices d'application</u> Identifier des angles égaux, obtus, aigus	Objectif : comparer des angles Compétence : comparer des angles Matériel : fausse-équerre, différents cerf-volant
Séance 4 40 min	(5') <u>Appropriation de l'activité</u> Groupes de 2 avec 1 photo de charpente Reproduire l'angle de la charpente qui est projeté (10') <u>Phase de recherche</u> Report de l'angle avec deux règles ou deux objets (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses Validation de la réponse et présentation de la fausse équerre	Objectif : reporter des angles Compétence : reproduire un angle Matériel : Image de charpente Organisation : partager la classe en ½

	(10') <u>Mise en application</u> : tracer des angles identiques à ceux donnés à l'aide de la fausse équerre	groupes
Séance 5 45 min	(5') <u>Rappel de la séance précédente</u> (20') <u>Appropriation de l'activité</u> Partage d'une part de gâteau en 2, en 4 (voir en 3 pour les plus rapides) À partir de la dernière part d'un gâteau, dire en combien le gâteau avait été partagé (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses Validation de la réponse (10') <u>Exercices d'application</u> Idem sur de nouvelles situations	Objectif : Construire un angle Compétence : construire des angles – multiples ou fractions Matériel : parts de gâteaux
Séance 6 30 min	(5') <u>Rappel de la séance</u> (15') <u>Entraînement sur des exercices sur les différents angles</u> Lister les différents triangles et quadrilatères particuliers et trouver des égalités d'angles	Objectif : réinvestissement Compétences : celles vues précédemment Matériel : manuels (ex fréquents)
Séance 7 35 min	(5') <u>Appropriation de l'activité</u> Groupes de 2 avec une série de photos (prises la veille) Identifier les angles droits présents sur les photos (10') <u>Phase de recherche</u> Vérification avec l'équerre. Vérifier le bon usage de l'équerre (présentation d'équerres de menuisier avec absence du troisième « morceau ») (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses. Rappel de la notion de perpendicularité Validation de la réponse (10') <u>Mise en application</u> : identifier les angles droits d'une figure	Objectif : reporter des angles Compétence : reproduire un angle Matériel : les photos d'angles prises lors de la séance précédente
Séance 8 30 min	(5') <u>Rappel de la séance</u> (10') <u>Présentation de la « technique du losange » pour le tracé de la bissectrice</u> Pourquoi les 2 angles sont égaux ? Pliage de l'angle en 2. Que remarquez-vous ? → symétrie, axe de symétrie (15') <u>Entraînement sur des exercices</u> : Tracer les triangles et quadrilatères particuliers et trouver leurs axes de symétrie	Objectif : Tracer dans angles et des figures Compétence : savoir reconnaître et tracer des angles droits Matériel : feuille blanche

Séance 9 40 min	(5') <u>Appropriation des connaissances</u> Proposer différentes façons de terminer le tracé du cerf-volant (15') <u>Phase de recherche</u> (10') <u>Construction des connaissances</u> Mise en commun des réponses Validation de la réponse (10') <u>Exercices d'application</u> Identifier des axes de symétrie et tracer des symétries	Objectif : mesurer Compétence : savoir tracer un symétrique Matériel : 1/2 de cerf-volant sur feuille quadrillée et 1/2 cerf-volant sur feuille blanche
Séance 10 30 min	(10') <u>Rappel de la séance</u> (20') <u>Entraînement sur des exercices</u>	Objectif : entraînement Compétences : celles vues sur les angles
Séance 11 30 min	<u>Évaluation</u>	

Des fiches de séances en CM1/CM2

Voici des exemples de fiches de séances mises en œuvre en CM1/CM2, et qui correspondent aux deux déroulements de la rubrique précédente. Toutes les fiches pour ces deux déroulements sont disponibles sur un espace dédié du site de l'IREM (pour les modalités d'accès, voir l'annexe 7 *Pour expérimenter*), et les situations figurent dans partie 5.

Déroulement 1 : fiches des premières séances

CM1&CM2 / Les angles / séance 1	
« Jaune, Rouge, Bleu » de Vassily Kandinsky  Voici le tableau d'un peintre célèbre Vassily Kandinsky mais une partie de ce tableau a été découpée. Il manque un morceau de cette œuvre. Vous allez devoir réussir à reproduire une pièce pouvant parfaitement s'insérer dans le trou afin de pouvoir ensuite compléter ce tableau.	30 minutes pour le travail de recherche 15 minutes pour la synthèse
	Recherche en groupes (par 4) Synthèse en classe entière
	- Photocopie du tableau « Jaune, Rouge, Bleu » de Vassily Kandinsky - feuilles A4 blanches, feuilles A4 épaisses de couleur - crayons de papier, règle graduée
Chercher : S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, mobiliser des outils, élaborer un raisonnement adapté à une situation nouvelle. Raisonner - Communiquer Notion d'angle – définition d'un angle	
Déroulement 1- Activité en groupe - Les groupes sont homogènes ou hétérogènes (CM1 & CM2). Les élèves doivent rechercher une solution pour reproduire la pièce manquante dans un tableau de peintre. 2- Mise en commun des résultats, des méthodes utilisées.	
À retenir 1. Les angles sont une ouverture entre deux côtés d'une figure partant d'un même point. 2. Utiliser un gabarit pour reproduire un angle.	
Compléments 1- L'objectif est de faire émerger la notion d'angle, et d'identifier des angles dans une figure géométrique. 2- Ne pas craindre d'inciter les élèves à faire des essais, à découper, à plier et à recommencer. Le pliage et le découpage, utilisés en cycle 2, sont réinvestis. 3- Les élèves doivent tester, essayer plusieurs idées, les confronter dans les groupes, s'écouter et argumenter leurs choix.	

CM1 Les angles / séance 2

Parc de Mireuil



Peux-tu indiquer sur le plan du parc de Mireuil les angles que font les allées ? Lesquels sont des angles droits ?



30 minutes pour le travail
15 minutes pour la synthèse



Travail individuel ou en groupes
(par 4 ou binômes)
synthèse en classe entière



- Photocopie du plan du parc pris sur Google Maps®, Mappy®...

Modéliser - Représenter - Communiquer

Repérer des angles - Savoir lire un plan - Connaître son environnement – Angles droits

Déroulement

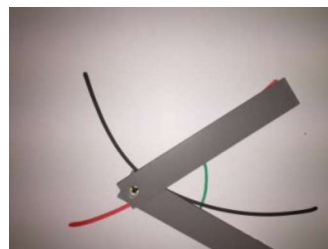
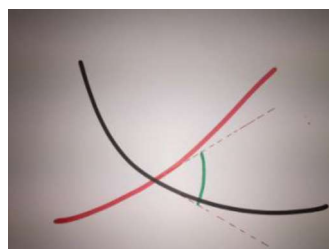
- 1- Travail individuel qui peut se mener au sein d'un groupe. Les groupes sont homogènes (CM1). Les élèves doivent identifier les angles que font les allées. « Existe-il des angles égaux ? » est une question qui peut se poser.
- 2- Mise en commun des résultats, et bilan sur les connaissances rencontrées.

À retenir

1. Deux droites se coupent en formant 4 angles, ou 2 angles s'il y a une demi-droite.
2. Quand les droites sont perpendiculaires, les 4 angles sont égaux : ce sont des angles droits.
3. Le codage des angles par un arc qui représente leur ouverture.

Compléments

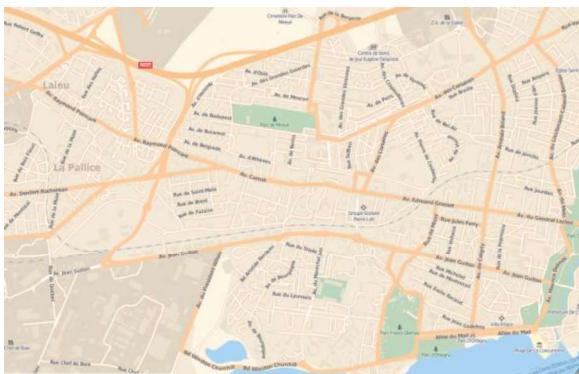
- 1- L'objectif est de faire identifier des angles dans un contexte de la vie. Les allées sont représentées par des droites ou demi-droites : travail de modélisation, où les notions de droites et demi-droites prennent du sens implicitement.
- 2- Néanmoins, des allées sont courbes et on peut parler d'angle entre les courbes. C'est une notion que certains élèves rencontreront dans la vie professionnelle ou au lycée. Mais on peut envisager intuitivement l'angle entre les allées courbes :



- 3- Inciter les élèves à faire des tracés sur le plan.
- 4- On a un bon exemple de réinvestissement de compétences de la partie « Questionner le monde » du cycle 2.
- 5- Pour les élèves plus rapides, on peut envisager une dernière partie où ce sont eux qui se posent (entre eux) des questions sur la localisation de certains lieux : écriture en utilisant le mot angle.

CM2 / Les angles / séance 2

Angles de rues



- 1) Une banque se trouve à l'angle des avenues Coligny et Guiton. Peux-tu la situer sur le plan ?
- 2) L'arrêt « Missy » du bus 1 (direction centre ville) se trouve à l'angle de la rue de Missy et de l'avenue Edmond Grasset. Peux-tu le situer sur le plan ? ...



40 minutes pour le travail
5 minutes pour la synthèse



Recherche individuelle ou en groupes (par 4 ou binômes)
synthèse en classe entière



- Photocopie du plan du quartier pris sur Google Maps®, Mappy®...

Modéliser - Représenter - Communiquer

Repérer des angles - Savoir lire un plan - Connaître son environnement

Déroulement

- 1- Travail individuel qui peut se mener au sein d'un groupe. Les groupes sont homogènes (CM2). Les élèves doivent trouver sur le plan les rues de l'énoncé, et la situation des divers commerces.
- 2- Mise en commun des résultats, et bilan sur les connaissances rencontrées.

À retenir

1. Deux droites se coupent en formant 4 angles, ou 2 angles s'il y a une demi-droite.
2. Quand les droites sont perpendiculaires, les 4 angles sont égaux : ce sont des angles droits.
3. Le codage des angles par un arc qui représente leur ouverture.
4. La façon de nommer des angles.
5. Les côtés d'un angle sont des demi-droites partant du sommet de l'angle.

Compléments

- 1- L'objectif est de faire identifier des angles dans un contexte de la vie. Les rues sont représentées par des droites ou demi-droites : travail de modélisation, où les notions de droites et demi-droites prennent du sens.
- 2- Inciter les élèves à faire des tracés sur le plan.
- 3- On a un bon exemple de réinvestissement de compétences de la partie « Questionner le monde » du cycle 2.
- 4- Quand 2 droites se coupent il y a 4 angles possibles pour situer le commerce, d'où la nécessité de préciser duquel on parle, et donc de trouver un moyen de nommer ces 4 angles.
- 5- Pour les élèves plus rapides, on peut envisager une dernière partie où ce sont eux qui se posent (entre eux) des questions sur la localisation de certains lieux : textes utilisant le mot angle.

CM1&CM2 / Les angles / séance 3

Panneaux solaires



Peux-tu indiquer sur chaque photo les angles d'inclinaison de ces panneaux solaires ?
Que peut-on dire de ces angles ?...

Le Collège PMF de Mireuil



À partir de la vue aérienne du collège de Mireuil, indique les angles que font les murs du collège.
Combien y a-t-il d'angles droits ?
Combien d'angles sont plus grands qu'un angle droit ?
Combien d'angles sont plus petits qu'un angle droit ?



30 minutes pour le travail de recherche
15 minutes pour la synthèse



Travail individuel ou en groupes (par 4 ou binômes)
synthèse en classe entière



- Photocopie des documents et équerre

Modéliser - Représenter - Communiquer

Repérer des angles - Connaître son environnement

Déroulement

- 1- Travail individuel qui peut se mener au sein d'un groupe. Les groupes ont intérêt à être homogènes, même si des CM2 peuvent venir en aide à des CM1 à la demande du professeur. Les élèves doivent identifier des angles sur des représentations ou des photos.
- 2- Mise en commun des résultats, et bilan sur les connaissances rencontrées.

À retenir

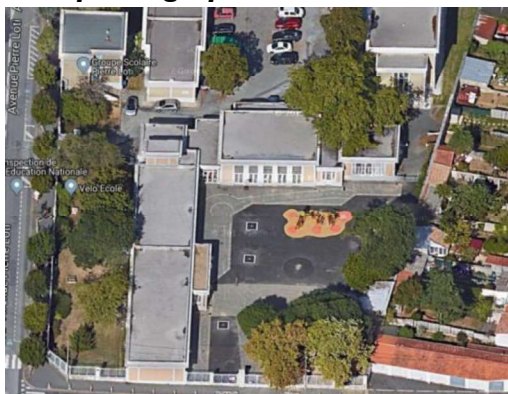
1. Un angle mesure une inclinaison, un écartement entre 2 murs.
2. Plus le deuxième côté d'un angle est écarté du premier côté, plus l'angle est grand (ouvert).
3. Si un angle est plus grand qu'un angle droit, c'est un angle obtus.
4. Si un angle est plus petit qu'un angle droit, c'est un angle aigu.

Compléments

- 1- L'objectif est de faire identifier des angles dans un contexte de la vie. Pourquoi tous les panneaux solaires n'ont-ils pas la même inclinaison ? On peut élargir le problème en demandant aux élèves pourquoi, suivant les régions, les toits n'ont pas la même inclinaison. Davantage de détails sur : https://www.m-habitat.fr/toiture/types-de-toitures/les-normes-sur-les-pentes-de-toiture-4174_A.
- 2- Inciter les élèves à faire des tracés sur les documents.
3. Les comparaisons avec l'angle droit vont être l'occasion d'utiliser l'équerre. On peut montrer aux élèves que si l'on n'a pas d'équerre, on peut en fabriquer une en pliant une feuille de papier deux fois pour former deux droites perpendiculaires (réinvestissement des connaissances du cycle 2).

CM1&CM2 / Les angles / séance 4

Arpentage par cheminement



Il s'agit de faire le plan d'une zone polygonale de son école en réalisant un arpentage de cette zone par cheminement : longueur, angle, longueur, angle...



45 minutes pour l'activité
5 minutes pour la synthèse



Travail en 5 équipes
synthèse en classe entière



- 5 fausses équerres, 5 ficelles
- 5 feuilles de papier format A4 minimum

Modéliser - Représenter - Raisonner

Utiliser des instruments, relever un angle, tracer un angle, réduction (1/2)

Déroulement

- 1- Sur le sol de la classe ont été tracées, avec des bandes de ruban adhésif, 5 figures quelconques dont les longueurs des côtés sont comprises entre 20 cm et 50 cm : 2 triangles, 2 quadrilatères, 1 pentagone (il faut faire en sorte qu'à l'échelle $\frac{1}{2}$, elles tiennent dans une feuille A4).
- 2- Le professeur explique que le travail à faire est le même que celui du géomètre qui veut faire un plan, explique la méthode du cheminement, montre les instruments qu'il va falloir utiliser (une fausse équerre pour prendre l'ouverture des angles, une ficelle pour prendre la longueur des côtés), la feuille sur laquelle sera dessinée la figure (en réduction).
- 3- Le professeur répartit la classe en 5 équipes, chaque équipe reçoit une fausse équerre, une ficelle, une feuille de papier blanc, et prend un crayon papier.
- 4- Chaque équipe effectue des mesures et réalise la figure en réduction.
- 5- Bilan du travail des équipes.
- 6- Le point sur ce que l'on a fait et appris.

À retenir

1. La fausse équerre sert à prendre l'ouverture d'un angle et à la reporter sur une feuille.
2. Quand on reproduit une figure en plus petit, les côtés sont plus petits, mais les angles gardent la même ouverture.

Compléments

- 1- Il faut que les élèves réalisent que pour tracer une figure, il ne faut pas mesurer tous ses angles et tous ses côtés. Pour le triangle il faut 3 mesures (sur les 6 possibles). Les 3 autres permettent de vérifier si la construction est juste, et sinon de corriger les erreurs de mesure ou de tracé. Et pour un quadrilatère ? Et pour un pentagone ?
- 2- Il vaut mieux constituer les équipes par niveaux, en donnant aux CM1 le travail sur les triangles (où il y a le moins de mesures à faire, et où ils découvrent la fausse équerre). On peut laisser chaque équipe s'organiser, où affecter des rôles : le mesureur d'angles, le mesureur de côtés, le contrôleur, les aides. Si une équipe a fini avant, on lui propose de refaire le travail en échangeant les rôles, et de comparer les 2 figures obtenues (qui doivent être identiques : comment le savoir ?). On peut refaire une séance en changeant de figure pour les équipes.

CM1 / Les angles / séance 1	
Découverte Ex 1/ p. 61 	25 minutes pour le travail de « reproduction » 10 minutes pour la synthèse 15 minutes pour l'application
	Par groupes d'au moins deux pour pouvoir corriger la position, voire même en classe entière Ex 1/ Reproduire la « position » avec les mains ou le corps de chacune des photos. (dans l'idéal vidéo-projetées, une à une). Ex 2/ Prenez en photo un petit angle, un grand angle, un angle moyen.
Compétence / Questionnement : Définir et comprendre la notion d'angle	
Déroulement : - Ex 1 : La reproduction de chaque photo se fait en « équipe » avec l'aide du/des voisin(s) pour corriger la position. On peut demander pour la première photo de la reproduire avec les bras (le buste pour la partie verticale, les bras pour terminer le « Y »). - Structuration des connaissances : définition de l'angle ensemble + grande question : quand parle-t-on d'angle, d'ouverture ou d'écartement ? - Ex 2 : Prise de photos (un petit angle, un grand angle, un angle moyen) puis discussion à partir des réponses données.	
À retenir : Définition de l'angle (ouverture, écartement)	
Compléments : Volontairement on ne parle pas d'angle dès les premières secondes mais à la fin de l'activité après qu'il a été question d'ouverture, d'écartement ou même d'orientation, lorsque les élèves corrigent leurs camarades. Si ce qu'est un petit angle ne pose pas vraiment problème, ce qu'est un grand angle en revanche n'est pas forcément aussi « intuitif ». Le mime avec les bras ou l'image du mouvement des ailes d'un oiseau pendant son vol peut amener vers l'angle plein même si, dans cette première séance, il n'est pas encore question de donner un nom à ces angles autres que celui que donnent les élèves.	

CM1 / Les angles / séance 2

Un vol au ralenti



Comparer les angles formés par les ailes du hibou grand-duc.

Compétence / Questionnement :

Définir, comparer
comprendre la notion d'angle



Série de photos
prises la veille

Déroulement :

- 1- Rappel de ce qui a été fait la fois précédente
- 2- Comparaison des angles moyens avec une série de photos prise la fois précédente – phase de recherche
- 3- Mise en commun des réponses
- 4- Exercice hibou grand-duc
- 5- Mise en commun – Synthèse pour le marquage.



groupe classe

par groupe de 2

groupe classe
individuellement
groupe classe



15 minutes pour le
rappel et la phase de
recherche

10 minutes pour la
mise en commun

20 minutes : exercice
et mise en commun

À retenir :

Définition de l'angle, marquage, type d'angle (et notamment plus que l'angle plat)

Compléments :

Aucune méthode pour la comparaison n'est à exclure (avec les doigts, deux règles, par superposition, à partir d'un gabarit ...) mais on peut évoquer les avantages et défauts des différentes méthodes (par exemple pour la superposition le fait que ce n'est pas toujours possible, pour les doigts le manque de précision, pour le gabarit qu'il va en falloir plusieurs et que cela prend du temps à fabriquer ...).

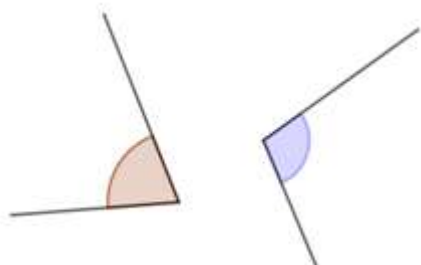
L'exercice avec le hibou grand-duc amène à une discussion sur l'angle qu'on considère (celui formé par les ailes côté ventre ou côté dos du rapace) et donc à la nécessité du marquage pour lever l'ambiguïté.



CM1 / Les angles / séance 3

Comparer

Ex 1 : Comparer les angles ci-dessous :



Ex 2 :

Combien d'angles pouvez-vous compter « dans » ce cerf-volant ? Comparer ces angles.



Compétence / Questionnement :

Comparer / Comparer des angles

Déroulement :

- 1- Ex 1 en classe entière (mise en commun : on répertorie idées et techniques de la séance précédente)
- 2- Ex 2 individuellement (Application)
- 3- Mise en commun



10 minutes pour la recherche
10 minutes pour la mise en commun
20 minutes : application et leçon

À retenir :

Techniques pour comparer
Notation des angles
Classement des angles (terminologie : aigu, droit, obtus)

Compléments :

Les élèves sont ici confrontés à un grand nombre d'angles (certains avec un sommet en commun), pour pouvoir communiquer il va falloir trouver une façon de les nommer. Trouver le nombre exact d'angles n'est pas ici le plus important, mais on peut noter qu'il y a 3 angles de sommet la liaison corde / cerf-volant. Sans trop insister sur la dénomination, le marquage (en utilisant différentes couleurs par exemple) va permettre de les comparer. La comparaison n'est pas aisée compte tenu du nombre d'angles, elle devient plus facile après un classement, plus petit, plus grand que l'angle droit. Pour les plus rapides on peut demander le nombre total d'angles. Pour les élèves qui seraient en difficultés on peut demander le classement d'un nombre limité d'angles identifiés ; on pourrait aussi inverser les deux exercices.

CM2 / Les angles / séance 1

Les grandes questions

Qu'est-ce qu'un angle ?

Que doit-on savoir ou savoir-faire sur les angles ?

Quand parle-t-on d'angle ?

Puis éventuellement :

Quels types d'angles connaissez-vous ?

La Charpente

Marquez deux angles aigus, un angle droit, deux angles obtus et un angle qui n'est ni aigu, ni droit, ni obtus. Comparez ces six angles.



Compétence / Questionnement :

Définir, comparer

comprendre la notion d'angle, savoir comparer deux angles

Déroulement :

- 1- Sur le cahier et individuellement, répondre aux grandes questions
- 2- Mise en commun des réponses
- 3- Exercice sur la charpente
- 4- Mise en commun



15 minutes pour les étapes 1 et 2
10 min pour l'exercice sur la charpente
15 à 20 minutes pour la mise en commun

À retenir :

Définition de l'angle, connaître les différents types de tâches sur les angles (en particulier la comparaison).

Compléments :

Les grandes questions sont l'occasion de faire une évaluation diagnostique. En fonction des réponses, on peut reprendre quelques-unes des premières séances de CM1, sur la définition d'un angle, sur son marquage et les différents « types » d'angles.

De même on peut revoir les différentes techniques de comparaison/de report pendant quelques séances avant de donner la fausse équerre.

On peut prolonger l'exercice de la charpente en demandant, après avoir placé des points sur la photo, de lister l'ensemble des angles et de les comparer.

CM2 / Les angles / séance 2

Entrouvrir

Ouvrir un livre, la porte de la classe ou une fenêtre de l'angle ci-dessous :



Le cerf-volant



Classer les angles du cerf-volant dans l'ordre croissant

Puis, bien séparé de la question précédente :

Expliquer pourquoi le cerf-volant a deux angles égaux

Compétence / Questionnement :

Comparer
Savoir comparer deux angles

Déroulement :

- 1- Ex entrouvrir + mise en commun
- 2- Ex cerf-volant (application de ce qui a été fait à la séance précédente) + mise en commun
- 3- On donne la fausse équerre dont on rappelle le fonctionnement (voir expérience 1 : prendre un angle de la partie 6 Ressources / Équipements d'instruments et expériences)
- 4- Activité mentale : une comparaison d'angles



15 minutes
15 minutes

5 minutes

5 minutes

À retenir :

Techniques de comparaison et de reports
Concept de symétrie et incidence sur les angles (sans qu'il y ait de synthèse à ce moment)
Utilisations de la fausse équerre

Compléments :

Il est question ici de se réapproprier lentement les techniques vues en CM1 et présentées/travaillées lors de la séance 1. Si on juge l'exercice d'application avec le cerf-volant trop simple on peut reprendre celui de la séance CM1-3.
Il est intéressant (cela peut d'ailleurs être l'objet d'un travail avec les élèves) de trouver toutes les possibilités d'utilisation de la fausse équerre.

Des études de situations

Il s'agit ici de comptes rendus de travaux faits en classe pour travailler les 5 questions qui servent de cadre à l'étude des angles en cycle 3.

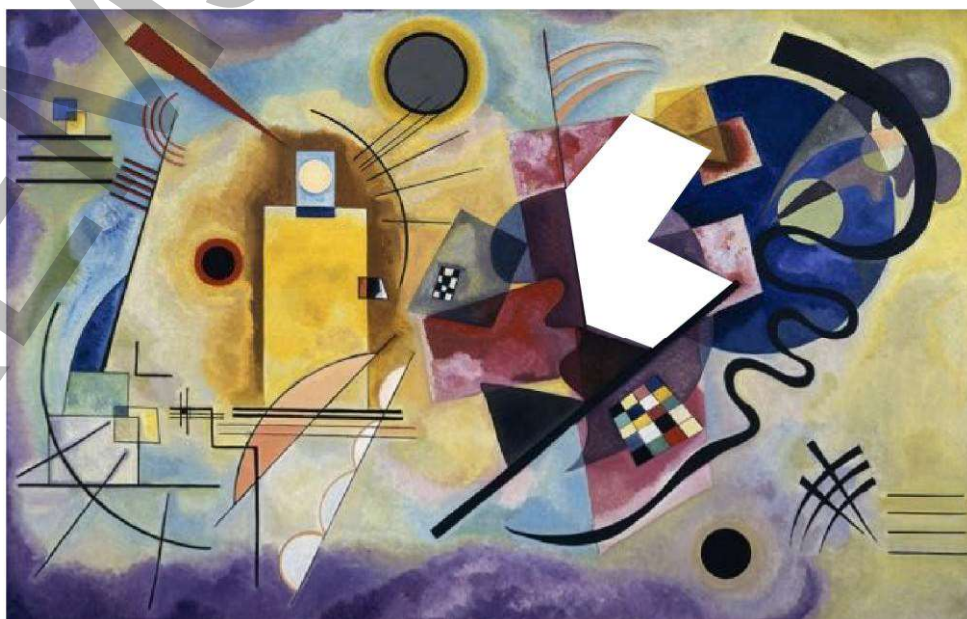
Niveau CM1/CM2 : Comment définir un angle ?

Un tableau de Kandisky

La situation consiste en la reconstitution d'une partie d'un tableau. Dans notre cas, nous avons choisi comme étude le tableau de Vassily Kandinsky, *Jaune-Rouge-Bleu*, huile sur toile, peint en 1925 :



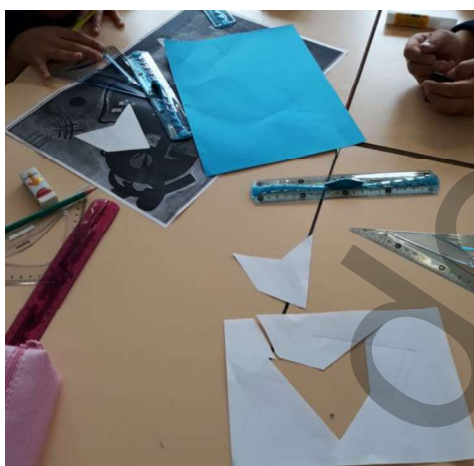
Nous fournissons aux élèves en format A4 une photocopie de ce tableau dans lequel a été découpée une partie.



La consigne est de reproduire une pièce pouvant parfaitement s'insérer dans la partie ôtée afin de pouvoir ensuite compléter ce tableau. Comme dans le traité de Clairaut (voir

l'introduction, et la partie *Histoire* de la partie 6 *Ressources*), l'angle va apparaître comme une notion incontournable pour reproduire une figure : ici il s'agit de la pièce manquante.

La séquence se déroule en trois temps, correspondant à trois séances. La première consiste à laisser les élèves libres de mettre en œuvre les procédures qu'ils veulent après avoir distribué le tableau avec le trou et une feuille blanche. Nous affichons un modèle de l'œuvre au tableau et nous superposons les pièces trouvées, tracées et découpées par les groupes. Nous constatons que toutes les pièces sont parfaitement superposables. En fait, ceci s'explique par le fait que tous les groupes ont procédé par décalquage. Les procédures attendues sont le décalquage, ou bien la reproduction des longueurs des côtés de la pièce manquante, ou le pliage pour reproduire les angles.



La deuxième séance consiste à laisser les élèves libres de mettre en œuvre les procédures qu'ils souhaitent après avoir distribué une feuille épaisse de couleur, pour les contraindre à changer de méthode. Ensuite, vient le moment où ils doivent confronter le modèle et les pièces produites et observer si elles conviennent. Nous constatons qu'un seul groupe est parvenu à produire une pièce parfaitement superposable avec le modèle. Les procédures attendues sont la reproduction des longueurs des côtés de la pièce manquante, le pliage pour reproduire les angles. Comment l'expliquer ?

Ceci résulte du fait que les élèves du groupe ont plié leur feuille pour reproduire les angles de la figure donnée. Les autres groupes ont mesuré les côtés de la figure avant de les reproduire sur la feuille. Lors de la mise en commun, le groupe, qui a réussi, explique comment il a pu outrepasser la difficulté de cette activité : comprendre qu'un angle est caractérisé par l'écartement (nous l'appellerons ouverture) de ses côtés et non par la longueur de ceux-ci.

Pendant la troisième séance, les élèves vont découvrir la fausse équerre. Nous leur fournissons toujours le tableau avec la pièce manquante, la feuille A4 de couleur et une fausse équerre (fabriquée préalablement). Nous leur demandons de reproduire une nouvelle fois une pièce correspondant parfaitement à la pièce manquant du tableau en utilisant le matériel mis à leur disposition. Les procédures attendues sont une utilisation de la fausse équerre pour reproduire les angles et une reproduction des longueurs des côtés de la pièce manquante. Nous passons dans tous les groupes afin de s'assurer d'une bonne utilisation de la fausse équerre, qui reste un outil très intuitif. Le constat est que toutes les pièces sont parfaitement superposables car tous les groupes ont respectés la « mesure » des angles et la longueur des côtés.

Des exemples de cours (trace écrite)

Voici des exemples de ce qui a été fait, et qui peut être amélioré. Le problème de la trace écrite est délicat pour le professeur tant sur le fond que sur la forme. Pour le fond, nous renvoyons à la rubrique *Cours* de la partie 3 (*Analyse didactique*). Quant à la forme, les outils modernes permettent une grande variété de présentations. Les débats que nous avons à ce propos à l'IREM amènent chacun à évoluer pour adapter au mieux la trace écrite aux classes et aux publics dont il a la charge. Les exemples qui suivent sont souvent des compromis locaux entre les différents collègues. Ils montrent ce qui se fait ou peut se faire. Ils conforteront les uns et donneront peut-être de nouvelles idées aux autres.

Niveau CM1/CM2 : exemple 1

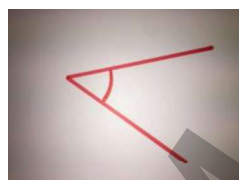
La fiche sur les angles qui est proposée, est complétée par 3 fiches d'identités sur des notions géométriques, fiches qui sont complétées au fur et à mesure des notions et figures rencontrées. S'y ajoutent 2 cartes mentales.

En voici la liste :

1. Mots utiles et codage (où figurent la définition de l'angle, sa notation, et son codage)
2. Figures planes + carte mentale
3. Figures symétriques + carte mentale sur les droites

Fiche : Angles

Comment reporter un angle ?

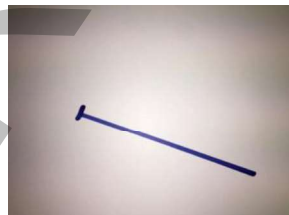


Avec du papier calque

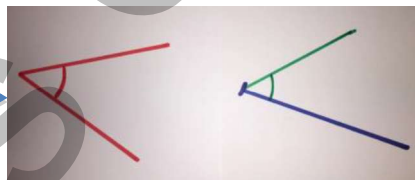
1. Reproduis l'angle sur un calque.



2. Trace une demi-droite.

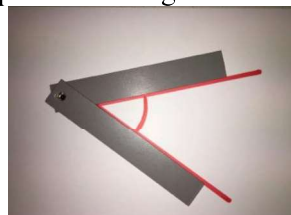


3. Place le calque en superposant le sommet de l'angle avec l'origine de la demi-droite et un côté de

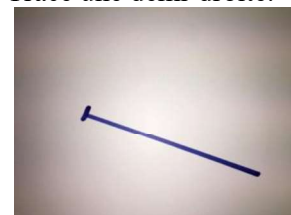


Avec une fausse équerre

1. Positionne la fausse équerre sur l'angle.



2. Trace une demi-droite.



3. Place la fausse équerre en superposant le sommet de la fausse équerre avec l'origine de la demi-droite et un côté de

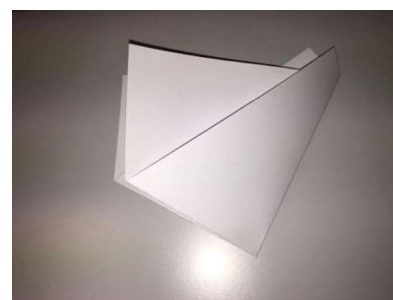
Comment obtenir un gabarit d'angle droit ?

On se munit d'une feuille.

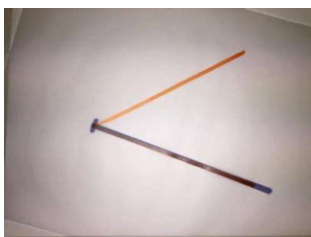
On marque un premier pli n'importe où.



On marque un deuxième pli en ramenant le premier pli sur lui-même.



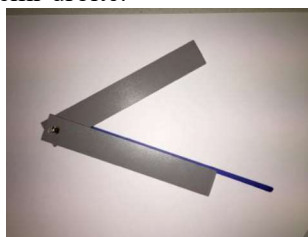
l'angle avec la demi-droite.



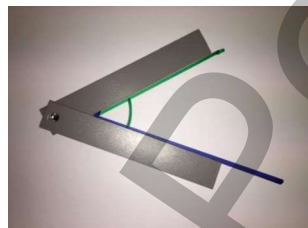
4. Repère la position du deuxième côté à tracer. Trace-le.



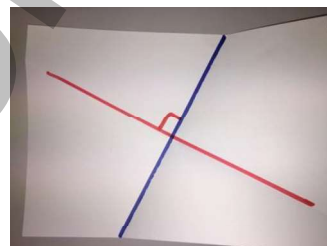
de la fausse équerre avec la demi-droite.



4. Trace le deuxième côté.



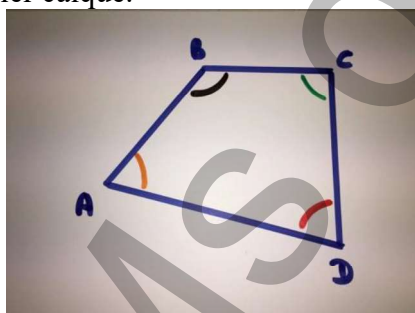
On obtient deux plis perpendiculaires.



Comment comparer des angles ?

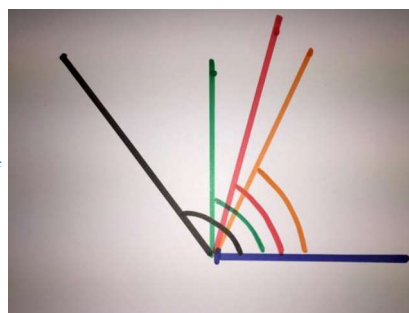
Avec du papier calque

1. Trace une demi-droite
2. Reporte les angles sur la demi-droite avec le papier calque.



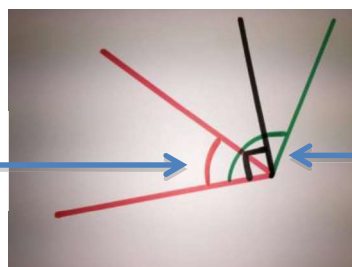
Avec une fausse équerre

1. Trace une demi-droite
2. Reporte les angles sur la demi-droite avec la fausse équerre.



Comment savoir si un angle est aigu ou obtus ?

Plus petit que l'angle droit :
aigu

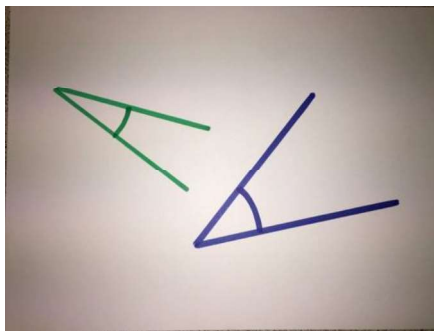


Plus grand que l'angle droit :
obtus

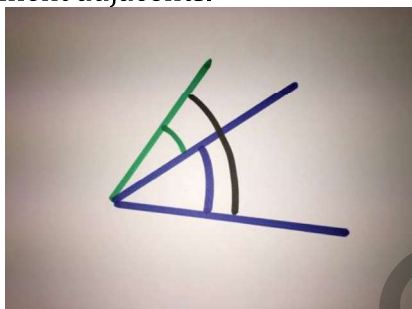
Angles adjacents

Définition : ce sont des angles qui ont le même sommet et un côté commun. Ils forment un angle plus grand que chacun d'eux qui est appelé leur somme (on a ajouté leurs ouvertures). Si l'on soustrait de la somme un des angles, on retrouve l'autre.

Comment additionner deux angles ?

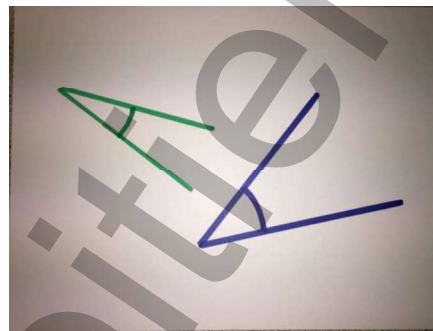


On reporte les deux angles pour qu'ils deviennent adjacents.

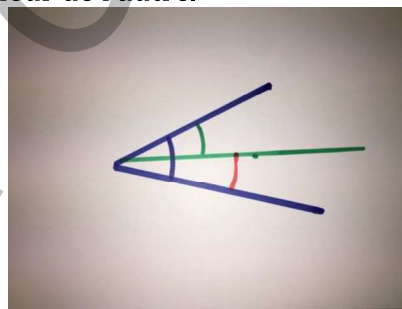


L'angle noir est la somme des deux

Comment soustraire deux angles ?



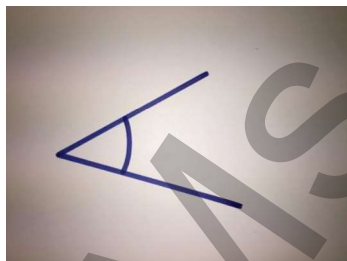
On reporte les deux angles mais l'un à l'intérieur de l'autre.



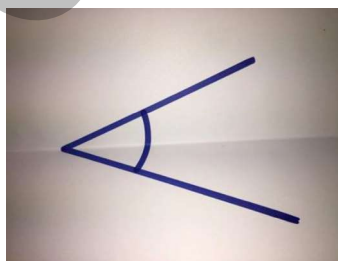
L'angle rouge est la différence des deux.

Comment diviser un angle en deux parties égales ?

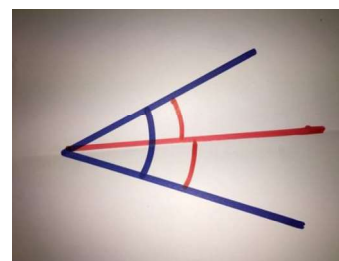
Par pliage



L'angle de départ.

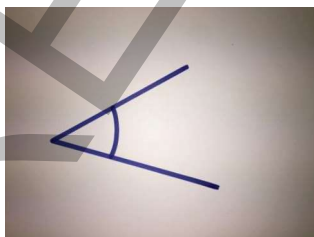


On plie de manière à superposer les deux côtés de l'angle.

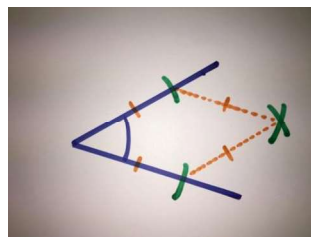


On trace le pli.

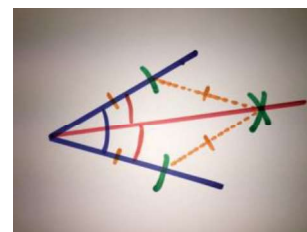
Par tracé



L'angle de départ.



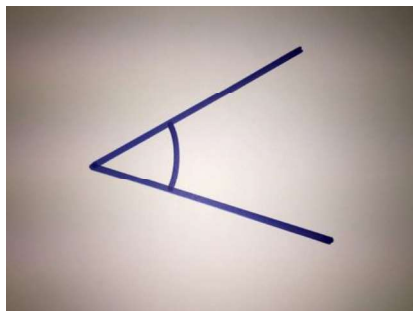
On trace 4 arcs de cercle de même rayon, ainsi faits.



On obtient un losange. On trace une diagonale du losange.

La droite rouge s'appelle la **bissectrice** de l'angle.

Comment mesurer un angle ?



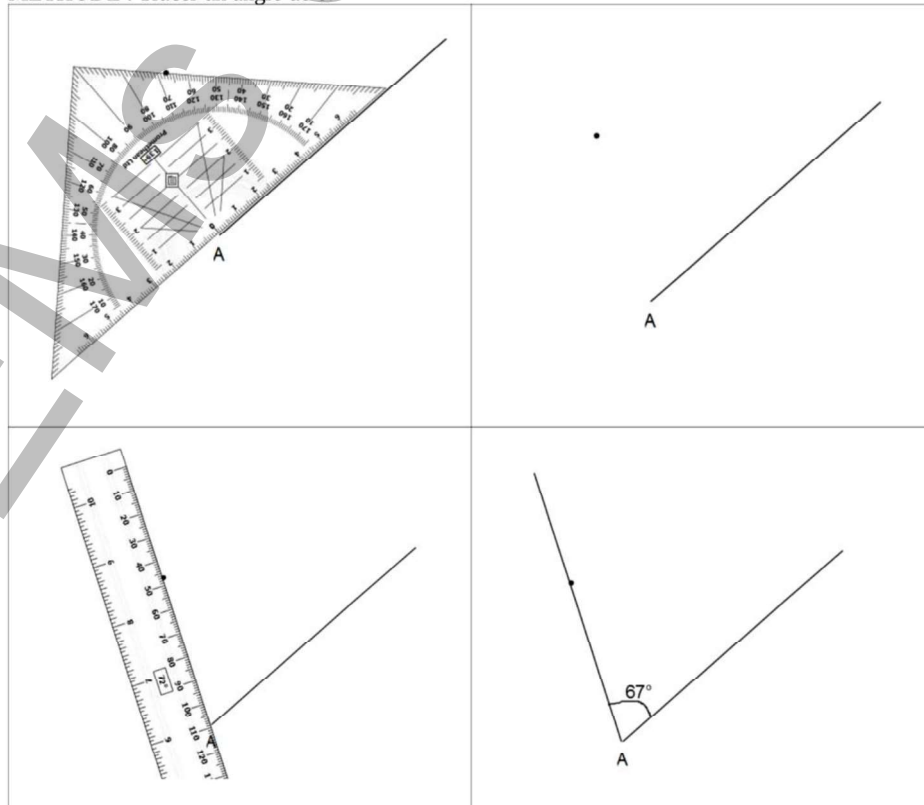
- 1) On place le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle, **et** la ligne 0° - 180° sur un côté de l'angle.
- 2) À l'endroit où le deuxième côté de l'angle coupe la graduation, on lit la mesure de l'angle (**en partant de 0°**).



Comment construire un angle de mesure donnée ?

- 1) On trace un côté de l'angle, et on marque son sommet : S.
- 2) On place le centre du rapporteur sur le sommet S, **et** la ligne 0° - 180° sur le côté de l'angle.
- 3) On repère la mesure donnée sur la graduation du rapporteur (**en partant de 0°**), et on place un point.
- 4) On trace le deuxième côté de l'angle qui part du sommet S et qui passe par ce point.

METHODE : Tracer un angle de 67°

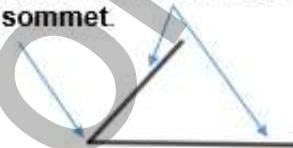


Fiche d'identité : Les angles



Qu'est-ce-qu'un angle ?

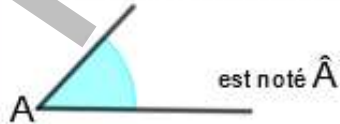
C'est l'ouverture, l'écartement formé par 2 demi-droites, les **côtés**, de même origine, le **sommet**.



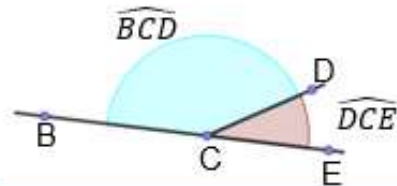
On le **marque** avec un arc de cercle



On le **note** à l'aide du sommet sur lequel est placé un petit angle



lorsqu'on en a besoin on rajoute un point de chaque côté dont on entoure le sommet :



Les différents angles :

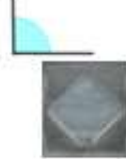
L'angle nul



l'angle aigu



l'angle droit



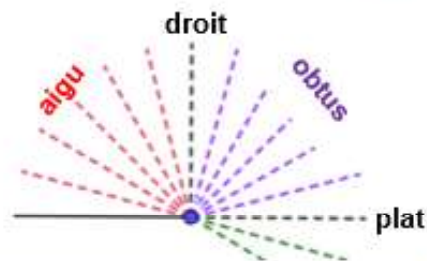
l'angle obtus



l'angle plat



et plus



Comparer

Deux angles sont égaux s'ils ont la même ouverture, ils sont donc superposables.

Image, photo

Un angle est plus petit que l'autre si lorsqu'on superpose les sommets il est à l'intérieur de l'autre angle

image photo

Reporter

C'est placer, reproduire le même angle à un autre endroit



Comment ?

avec du papier calque



avec un gabarit

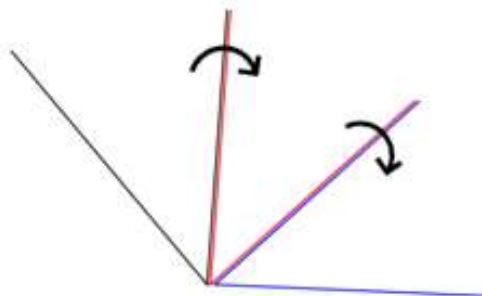
Photo gabarit sur angle

avec une fausse équerre



Multiplier

Pour construire un angle égal à plusieurs fois un autre, on reporte le même angle plusieurs fois en collant chaque nouvel angle au précédent (sommet sur sommet, côtés juxtaposés).



Partager

Pour partager un angle en deux angles de même mesure on peut faire un pliage.

La droite qui coupe un angle en deux angles égaux s'appelle la bissectrice. C'est l'axe de symétrie de l'angle.



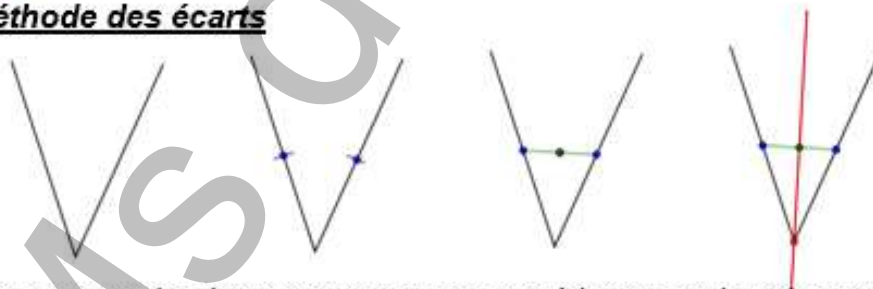
Pour plus de précision, pour être plus propre ou parce qu'on travaille sur logiciel on peut utiliser des deux techniques suivantes :

Méthode du losange :



- 1- Tracer un arc de cercle centré sur le sommet de l'angle (de n'importe quel rayon).
- 2- Tracer deux arcs de cercle de même rayon centrés sur les intersections des côtés avec le premier arc de cercle.
- 3- Tracer la droite passant par le sommet de l'angle et l'intersection des deux derniers arcs de cercle, elle coupe l'angle en deux angles égaux : c'est sa bissectrice.

Méthode des écarts



- 1- Au compas ou à la règle placer deux points sur les côtés de l'angle à la même distance du sommet.
- 2- Tracer un segment reliant les deux points obtenus et placer son milieu.
- 3- Tracer la droite passant par le sommet de l'angle et le milieu placé précédemment, c'est la bissectrice de l'angle.

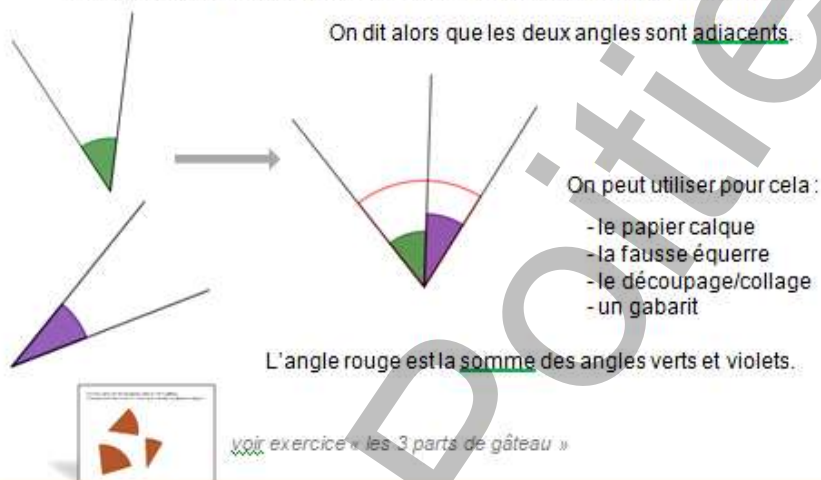
Pour partager un angle en 4 (en 8) angles égaux on partage en 2 et en 2 (et encore en 2).
Pour partager en 3, en 5, en 6 ... il n'y a pas de méthode avec la règle et le compas, on doit procéder par tâtonnement ou à l'aide d'un instrument comme un trisecteur (pour le partage en 3) :



Ajouter des angles

Pour ajouter des angles, on les « colle » par un côté, sommets sur sommet.

On dit alors que les deux angles sont adjacents.

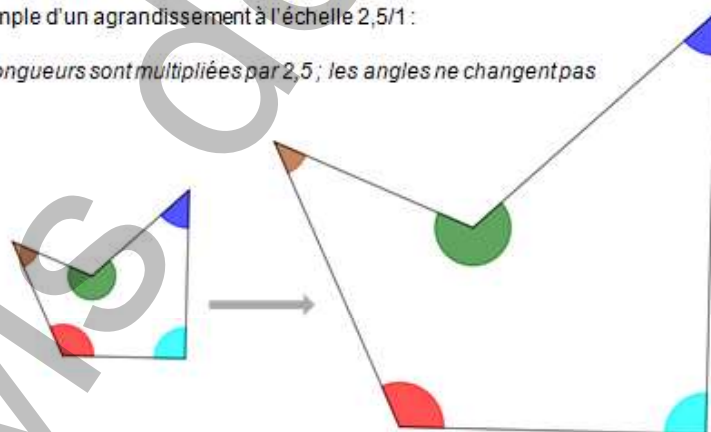


Agrandissement / Réduction

Lors de l'agrandissement ou de la réduction d'une figure, les longueurs sont multipliées ou divisées mais les angles ne changent pas.

Exemple d'un agrandissement à l'échelle 2,5/1 :

les longueurs sont multipliées par 2,5 ; les angles ne changent pas



Dans ce cours, nous avons mis l'accent sur l'aspect visuel (qui tient une part de plus en plus importante dans le fonctionnement de nos jeunes élèves) afin de faciliter les apprentissages. Pour s'approprier au mieux les concepts, nous multiplions les illustrations en essayant de varier les contextes. Pour éviter de trop longs paragraphes, qui pourraient décourager, nous avons construits des fiches techniques et des vidéos auxquelles nous pouvons renvoyer. En multipliant les supports nous espérons maintenir une certaine motivation et ainsi favoriser la réussite de tous les élèves.

Des documents, des images et des exercices sur lesquels les élèves ont travaillé sont insérés pour solliciter la mémoire de classe.

Enfin, afin de faciliter le repérage, nous avons encadré en vert ce qui tenait de la définition de l'angle et en rouge les savoir-faire.

Sources images : images sur la Toile (yoga exercices, blogilates mouvements), page sur le grand duc (<http://www.pascale-menetrier-delalandre.com/grand-duc-d-europe-momo-a125279916>)

Des activités mentales

L'activité mentale est un moment important dans la construction des savoirs et fait partie intégrante de la formation de l'élève. Elle est un support de travail de la grandeur *Angle* complémentaire du travail sur « papier » ou sur logiciel de géométrie.

Afin d'être efficace, ce type de travail doit être répété et rapide. Il peut donner lieu à un rituel régulier (une circulaire d'avril 2018 précise que l'activité mentale doit faire l'objet d'une pratique quotidienne).

Lorsque les activités mentales sont contextualisées, elles doivent être suffisamment simples pour ne pas nécessiter un temps trop long de dévolution. Ces situations sont propices à l'appropriation des notions et des savoir-faire.

Voici les types de tâches que nous avons choisis :

- en classe de CM :
 - comparer, classer plusieurs angles entre eux,
 - comparer à l'angle droit, c'est-à-dire reconnaître les angles aigus, droits ou obtus,
 - reproduire un angle tracé ou projeté au tableau avec une marge d'erreur que l'enseignant considère comme acceptable.
 - nommer un angle (plutôt en CM2)
- en 6^e (en plus de ceux de CM)
 - estimer la mesure d'un angle,
 - calculer la mesure d'un angle,
 - construire un angle dont on donne la mesure ou que l'on a représenté au tableau (projeté ou tracé) avec une marge d'erreur acceptée.

Enfin, il est intéressant de notre point de vue de passer du temps sur la correction de la (des) première(s) activité(s) mentale(s). D'une part, il est nécessaire de présenter et mettre en place les modalités de l'activité mentale propre à la grandeur travaillée (ce sera un gain de temps pour la suite), d'autre part, ce temps permet de revisiter les différentes notions et savoir-faire travaillés dans la grandeur *Angle*. Cela peut être fait par un élève qui justifie sa démarche et peut ainsi créer le débat avec l'aide de l'enseignant qui régulera les échanges entre élèves. Par la suite, la correction sera plus rapide : elle peut consister en une explication orale, une piste de correction ou un lien évoqué vers la leçon ou un exercice.

Si cela n'a pas été notre choix, l'activité mentale peut être l'objet d'une évaluation, à condition d'avoir été travaillée de nombreuses fois.

Vous trouverez ci-après quelques extraits de diaporamas proposés en école ou en 6^e que vous pourrez télécharger en totalité sur le serveur de l'IREM (pour les modalités d'accès, voir l'annexe 7 *Pour expérimenter*).

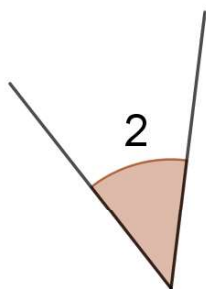
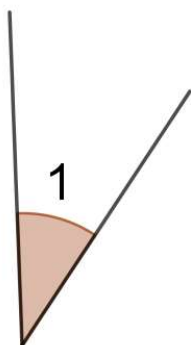
En classe de CM1 / CM2

- Comparer, classer plusieurs angles entre eux

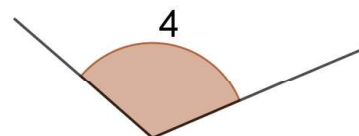
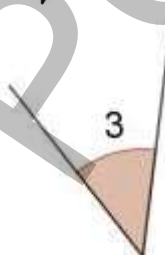
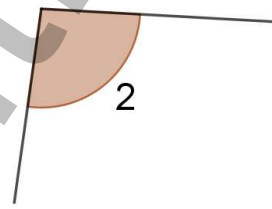
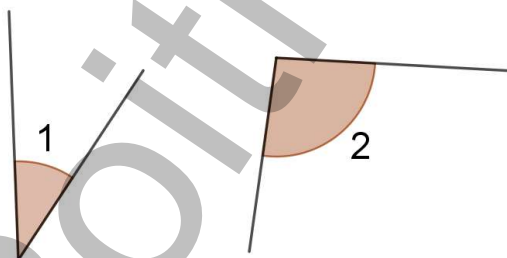
Quel est l'angle le plus ouvert ?

ou

Quel est l'angle le plus grand ?



Classer les angles ci-dessous dans l'ordre croissant :

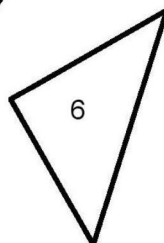
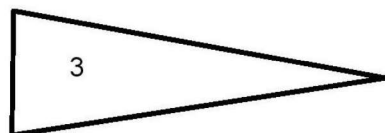
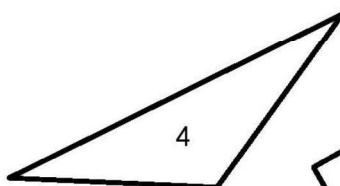
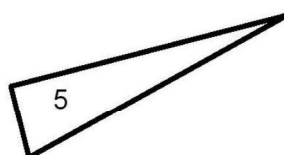
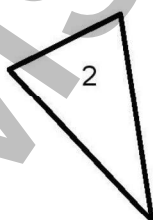
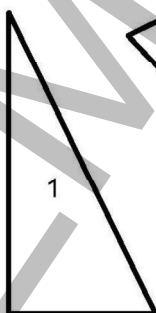


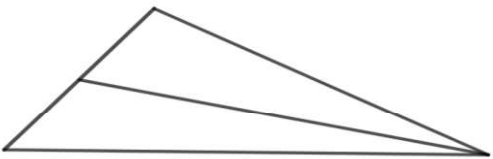
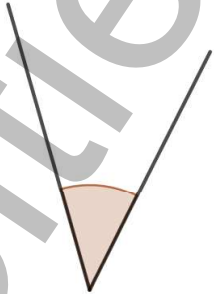
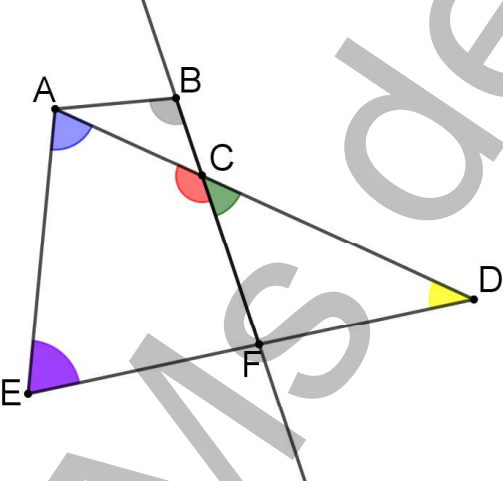
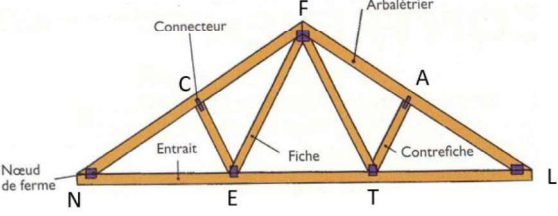
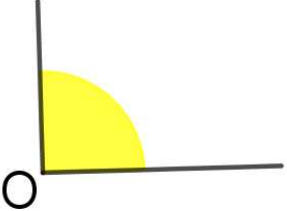
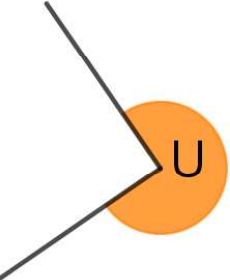
- Comparer à l'angle droit (reconnaître les angles aigus, droits ou obtus)

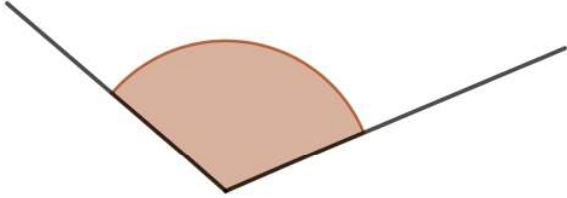
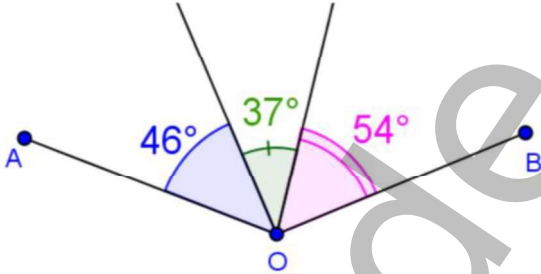
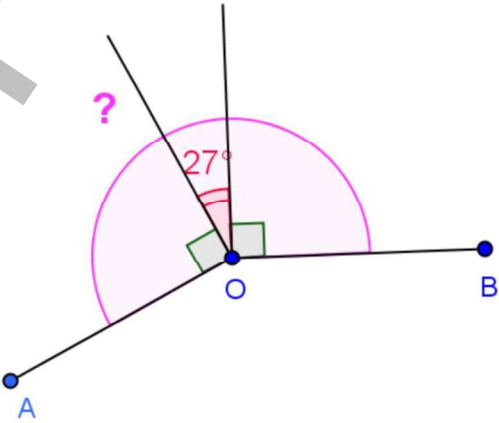
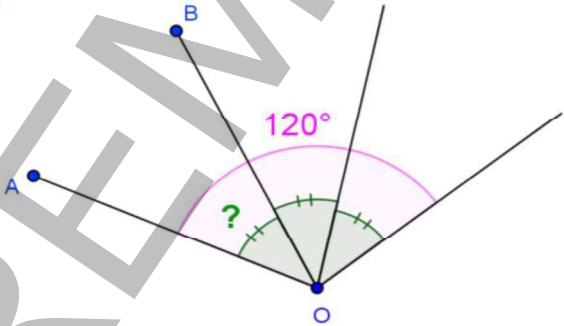
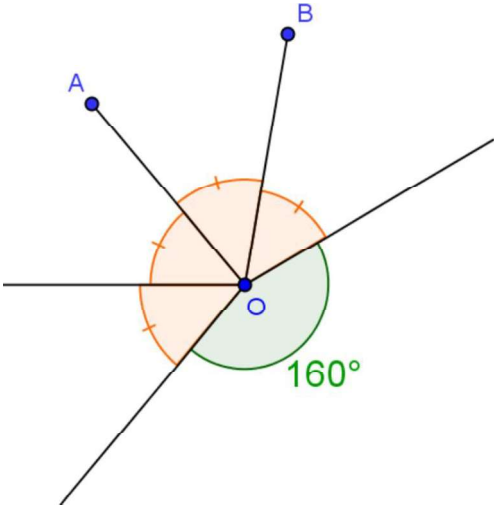
Donner les numéros des triangles qui semblent être rectangles (un angle droit)

ou

Donner les numéros des triangles qui semblent être isocèles (deux angles de même mesure)



Combien y-a-t-il d'angles aigus dans cette figure ? 	Reproduire un angle tracé ou projeté Reproduire l'angle ci-dessous 
En CM2 / 6^e - Nommer un angle - Comparer à l'angle droit et nommer un angle	
Nommer l'angle bleu 	Nomme 2 angles aigus ou Nomme deux angles égaux ou Nomme un angle obtus 
Comparer deux angles entre eux (comparaison relative)	
Combien de fois $\hat{O}$ dans $\hat{U}$?  	

En classe de 6 ^e	
Estimer la mesure d'un angle	Construire un angle de mesure donnée. <i>(sans rapporteur bien sûr)</i>
Quelle est la mesure de cet angle ? 	Tracer un angle de mesure 30°
Calculer la mesure d'un angle	
  Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$  	

Des évaluations

1) CM1/CM2 : déroulement 1

NOM :

Date :

Évaluation de mesures – CM1 – les angles

Compétences évaluées :

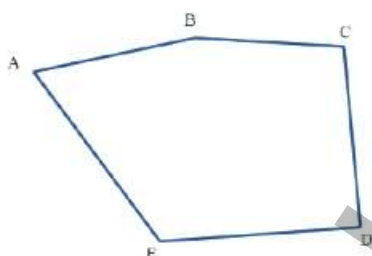
- savoir identifier, comparer et mesurer des angles
- savoir tracer des angles

1) Donne la définition des expressions suivantes

angle aigu :

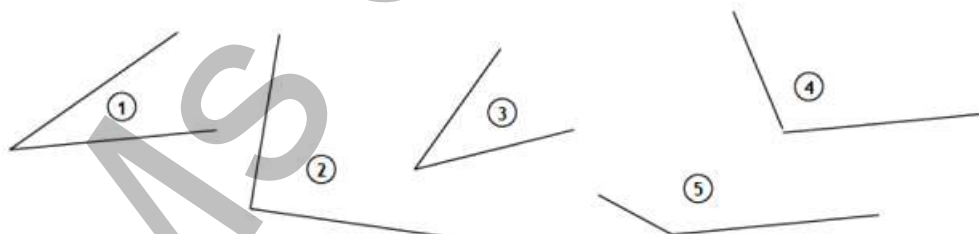
angle obtus :

2) Dans la figure suivante, indique quelle est la nature des angles marqués. Coche la bonne case.



Angle	Â	B	C	D	E
droit					
aigu					
obtus					

3) A l'aide de la fausse équerre, compare les angles suivants et range-les dans l'ordre décroissant.



4) Suis les instructions et trace les angles demandés

- Trace un angle obtus Â
- Trace un angle aigu Ê
- Trace un angle droit Î



NOM :

Date :

Évaluation de mesures – CM2 – les angles

Compétences évaluées :

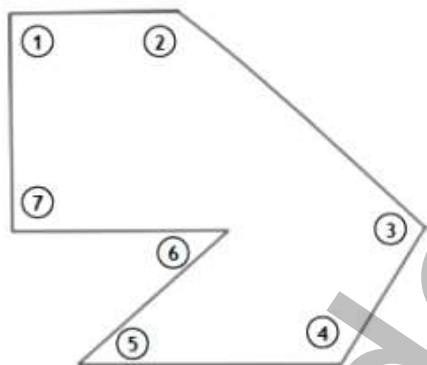
- savoir identifier, comparer et mesurer des angles
- savoir tracer et ajouter des angles

1) Donne la définition des expressions suivantes

angle aigu :

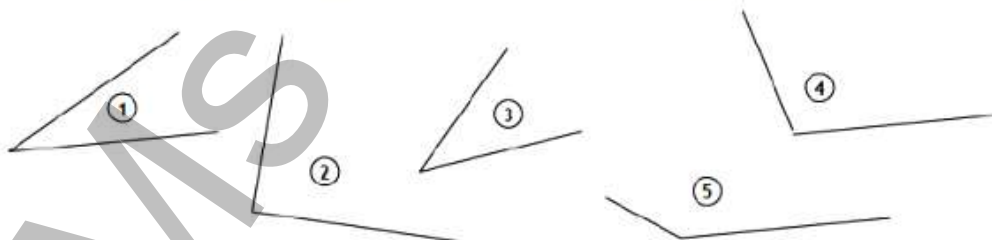
angle obtus :

2) Dans la figure suivante, indique quelle est la nature des angles marqués. Coche la bonne case.



Angle	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
droit							
obtus							
aigu							

3) A l'aide de la fausse équerre, compare les angles suivants et range-les dans l'ordre décroissant.



4) Suis les instructions et trace les angles demandés

- Trace l'angle obtus $\hat{A}$
- Trace l'angle aigu $\hat{E}$
- Trace l'angle droit $\hat{I}$
- Trace un angle $\hat{U}$ égal à $\hat{I} + \hat{E}$



2) CM1/CM2 : déroulement 2

Dans l'expérimentation du secteur de La Roche-Posay nous avons classé les évaluations en 3 catégories :

- les évaluations « À Savoir » permettent de vérifier l'état des connaissances. La remédiation éventuelle consiste à retravailler la leçon.
- les évaluations « Appliquer une technique » ont pour but de vérifier que ce qui a été pratiqué par les élèves de nombreuses fois est bien acquis. En cas de « non validation » il faudra refaire des exercices déjà faits en classe sur la technique à consolider.
- les évaluations « Raisonner » sont constituées d'exercices le plus souvent complètement nouveaux pour l'élève. Il devra avec ses connaissances, la leçon, sa logique et sa technique entamer une démarche, essayer de trouver une solution. Il n'y a pas de remédiation spécifique pour cette compétence : c'est en se confrontant régulièrement à ce type de situations que l'élève deviendra plus performant dans la prise d'initiative et la démarche de recherche. Les résultats à ces évaluations ne doivent pas inquiéter, seule la progression, l'évolution sur l'appropriation de ce type d'exercices est à apprécier. La réussite sur ce type d'évaluation peut d'ailleurs être indépendante du résultat trouvé mais liée au raisonnement mis en œuvre.

Nous vous présentons ci-après les différentes évaluations correspondant à la grandeur *Angles*. Vous y trouverez des exercices concernant la symétrie, travaillée au cours de l'étude de la grandeur. Aux évaluations CM2 on peut ajouter, des ou les exercices des évaluations CM1.

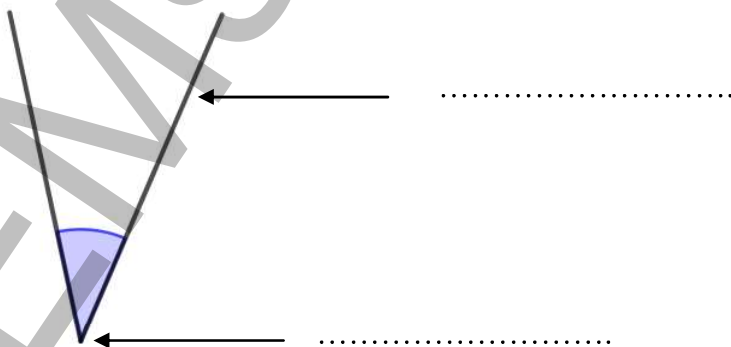
Les Angles – À savoir



Compléter :

Un angle aigu c'est

Un angle obtus c'est



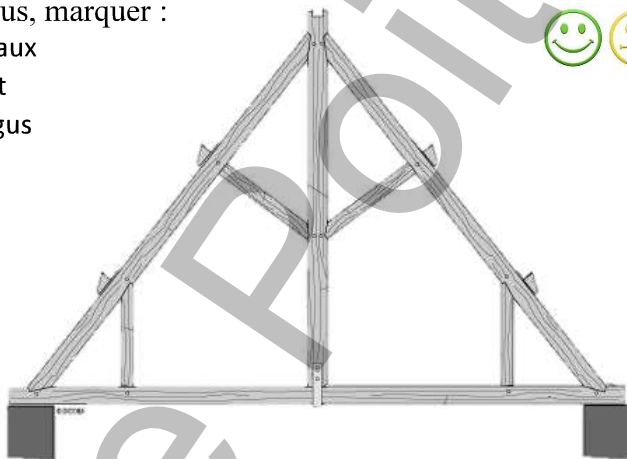
Classer en ordre croissant c'est

Les Angles CM1 – Appliquer des techniques

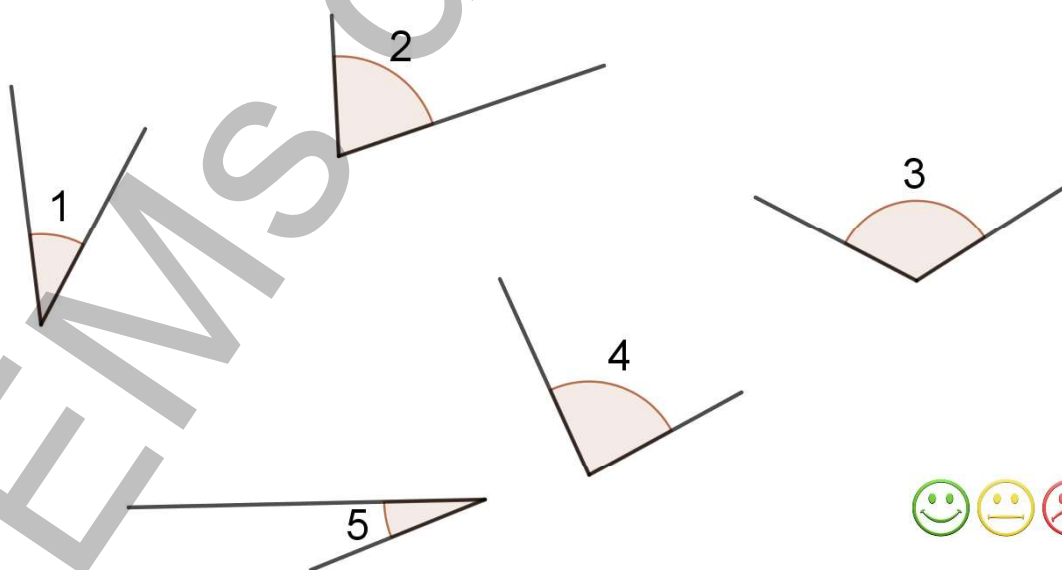


Sur la charpente ci-dessous, marquer :

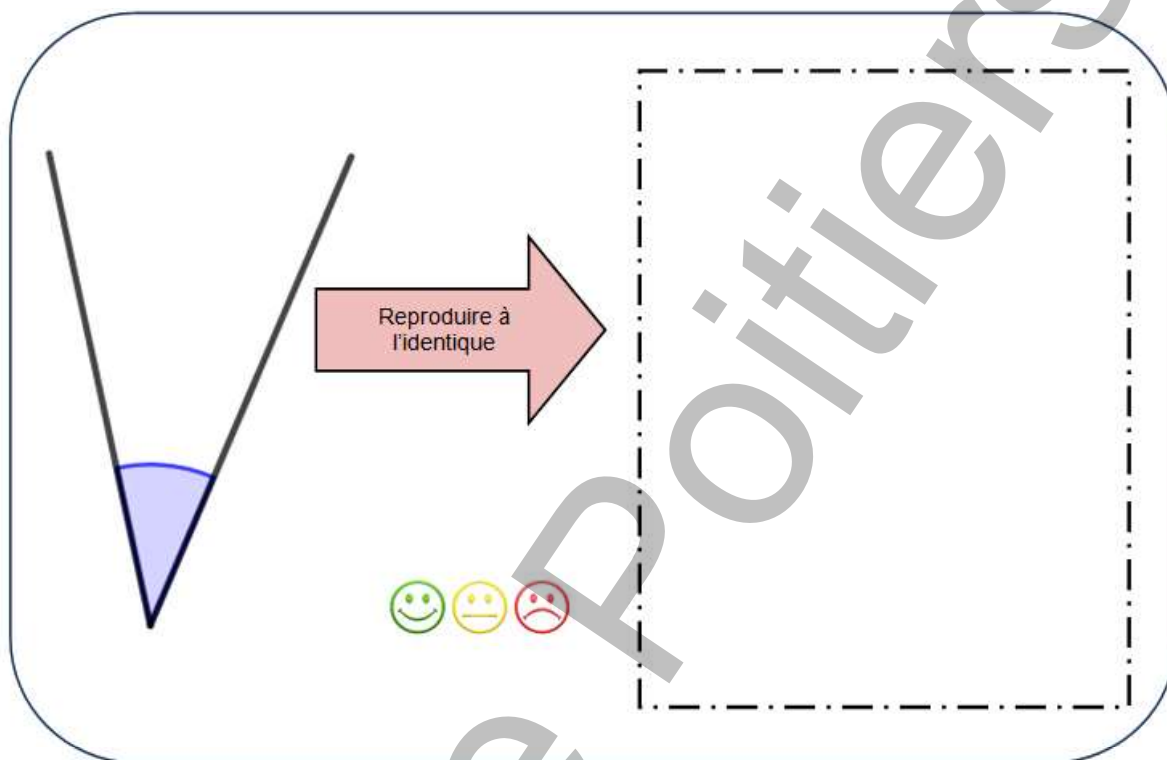
- en vert deux angles égaux
- en rouge un angle droit
- en bleu deux angles aigus
- en noir un angle obtus



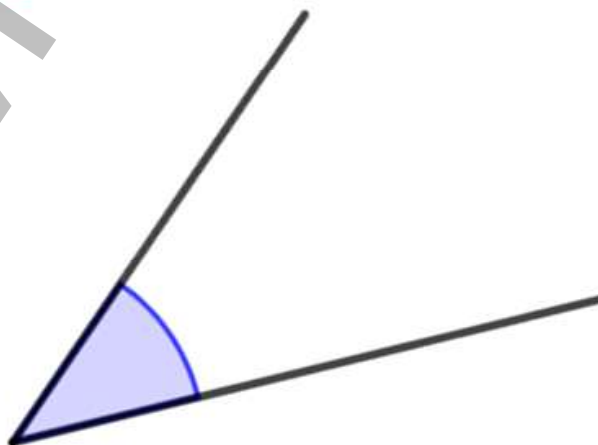
Classer dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) les angles suivants :



Source image : site safec.fr

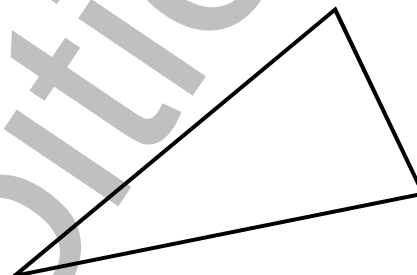
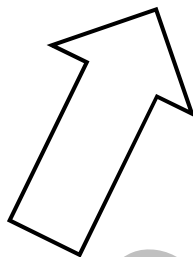
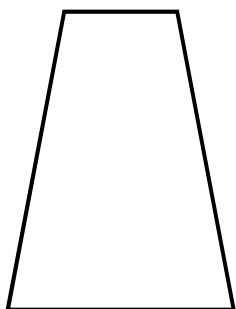


Partager l'angle ci-dessous en deux angles égaux avec tes instruments (sans pliage).
Laisser les traits de construction ou expliquer ta méthode.

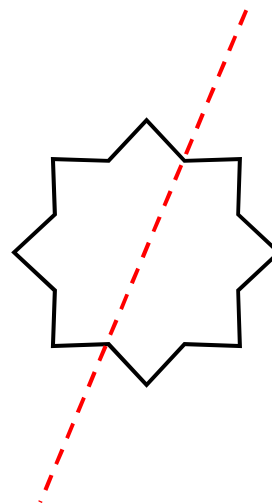
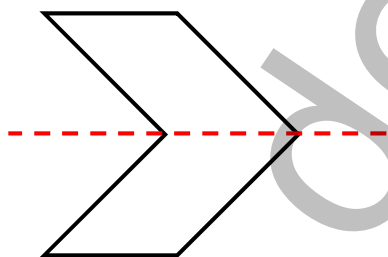


Pour chacune des trois figures ci-dessous :

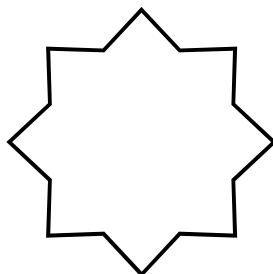
- tracez un axe de symétrie,
- marquez de la même couleur deux angles symétriques (qui se superposent par symétrie).



Le chevron et l'étoile ci-dessous sont symétriques par rapport à l'axe tracé en pointillé.
Pour chacune des deux figures, marquez deux angles qui se superposent par cette symétrie.



Combien l'étoile a-t-elle d'axes de symétrie ? Tracez-les ci-dessous.



Symétrie CM1 - Appliquer des techniques

Les Angles CM- Raisonner



Leçon autorisée – Laisser les traces de recherches, ne pas hésiter à expliquer, justifier.

Construire un hexagone avec 3 angles droits exactement :

Construire un quadrilatère avec trois angles aigus exactement :

Est-il possible de construire un quadrilatère avec deux angles droits qui n'a pas deux côtés parallèles ?

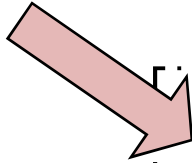
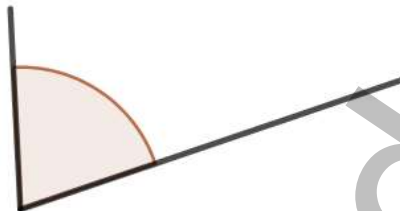
Combien de parts identiques à celle-ci-dessous contenait le gâteau à l'origine ?



Les Angles CM2 - Appliquer des techniques



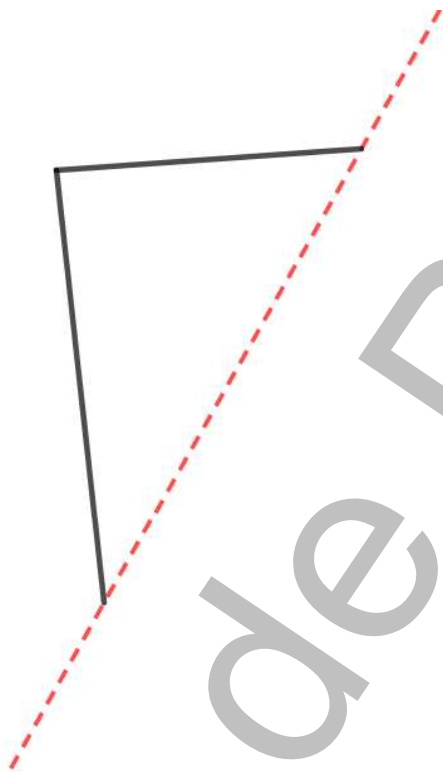
Additionner les deux angles ci-dessous



Reproduire en deux fois plus grand



Construire, sans plier, le symétrique de la figure par rapport à la droite en pointillés.
Laisser les traits de construction ou expliquer la méthode.



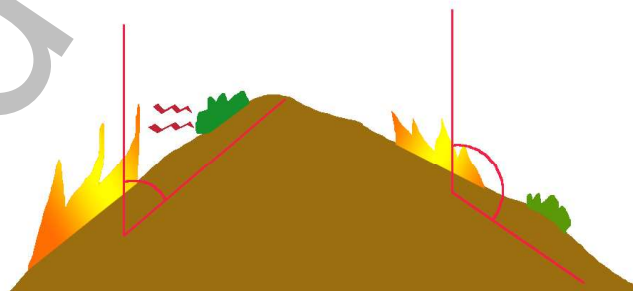
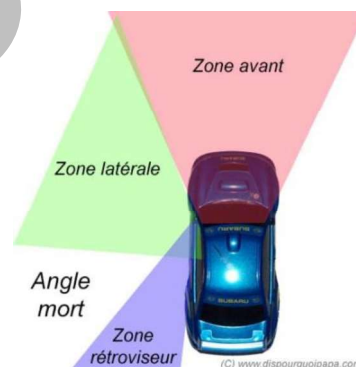
Symétrie CM2 - Appliquer des techniques

6. Ressources

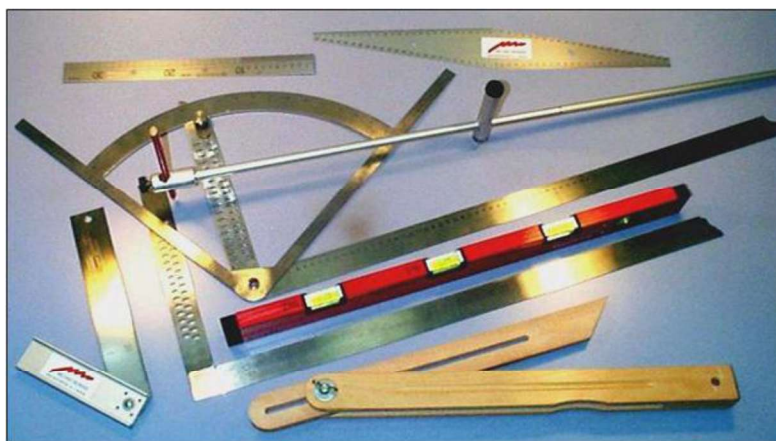
Écologie

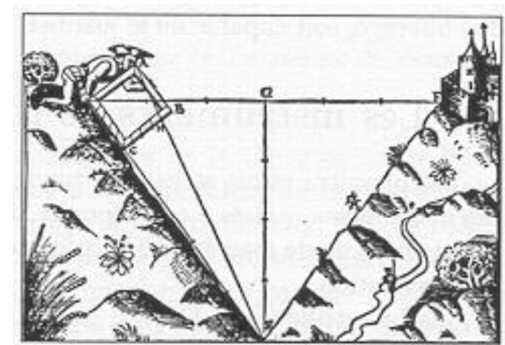
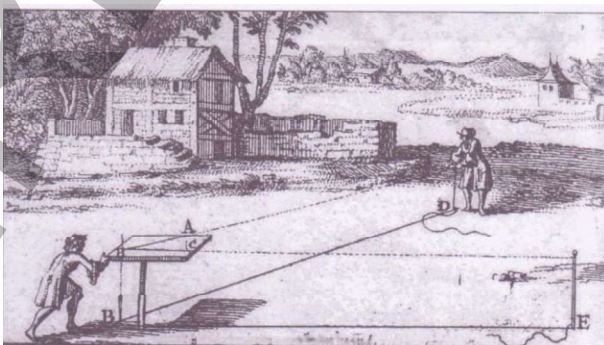
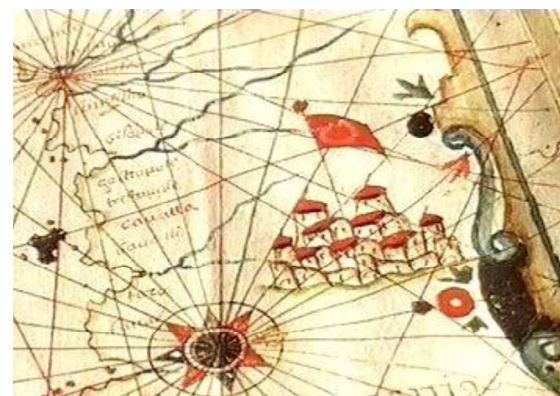
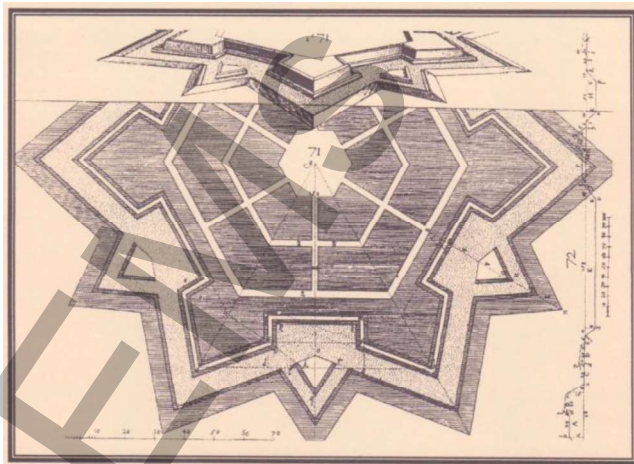
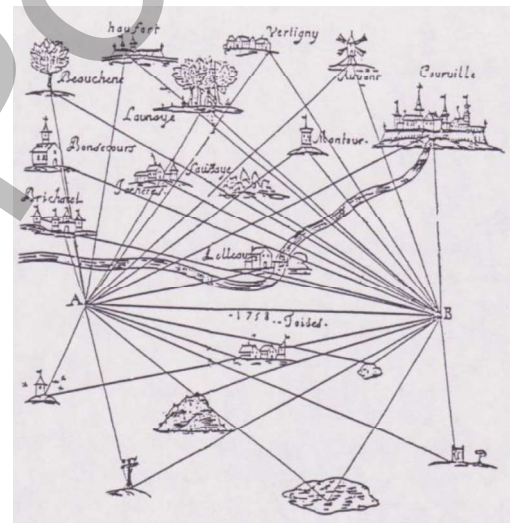
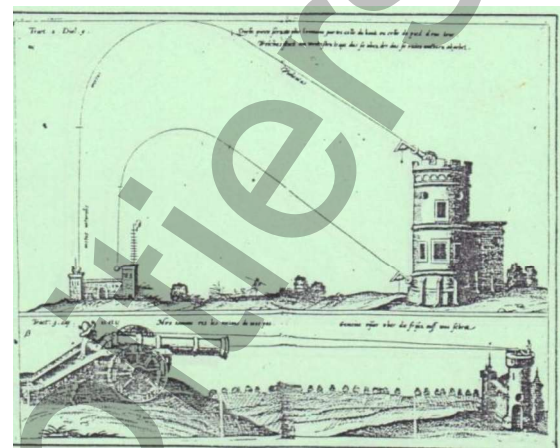
Où trouve-t-on la notion d'angle dans la vie des hommes ? À quoi leur sert-elle ? Qu'ont-ils besoin de savoir faire avec elle ?

Quelques images



La pente est primordiale, un feu progresse toujours plus vite en montée car la pente favorise le préchauffage de la végétation en avant du feu par le front de flamme. En effet, en montée, l'angle entre le feu et son combustible se trouve réduit, c'est le contraire en descente.





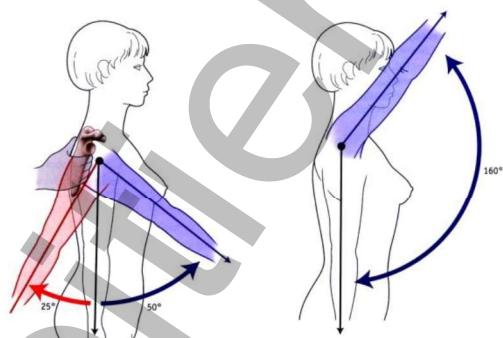
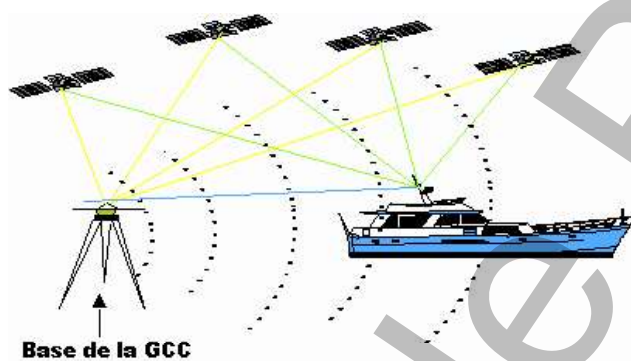
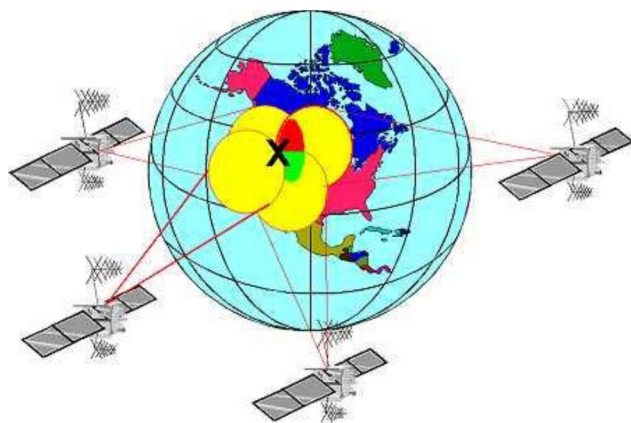


FIG. 9.32. Flexion du bras avec scapula libre

FIG. 9.31. Flexion (en bleu) et extension (en rouge) du bras (scapula fixe)

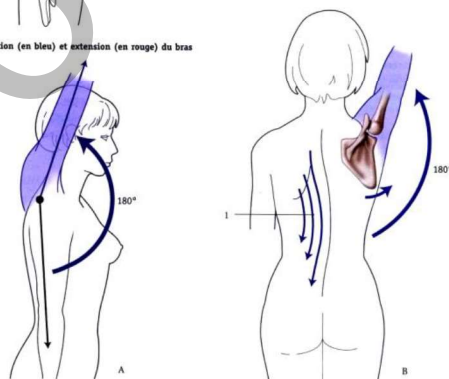
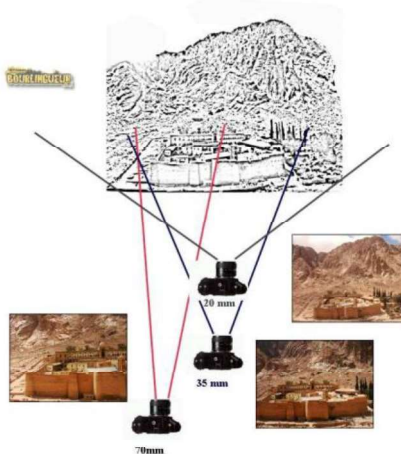
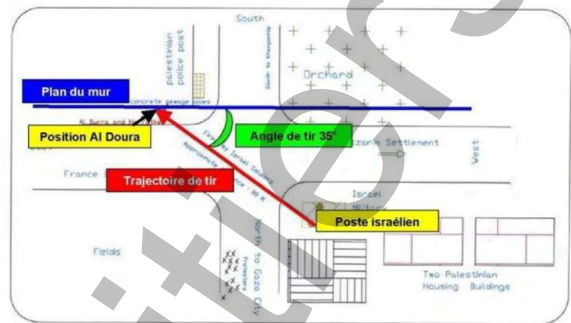
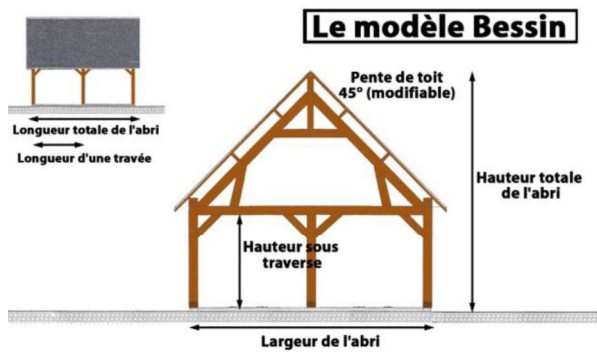


FIG. 9.33. Flexion du bras avec inclinaison du rachis

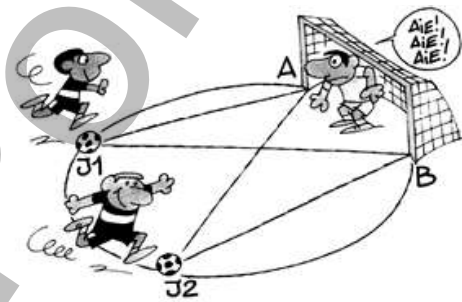
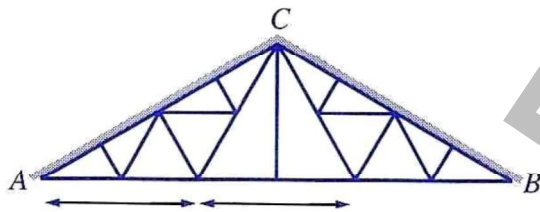
A. vue latérale B. vue dorsale

1. mm. extenseurs du rachis

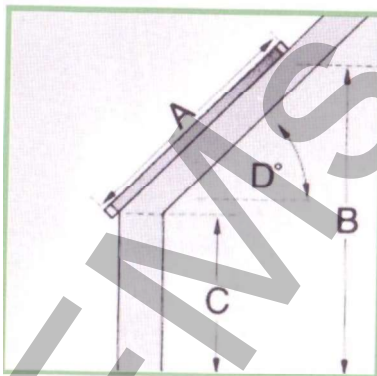
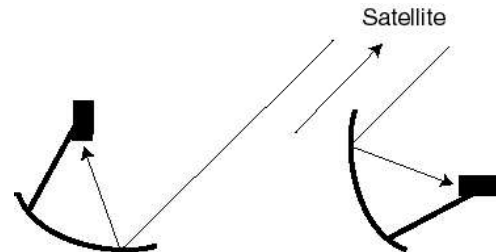
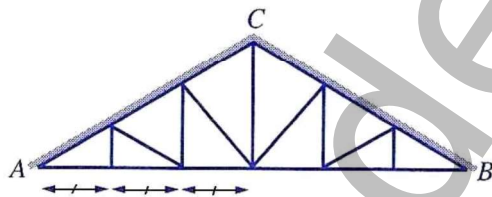




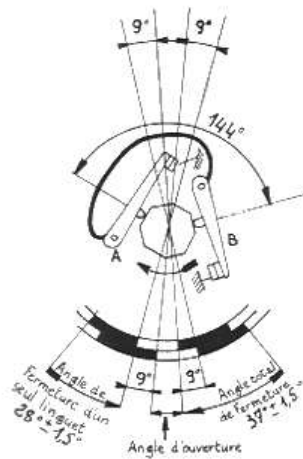
la ferme polonceau



La ferme anglaise



COTES D'IMPLANTATION
POUR FENÊTRE DE TOIT



Quelques écrits et informations

Outillage



Fausse équerre d'onglet pour les coupes

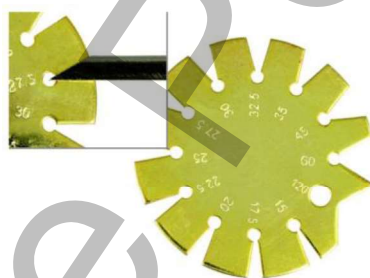
Cette fausse équerre permet de relever n'importe quel angle et donne instantanément l'angle de coupe à effectuer. Sans calcul, l'appareil divise automatiquement l'angle par deux. Idéal pour tous les travaux d'agencement. Convient aux menuisiers, charpentiers, agenceurs...

Sauterelle de précision

ULMIA pour enregistrer, transférer et tracer des angles de n'importe quelle dimension.



Jauge angulaire : pour régler les dégauchisseuses, les angles de scies, de perceuses, les guides d'onglet, pour effectuer des traçages.



Bricoleurs et professionnels en action sur la Toile

Re : Comment couper une plinthe en bisot

#5

 **Message de Couplyonmur**, posté le Lundi 25 Juin 2007 à 22:55

Invité

pas besoin de boîte à coupe, tu traces ta coupe avec une fausse équerre ou une sauterelle, tu traces l'équerage sur la hauteur de ta plinthe et tu coupes avec une scie égoïne

Bonjour,

Je me suis fait poser mon parquet et j'ai la charge de faire moi-même la pose des plinthes. Les angles n'étant pas à 45°, on m'a conseillé de faire le report des angles avec une fausse équerre. J'ai acheté le matériel mais le vendeur n'a pas pu me renseigner. Le seul qui aurait pu m'aider dit qu'il aurait fallu qu'il y ait des graduations.

Alors sans ces graduations, comment pourrais-je l'utiliser sans faire d'erreur.

Merci d'avance pour vos réponses...

Message de petit_scarabee

Après avoir relevé les angles de coupe avec une fausse équerre, installez-vous sur le banc de scie où vous devrez effectuer les tests et faire les réglages qui s'imposent. Le travail de préparation se déroule en deux temps. La première coupe est faite avec le guide à onglets positionné en angle. Un guide auxiliaire est ajouté pour en rallonger l'appui et une serre permet d'immobiliser la pièce lors de l'opération.
(http://micasa.ca/maisonpassion/reno/rb_2005_09_p36a-can.html)

Pour avoir le démaigrissement on coupera un empanon dans la croupe et on en prendra la coupe avec une fausse équerre cette coupe servira pour les autres empanons de la croupe pour l'arêtier seulement sur lequel a été tracé l'empanon de sorte que pour avoir la coupe de tous les empanons de ce pavillon on en tracera quatre c'est à dire un de chaque côté de chaque arêtier <a

(Guide des constructeurs, ou Traité complet des connaissances théoriques et pratiques relatives aux constructions ou Traité complet des connaissances théoriques et pratiques relatives aux constructions De B. Raillard Mignard, 1847.)

Quand et où parle-t-on d'angle ?

- Angle de tir en rugby, en football, en artillerie ...
- Angle de coupe en menuiserie, en charpente, pour le carrelage ...
- Angle mort en sécurité routière
- Angle de murs, pente des toits en maçonnerie
- Angle de visée en arpentage, en topographie
- Angle de rues en ville
- Cap en navigation nautique ou aérienne
- Angle d'une figure en géométrie
- Azimut, déclinaison... en astronomie, en navigation
- Longitude, latitude en géographie
- Angle de rotation
- En médecine : angles et position des membres, amplitude du mouvement, champ visuel, ... (http://www.imsat.fr/doc-download/AGFF/articulations_membre_sup111117.pdf)
- ...

À quoi ça sert ?

- À construire des objets, des décors, des figures, et en particulier des polygones réguliers, des figures à l'échelle.
- À s'orienter sur la Terre, dans les airs, et sur mer
- À calculer des longueurs inaccessibles
- À dresser des plans, des cartes
- À faire des travaux de nivellement
- À régler des machines
- À positionner, orienter des objets (panneaux solaires par exemple)
- À tracer des parallèles (voir illustration ci-dessous) ...

Les outils

- Le gabarit, l'équerre d'onglet, la fausse équerre, le mesureur d'angle, le rapporteur, le goniomètre, le théodolite, le sextant, cercle hydrographique ...

68. Droites parallèles. — Les lignes droites que l'on trace le long d'une équerre glissant sur une règle ou d'un té glissant le long d'une planchette sont des **parallèles** (fig. 6 et 7).

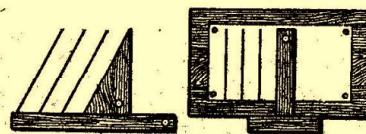


Fig. 6

Fig. 7

On peut vérifier que deux parallèles conservent le même écartement sur toute leur longueur.

69. Tracé des parallèles. — Les dessinateurs tracent des parallèles à l'aide de l'équerre ou du té (fig. 6 et 7).

Les menuisiers se servent de l'équerre (fig. 8), de la fausse équerre ou sauterelle et du trusquin (fig. 9 et 10) pour tracer des parallèles, les ajusteurs se servent du trusquin d'ajusteur (fig. 11).

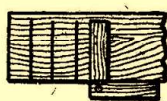


Fig. 8

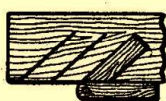


Fig. 9

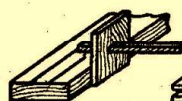


Fig. 10

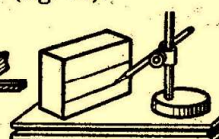


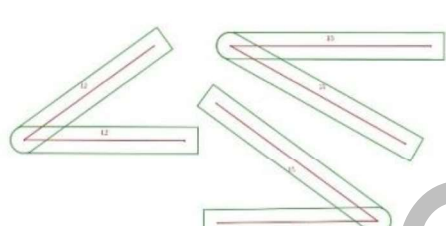
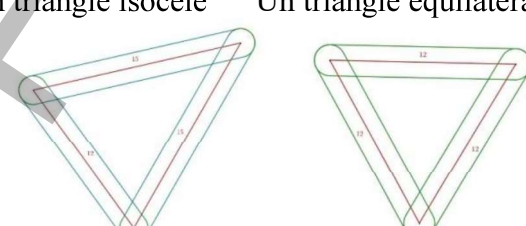
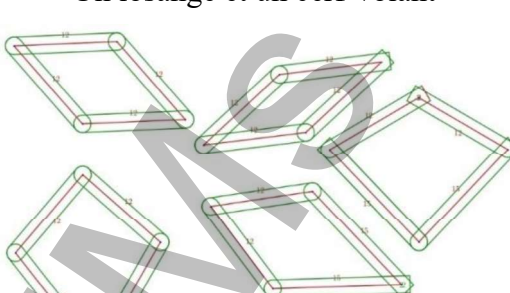
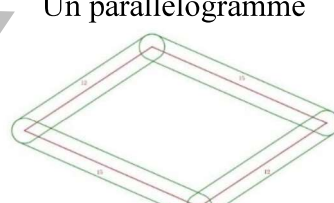
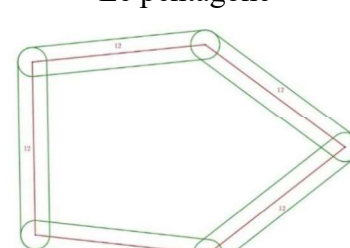
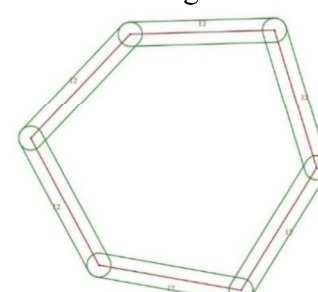
Fig. 11

Arithmétique, cours supérieur 1^{ère} année, M. Delfaud & A. Millet, Hachette, 1928, p. 113

Équipement d'instruments et expériences

L'équipement kitangle© suivant a été conçu par Jean-Paul Mercier pour la formation de chaque apprenti géomètre. Il est utilisé dans des fabrications séparées en classe depuis 2008 ou 2010, sauf pour les mesureurs construits à partir du cerf-volant (cycle 4). Il a ensuite été amélioré avec le groupe collège de l'IREM de Poitiers pour l'étude des *Angles* aux cycles 3 et 4 (cf. *Angles* 6^e 2009, *Angles* 5^e 2014).

Chaque élève doit pouvoir disposer d'un vrai instrument, fabriquer des figures, pour réaliser des expériences (proposées dans les pages suivantes) qui nous semblent centrales dans le processus d'apprentissage de la géométrie. Pour cela le kitangle© cycle 3 est composé de deux instruments rivetés et de 8 lattes de deux dimensions différentes.

La fausse équerre  <i>Une fausse-équerre rivetée est fournie et d'autres peuvent être construites avec les lattes restantes.</i>	Les triangles Un triangle isocèle Un triangle équilatéral  <i>Avec 3 lattes chacun</i>
Les quadrilatères Un losange et un cerf-volant  <i>Un losange riveté est fourni et un second losange ou un cerf-volant peut être construit avec les lattes restantes.</i> Un parallélogramme  <i>Avec 4 lattes</i>	D'autres polygones Le pentagone  <i>Avec 5 lattes</i> L'hexagone  <i>Avec 6 lattes</i>

EXPÉRIENCE À RÉALISER AVEC LA FAUSSE ÉQUERRE

Présentation de l'instrument « fausse équerre » :

Au cycle 3, l'étude de la grandeur *Angles* amène naturellement à la nécessité d'un tel instrument. La fausse équerre est la matérialisation de l'angle : deux demi-droites ayant une même origine, les côtés et le sommet.

La fausse équerre proposée est formée de deux lattes rivetées pour disposer d'un véritable instrument, précis, robuste, qui permet de transporter un angle exactement. Les deux lattes de longueurs différentes évitent de particulariser une forme (le triangle isocèle) et de créer une confusion entre angle et longueur. La plupart des modèles du commerce sont d'ailleurs ainsi réalisés.

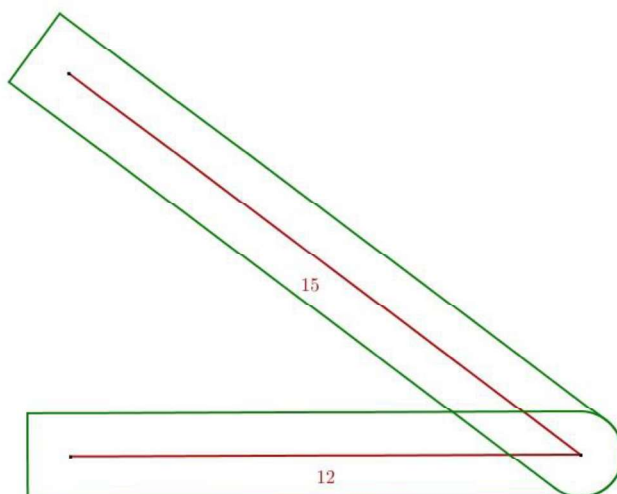
EXPÉRIENCE 1

Utilisation simple : prendre un angle

Prendre un angle de trois manières possibles :

- 1) En enveloppant l'angle : en positionnant le sommet à l'intérieur des branches de la fausse équerre, en ajustant l'un des côtés de l'angle le long de la latte et on ouvre ou ferme la fausse équerre en gardant le sommet à l'intersection des branches. Cela permet de prendre un angle saillant.
- 2) En plaçant la fausse équerre à l'intérieur de l'angle. Seuls les appuis des lattes sur les deux demi-droites de l'angle sont pris en compte. On n'utilise pas le sommet de l'angle. Le sommet est dans le prolongement des bords extérieurs des lattes de la fausse équerre.
- 3) En installant des pinnules - un repère de visée - sur l'axe du rivet, et sur les lignes médianes des deux lattes. Il faut donc une pinnule sur le rivet, et deux pinnules sur les milieux des extrémités des lattes. À faire avec des petits morceaux de bois ou de carton. Cela permet de se servir de la fausse équerre par visée.

En cycle 3 on constatera que pour une ouverture fixée de la fausse équerre les trois angles sont égaux. Cette égalité sera justifiée en début de cycle 4.



Remarque : une quatrième manière est possible et très utilisée dans les métiers, avec l'intérieur d'une latte et l'extérieur de l'autre latte, le sommet se situant alors à l'intersection de ces deux bords de lattes.

EXPÉRIENCE 2

Comparer deux angles

- 1) *Concret* : Savoir comparer des angles sur des objets.
- 2) *Représenté* : Savoir comparer des angles sur une figure, un polygone.
- 3) *Construit* : Savoir transporter un angle pour le construire ailleurs, ou reporter un angle sur l'angle d'une figure pour en comparer les ouvertures. Cela permet ainsi de comparer plus de deux angles, en les reproduisant à partir d'une demi-droite commune.

EXPÉRIENCE 3

Additionner deux angles

Savoir prendre deux angles et construire l'angle somme.

Savoir construire deux angles adjacents : avec le même sommet et une même demi-droite.

L'angle somme est défini par le même sommet et les deux demi-droites extérieures parmi les trois.

EXPÉRIENCE 4

Doubler un angle, par construction.

Un angle est déjà construit sur une feuille. On cherche à le doubler.

Prendre cet angle avec la fausse équerre, et construire un angle égal qui lui soit adjacent.

L'angle formé par la somme des deux angles adjacents égaux est l'angle double.

Observer la propriété de la demi-droite intérieure séparant les deux angles adjacents dans l'angle double.

EXPÉRIENCE 5 (fin de cycle 3)

Multiplier un angle, par un nombre entier.

Si on sait construire le double d'un angle, on sait de la même manière construire le triple, le quadruple d'un angle, ...

Intérêt : montrer qu'à partir d'un certain nombre, l'angle multiple est plus grand qu'un tour, appelé angle plein. Cela peut amener à prendre l'angle plein comme unité d'angle.

EXPÉRIENCES À RÉALISER AVEC LES POLYGONES

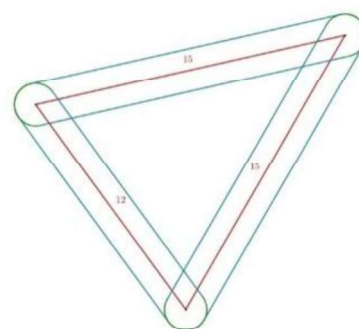
Les triangles

EXPÉRIENCE 6 : le triangle isocèle

Avec des lattes et des vis papillons, construire un triangle.

Deux lattes de même longueur et une latte d'une autre longueur : un triangle isocèle.

Comparer les angles : il y a deux angles égaux et un troisième angle d'ouverture différente.

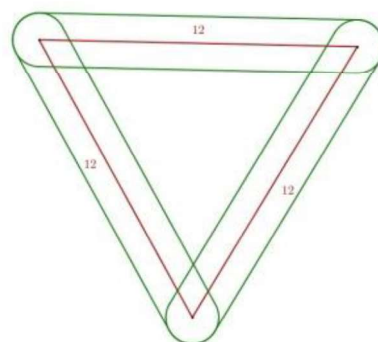


EXPÉRIENCE 7 : le triangle équilatéral

Avec trois lattes de même longueur.

Comparer les angles : il a trois angles égaux.

C'est le premier polygone régulier (par ses longueurs et par ses angles).



Les quadrilatères : cerf-volant et losange

EXPÉRIENCE 8 : le cerf-volant

Avec deux couples de lattes de longueurs différentes, on peut construire un nouvel instrument : le cerf-volant.

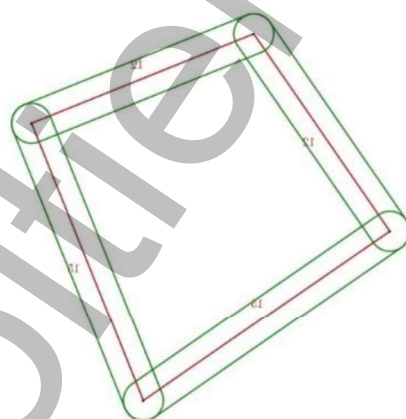
L'étude de ses propriétés angulaires

Il a deux angles opposés égaux.

Il a deux angles opposés non égaux, et en général différents des deux angles précédents.

L'étude de ses propriétés de symétrie

Il a un axe de symétrie : c'est sa diagonale principale.



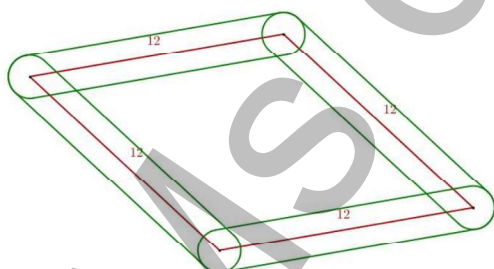
Seconde étude des angles

La diagonale principale, axe de symétrie, partage en deux angles égaux chacun des angles ayant pour sommet l'une des extrémités de cette diagonale. C'est donc une droite qui partage un angle en deux angles égaux, c'est une *bissectrice (qui coupe en deux)*.

Troisième étude des angles

Les deux diagonales se coupent en formant quatre angles égaux. Ces quatre angles égaux sont appelés angles droits. C'est donc un instrument qui va permettre de construire des droites formant un angle droit, les droites perpendiculaires (voir EXPÉRIENCE 11 après le losange).

EXPÉRIENCE 9 : le losange



Avec quatre lattes identiques et quatre rivets, on peut construire un nouvel instrument : le losange.

L'étude de ses propriétés angulaires

Il a les angles opposés égaux, deux à deux.

L'étude de ses propriétés de symétrie

Il a deux axes de symétrie : chaque diagonale.

Seconde étude des angles

Les diagonales, axes de symétrie, partagent en deux angles égaux chacun des angles ayant pour sommet l'une des extrémités de cette diagonale. C'est donc une droite qui partage un angle en deux angles égaux, c'est une *bissectrice (qui coupe en deux)*.

Troisième étude des angles

Les deux diagonales se coupent en formant quatre angles égaux. Ces quatre angles égaux sont appelés angles droits. C'est donc un instrument qui va permettre de construire des droites formant un angle droit, les droites perpendiculaires. (voir EXPÉRIENCE 11 après le losange).

EXPÉRIENCES 10a et 10b : doubler un angle

10a Avec un losange

Construire un angle. Placer le losange de manière qu'un côté du losange soit sur un côté de l'angle et la diagonale passant par le même sommet soit sur le second côté de l'angle. Alors le deuxième côté du losange issu du même sommet indique la demi-droite de l'angle double.

10b Avec un cerf-volant

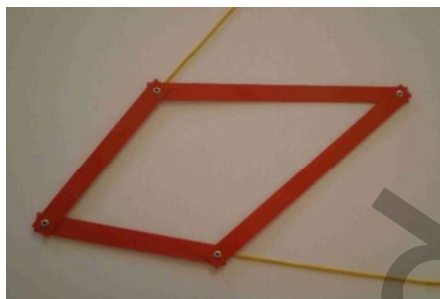
Même expérience avec le cerf-volant en utilisant la diagonale axe de symétrie.



EXPÉRIENCES 11a et 11b : partager un angle en deux angles égaux, la bissectrice

11a Avec un losange

Construire un angle. Placer le losange de manière que deux côtés consécutifs du losange soient sur les deux côtés de l'angle : la diagonale passant par le même sommet indique la droite qui partage l'angle en deux angles moitiés. C'est la bissectrice.



11b avec un cerf-volant

Même expérience avec le cerf-volant en utilisant la diagonale axe de symétrie.

EXPÉRIENCES 12a et 12b : la perpendiculaire

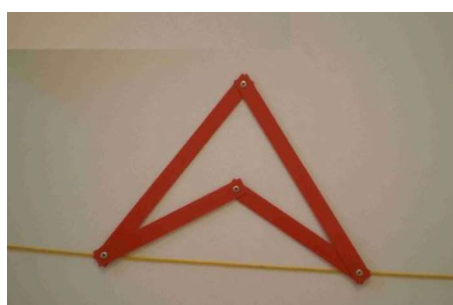
12a avec le losange

Placer une diagonale du losange sur la droite connue. Construire l'autre diagonale du losange en reliant les sommets opposés.



12b avec le cerf-volant

Placer une diagonale du cerf-volant sur la droite connue. Construire l'autre diagonale du losange en reliant les sommets opposés.



EXPÉRIENCES 13 : verticale et horizontale

En utilisant un fil à plomb, accroché à un sommet du losange ou à un des sommets de la seconde diagonale du cerf-volant : dès que le fil à plomb passe par le sommet opposé, alors l'autre diagonale indique l'horizontale.

(Étude historique liée au Radio Latino de Latino Orsini 1580)

EXPÉRIENCES 14a et 14b : symétriseur axial



14a avec le losange

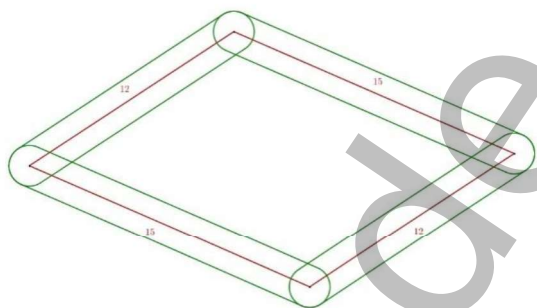
Placer un sommet sur le point à symétriser. Ajuster l'autre diagonale sur la droite donnée comme axe de symétrie. Tracer le point correspondant au 4^e sommet du losange opposé au point donné. C'est son symétrique.

14b avec le cerf-volant

Placer un sommet de la seconde diagonale du cerf-volant sur le point à symétriser.

Ajuster la diagonale principale du cerf-volant sur la droite donnée comme axe de symétrie. Tracer le point correspondant au 4^e sommet du losange opposé au point donné. C'est son symétrique.

Les quadrilatères : le parallélogramme et le rectangle



EXPÉRIENCE 15 : le parallélogramme

L'étude de ses propriétés angulaires

Il a les angles opposés égaux, deux à deux.

Seconde étude des angles

Deux côtés opposés forment un angle nul, ils ont même direction : ils sont dits parallèles.

Troisième étude des angles

Si l'un des angles du parallélogramme est droit, alors les quatre angles sont droits. Le parallélogramme est un rectangle.



L'utilisation de cet instrument dans la situation du bâtiment du port de Hambourg (Voir partie 5 Banque de situations)

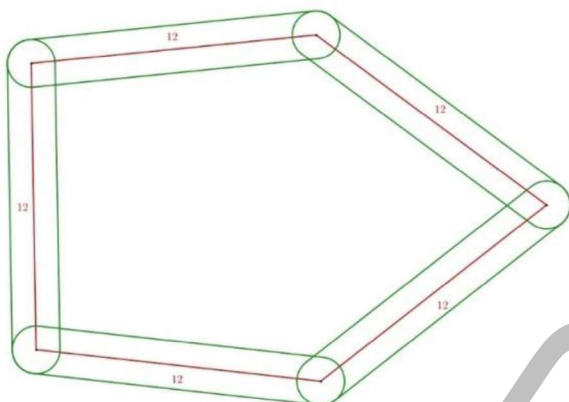
Le rectangle

Un rectangle a quatre angles droits.

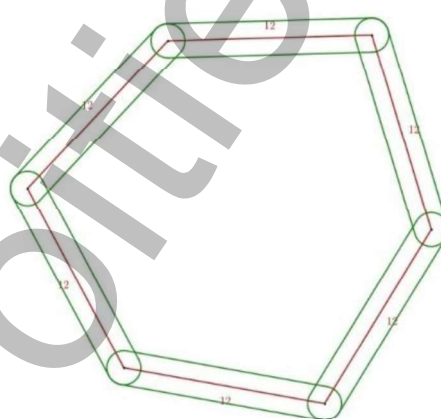
Si on coupe un rectangle en deux par sa diagonale, alors on obtient un triangle rectangle : une équerre droite.

Les polygones

Le pentagone



L'hexagone



EXPÉRIENCE 16

Avec les lattes, construire un pentagone, puis un hexagone.

C'est l'occasion de prendre conscience de la variété des pentagones et des hexagones : il n'y a pas que les pentagones et hexagones réguliers.

Un pentagone (ou hexagone) articulé montre qu'il y a une infinité de pentagones (ou hexagones) qui ont les mêmes côtés et qui ne sont pas identiques : ce sont les angles qui donnent la forme des figures, et dans cette expérience on peut changer à volonté tous les angles sans changer la longueur des côtés.

En changeant deux lattes opposées de l'hexagone avec deux lattes plus grandes (voir le cerf-volant) on aura un nouvel hexagone pouvant avoir tous ses angles égaux et qui n'est pas régulier. Les deux conditions *mêmes longueurs* et *mêmes angles* sont nécessaires et suffisantes pour construire un hexagone régulier.

Cet ensemble d'instruments pour enseigner ou étudier la grandeur *Angles* au cycle 3, puis avec son complément au cycle 4, est inclus dans un inventaire de nombreux outils et instruments anciens ou contemporains, pour étudier les grandeurs *Angles*, *Longueurs*, *Aires*, *Volumes*, et un peu *Durées*. Cette collection est le contenu de *L'Atelier Des Grandeurs*, conçu par l'auteur, qui propose plus de 50 objets d'étude. Une brochure *Atelier Des Grandeurs* de l'IREM de Poitiers (à paraître) rend compte pour chaque instrument de son origine, son utilisation dans les métiers si elle est connue, et des expériences suggérées pour une utilisation en classe.

Géométrie pratique

IREM de Grenoble : Géométrie pratique avec instruments de mesure anciens

Un groupe de travail s'est constitué sur cette problématique et a produit des comptes rendus d'expérimentation de travaux faits avec les élèves. Vous trouverez des documents et des articles téléchargeables à l'adresse :

<http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique99>.

Vous verrez aussi que le groupe propose des stages sur le sujet, et une intéressante bibliographie et sitographie.

Nous vous incitons à lire leur dernière contribution qui concerne le cycle 3 :

Et si nous mesurions la cour de l'école ? Expériences d'arpentage, publiée dans l'ouvrage : « Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en Cycle 3 », édité par l'ARPEME, mai 2018, et à consulter le site compagnon sur le Portail des IREM : <http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique505>

IREM de Lille et ESPE de Lille Nord de France : Enseigner la géométrie, approches historiques et instrumentées

Membres du groupe EMTA de l'IREM de Lille et enseignants à l'ESPE de Lille, Pierre Desjonquères et Thomas Morel expérimentent avec des classes de cycle 3 des travaux d'arpentage en lien avec le cadastre napoléonien de la commune de l'école : comment délimiter et trianguler une commune, comment lever ou vérifier un plan ?

Ils ont rédigé un article *Géométrie du cadastre et enseignement, hier et aujourd'hui* pour les actes des Journées académiques de Lille de mars 2018, à paraître aux PULIM de Limoges (2018).

Thomas Morel travaille sur la géométrie souterraine, une discipline à découvrir :

Une des plus belles applications de la géométrie: les manuscrits de géométrie souterraine au XVII^e siècle, Images des maths, CNRS, 2016 (<http://images.math.cnrs.fr/Les-manuscrits-de-geometrie-souterraine-au-XVIIe-siecle.html>).

Histoire

Voici quelques textes historiques qui éclairent nos choix, et une réflexion sur la notion d'angle et sur la mesure des angles.

1. La définition de l'angle dans l'Encyclopédie (1751)

(L'orthographe de l'époque a été conservée)

« **ANGLE**, s. m. (Géom.) c'est l'ouverture que forment deux lignes ou deux plans, ou trois plans qui se rencontrent : tel est l'angle BAC, tab. de Géom. fig. 91, formé par les lignes AB, AC, qui se rencontrent au point A. Les lignes AB, AC, sont appelées les jambes ou les côtés de l'angle ; & le point d'intersection A en est le sommet. Voyez COTES & SOMMET. Lorsque l'angle est formé par trois plans, on le nomme angle solide.

Les angles se marquent quelquefois par une seule lettre, comme A, que l'on met au sommet ou point angulaire, & quelquefois par trois lettres, dont celle du milieu marque la pointe ou sommet de l'angle, comme BAC.

La mesure d'un angle, par laquelle on exprime sa quantité, est un arc tel que DE, décrit du sommet A entre les côtés AC, AB, avec un rayon pris à volonté. Voyez ARC & MESURE.

D'où il s'ensuit que les angles se distinguent par le rapport de leurs arcs à la circonférence du cercle entier. Voyez CERCLE & CIRCONFERENCE. Ainsi l'on dit qu'un angle est d'autant de degrés qu'en contient l'arc DE, qui le mesure. Voyez DEGRE.

Puisque les arcs semblables AB, DE, figure 87, ont le même rapport à leurs circonférences respectives, & que les circonférences contiennent chacune le même nombre de degrés, il s'ensuit que les arcs AB, DE, qui sont les mesures des deux angles ACB, DCE, contiennent un nombre égal de degrés : c'est pourquoi les angles eux-mêmes sont aussi égaux ; & comme la quantité d'un angle s'estime par le rapport de son arc à la circonférence, il n'importe avec quel rayon cet arc est décrit ; car les mesures d'angles égaux sont toujours ou des arcs égaux, ou des arcs semblables.

Donc la quantité d'un angle demeure toujours la même, soit que l'on prolonge ses côtés, soit qu'on les raccourcisse. Ainsi dans des figures semblables, les angles homologues ou correspondans sont égaux. Voyez SEMBLABLE, FIGURE, &c.

L'art de prendre la valeur des Angles est une opération d'un grand usage & d'une grande étendue dans l'Arpentage, la Navigation, la Géographie, l'Astronomie, &c. Voyez HAUTEUR, ARPENTAGE.

Les instrumens qui servent principalement à cette opération, sont les quarts de cercle, les théodolites ou planchettes rondes, les graphometres, &c. V. CERCLE D'ARPEUTEUR, PLANCHETTE, GRAPHOMETRE, &c.

Les angles dont il faut déterminer la mesure ou la quantité, sont sur le papier ou sur le terrain.

1°. Quand ils sont sur le papier, il n'y a qu'à appliquer le centre d'un rapporteur sur le sommet de l'angle O, (Table d'Arpent. fig. 29.) de maniere que le rayon OB soit couché sur l'un des côtés de cet angle ; alors le degré que coupera l'autre côté OP sur l'arc du rapporteur, donnera la quantité de l'angle proposé. Voyez RAPPORTEUR. On peut aussi déterminer la grandeur d'un angle par le moyen de la ligne des cordes. Voyez CORDE & COMPAS DE PROPORTION.

2°. Quand il s'agit de prendre des angles sur le terrain, il faut placer un graphometre ou un demi-cercle, (fig. 16.) de telle sorte que le rayon CG de l'instrument réponde bien exactement à l'un des côtés de l'angle, & que le centre C soit verticalement au-dessus du sommet : on parvient à la premiere de ces opérations, en observant par les pinnules EG, quelque objet remarquable, placé à l'extrémité ou sur l'un des points du côté de l'angle ; & à la seconde, en laissant tomber un plomb du centre de l'instrument. Ensuite on fait aller & venir l'alidade

jusqu'à ce que l'on aperçoive par ses pinnules quelque marque placée sur l'un des points de l'autre côté de l'angle : & alors le degré que l'alidade coupe sur le limbe de l'instrument, fait connoître la quantité de l'angle que l'on se proposoit de mesurer. Voy. DEMI-CERCLE.

L'on peut voir aux articles CERCLE D'ARPENTEUR, PLANCHETTE, BOUSSOLE, &c. comment l'on prend des angles avec ces instrumens.

Que l'on consulte aussi les articles LEVER UN PLAN & RAPPORTER, pour savoir la maniere de tracer un angle sur le papier quand sa grandeur est donnée. »

ENCYCLOPÉDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES METIERS par une société de gens de lettres ; mis en ordre et publié par M. Diderot,... et quant à la partie mathématique, par M. d'Alembert,... Paris : Briasson, David, Le Breton. Tome 1, 1751, p. 461-464.

(gallica.bnf.fr & CD-Rom : *L'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert*. Redon éditeur, 26740 MARSANNE.)

Voir aussi : **ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE – MATHÉMATIQUES**. (3 tomes) Par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, de la Lande, Le Marquis de Condorcet, &c. À Paris, Tome premier, Paris, Planckoucke et Leyde, Plomteux 1784. Réédition du Bicentenaire, Paris, ACL-éditions 1987.

2. Découverte et utilité de l'angle dans les *Elemens de Geometrie* de Clairaut (1753) (L'orthographe de l'époque a été conservée)

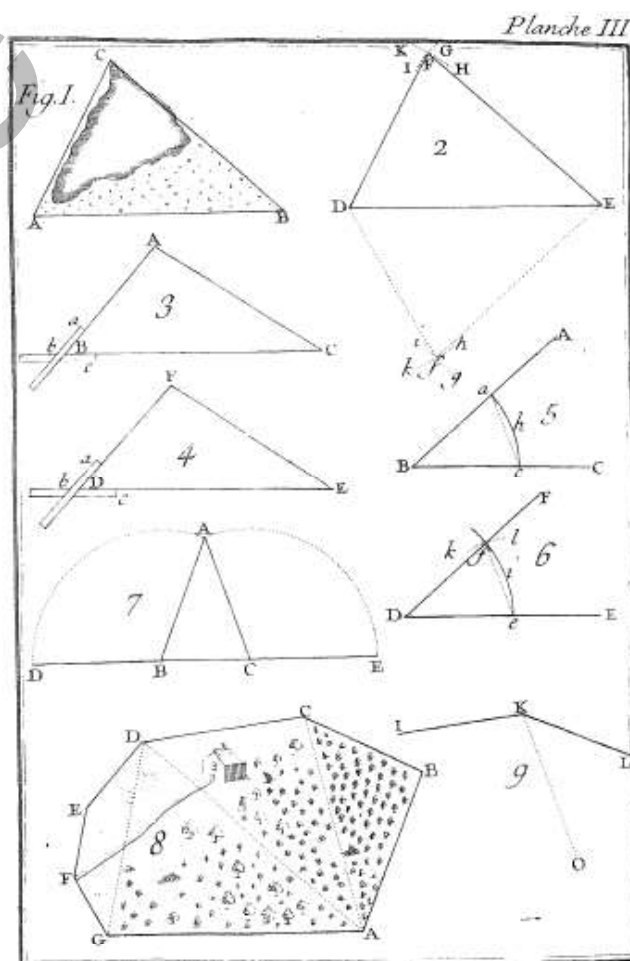
XXVII.

Si on ne pouvoit mesurer que deux des trois côtés du triangle ABC (FIG. 3.), les deux côtés AB, BC, par exemple ; il est clair qu'avec cela seul, on ne pourroit pas déterminer un second triangle égal & semblable à ABC. Car quoiqu'on eût pris DE, égal à BC, & DF égal à BA on ne sçauroit quelle position donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pancher DF, de la même maniere sur DE, que AB panche sur BC ; ou, pour s'exprimer comme les Géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC. (FIG. 3. & 4.)

XXVIII.

Pour faire cette opération, on prend un instrument tel que abc, composé de deux règles qui puissent tourner autour de b, & l'on pose ces règles sur les côtés AB, & BC. Par-là elles font entr'elles le même angle que les côtés AB & BC.

Plaçant donc la règle bc sur la base DE, de maniere que le centre b réponde au point D, & que l'ouverture de l'instrument reste toujours la même, la règle ab donnera la position de la ligne DF, qui fera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or la ligne DF aura été prise



de même longueur que BA. Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite FE, pour avoir le triangle FED entièrement égal, & semblable au triangle ABC. Pratique simple, qui suppose ce principe évident, qu'un triangle est déterminé par la longueur de deux de ses côtés, & par leur ouverture ; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle est égal à un autre, lorsque deux de leurs côtés sont respectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés est également ouvert.

XXIX.

On pourroit encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC, de la manière suivante. (FIG. 5. & 6.)

Du centre B, & d'un intervalle quelconque Ba, décrivez un arc ahc ; ensuite du centre D, & du même intervalle, tracez l'arc eif ; alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point f, qui soit placé sur l'arc eif de la même manière que a se trouvera placé sur l'arc cha. Or vous trouverez facilement le point f, en vous servant de la droite ac, qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la corde de l'arc ahc.

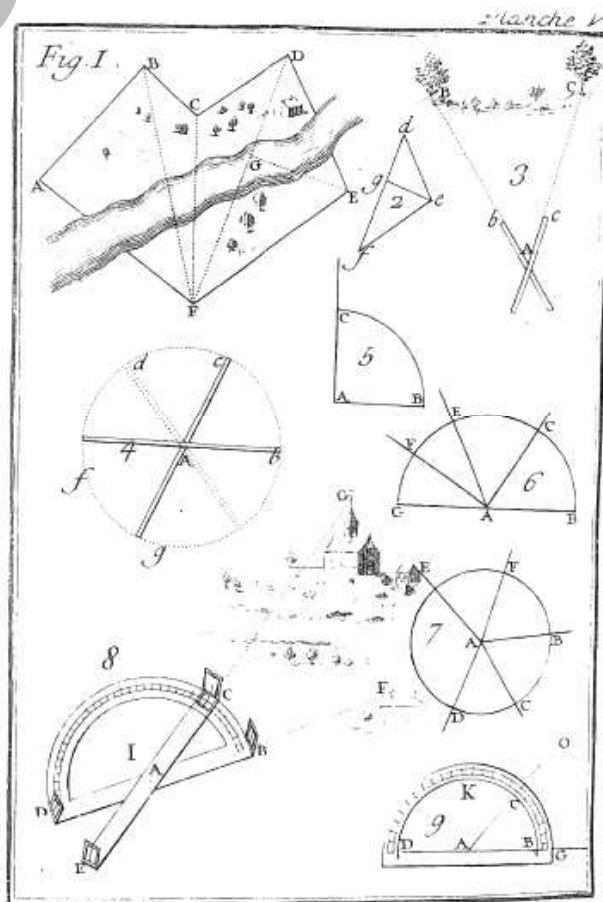
Car si, du centre e, & d'un intervalle égal à ac, vous décrivez l'arc lfk, l'intersection des deux arcs eif, lfk, vous donnera le point cherché f.

Tirez ensuite par D & par f, la ligne Dff, vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC. Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles Bac Dfe, seront entièrement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

LI.

L'usage qu'on peut faire des instruments particuliers, tels que bAc (FIG. 3.), que j'ai dit (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expose souvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le transport ; tantôt la forme qu'on est obligé de donner à l'instrument pour en faciliter l'usage, empêchera qu'on ne puisse l'appliquer sur le plan où devra se faire la réduction.

Ajoutons à cela, que chaque nouvel angle BAC, qu'on prend de cette façon, demande qu'on transporte de nouveau l'instrument sur le papier, & que la seule ressource qu'on ait pour comparer deux angles, c'est de les poser l'un sur l'autre, sans que, par ce moyen, on puisse avoir au juste, ni leur rapport, ni leur grandeur absolue.



LII.

IL étoit donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avoit déjà une pour les longueurs. Or cette mesure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car que Ab restant fixe (FIG. 4.), on lui applique d'abord le côté Ac , qu'ensuite on fasse tourner ce côté autour de A , il est clair que si on adapte à l'extrémité c de la branche mobile Ac , ou une plume, ou un crayon, qui donne moyen de rendre sensible la trace du point c , cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle, pour chaque ouverture particuliere des côtés Ab , Ac , c'est-à-dire, qu'à cause de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera nécessairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de cAb , répondra un arc double, triple, quadruple de cb .

LIII.

SUPPOSANT donc que la circonférence $bcd\text{fg}$, décrite par la révolution entiere du point c , soit divisée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes Ac & Ab , mesurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle cAb qu'elles formeront.

Les Géometres sont convenus de diviser le cercle en 360 parties, qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes &c. Ainsi, un angle bAc , par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, si l'arc bc , qui lui servira de mesure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 soixantièmes parties d'un degré.

CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie de Clairaut* Paris : Lambert et Durand, 1741. Rééd. Paris : J. Gabay, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, Laval : éditions Siloë, 1987. Préface publiée dans *Petit x* n° 2. IREM de Grenoble 1983, p. 77-80.

3. Angle et fortification chez Marolois (1615)

La Fortification ou architecture militaire (L'orthographe de l'époque a été conservée)

Pour trouver l'angle du Poligone sera de la quantité des angles d'iceluy soustraict 2. le reste se multipliera par 2. le produict sera la quantite des angles droicts que contient tel Poligone le tout comme demonstrent les caracteres cy dessous.

/.../

Pour doncques proportionnellement accroistre les angles des Forteresses selon qu'augmente l'angle de leur Poligone nous prendrons la moitié des angles d'iceux y adjousterons 15. degrez la somme sera l'angle du boulevart lequel nous nommerons angle flancque & si l'angle flancque est soustraict de l'angle du Poligone restera le double de l'angle flancquant interieur lequel estant soustraict de 180. deg: restera l'angle flancquant exterieur ou de tenaille & si a l'angle flancquant interieur est adjouste 90. degrez la somme sera l'angle de l'espaule.

/.../

On augmente quelque fois tant les angles des Boulevarts que l'octogone a l'angle droict, & ceux qui sont au dessus tousiours droicts & au dessous amoindrissans iusques au quare qui a l'angle du Boulevart seulement de 60. degrez. Suivant quoy les Boulevarts sont quelque peu plus amples les gorges & flancqs plus grands qu'es precedens mais les second flancqs plus petits. Or pour trouver chasque angle on fera comme s'ensuit.

4. Détermination d'une distance inconnue dans le Manesson Mallet (1702)

Manesson Mallet, Allain. *La Géométrie pratique, divisée en quatre livres*. Paris, Anisson 1702. Livre II
La trigonométrie.

44 LA GEOMETRIE PRATIQUE.

METHODE DE MESURER, AVEC LE DEMI-CERCLE,
la distance des lieux inaccessibles entre-eux, & d'ailleurs accessibles.

PROPOS. Connoître la distance de la porte A à celle de C inaccessibles de l'une à l'autre, mais accessibles de la station B.

REGLE. On posera sur le terrain au point B, le demicercle pour connoître l'angle ABC, en tournant le demicercle, de telle sorte qu'en bornant par les deux piquets de son diamètre, on verra la porte A, & qu'en tournant l'alhidade, on découvre la porte du château C, le nombre des degrez interceptez entre le diamètre & l'alhidade, donnera la valeur de l'angle ABC, qui sera de 102 deg.

Puis, on mesurera sur le terrain, la distance BA, qu'on trouvera, selon cette proposition, de 53 toises, & la distance BC de 50.

Après cette pratique on tracera où l'on voudra une échelle comme en D, qu'on divisera en autant de parties égales qu'on désirera. Ensuite on tracera ailleurs une ligne indéterminée comme EI, qu'on limitera de E en F de 53 parties prises sur l'échelle D, pour égalet le nombre des 53 toises du costé BA, trouvées à la campagne, & chiffrées sur le memorial H.

Puis au point E, & sur la ligne EF, on fera avec un rapporteur l'angle FEK de 102 degrez conforme à celui du terrain ABC chiffré au memorial, & l'on déterminera la ligne EK de E en G, par cinquante parties prises sur l'échelle pour répondre aux cinquante toises du costé BC. De sorte que si l'on mesure la longueur GF sur l'échelle, on trouvera qu'elle sera de 80 parties, conformément aux toises, qu'il y a de la porte de la ville A, à celle du château C. *Euclide, 4. Prop. du I. Liv.*

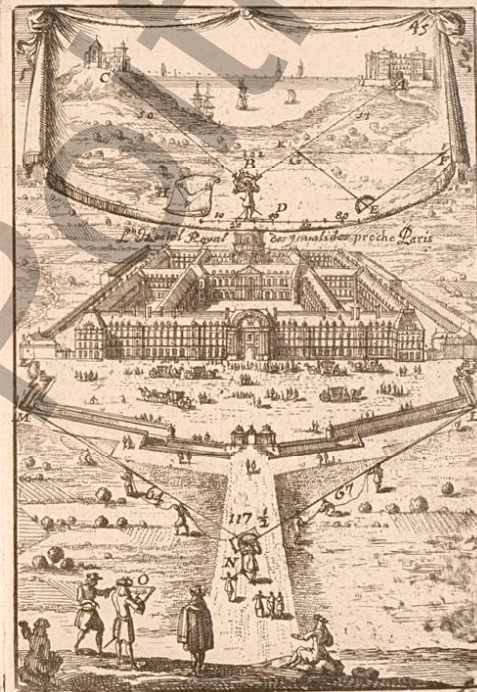
Exemple. On demande combien il y a de toises depuis les angles saillans M & L de la contrescarpe, ou bord du fossé qui est devant l'hôtel royal des Invalides.

Pour résoudre ce problème, on posera en campagne le piquet N où l'on voudra, d'où l'on puisse néanmoins voir, & approcher des angles, ou piquets M & L, mais comme le terrain d'entre le piquet N & ceux de M & L, est élevé, on a écarté les piquets M & L d'une toise à droit & à gauche des angles des contrescarpes, & on a mesuré à la main les distances MN, & NL, en formant le triangle MLN, dont les deux costez MN & NL seront connus, sçavoir MN de 64 toises, & NL de 67.

Puis on connoitra l'angle qu'ils comprennent MNL, selon cet ex. de 117. deg. $\frac{1}{2}$, qu'on marquera sur le memorial O.

LIV. II. De la Trigonometrie. PLANCHE XIX.

45



46 LA GEOMETRIE PRATIQUE.

Ensuite on tracera, où l'on voudra finir cette pratique, une échelle P, de telle longueur & division qu'on désirera, comme de soixante & dix parties égales.

On tirera ailleurs & à l'infini la ligne QR, qu'on limitera de Q en S de soixante & sept parties prises sur l'échelle P, pour répondre aux soixante & sept toises qu'il y a sur le terrain depuis le piquet N, jusqu'à celui de L, marqué au memorial O.

Ensuite au point Q, & sur la ligne QS, on fera avec un rapporteur à alhidade l'angle SQT de 117 degrez $\frac{1}{2}$ égal à celui du terrain MNL marqué sur cette table au memorial O.

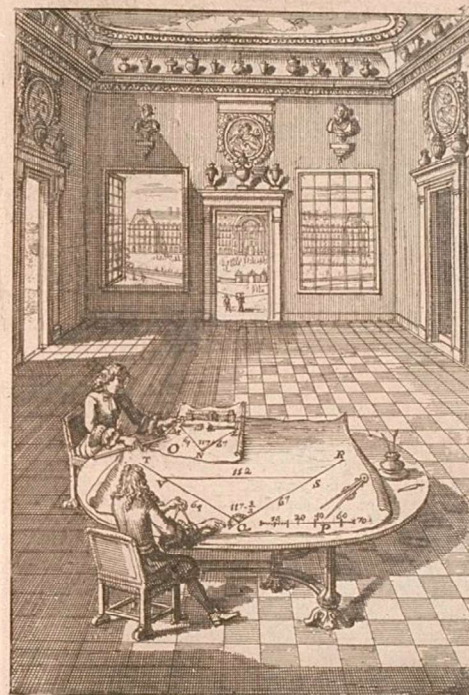
Puis l'on déterminera la ligne QT de Q en V par 64 parties, prises sur l'échelle P, pour équivaloir aux soixante & quatre toises de NM, mesurées sur le terrain, & marquées au memorial O.

De sorte que si l'on mesure la longueur VS sur l'échelle P, on trouvera quelle aura 112 parties pour le nombre des toises qu'il y a depuis le piquet M, jusqu'au piquet L de la contrescarpe du fossé qui est devant la face de l'hôtel Royal des Invalides.

Mais si l'échelle P n'étoit pas assez longue pour y appliquer la longueur VS, comme il arrive dans cet exemple, il faudroit prendre la longueur d'une dizaine ou d'une vingtaine de la même échelle, & parcourir avec cette mesure la longueur VS, & l'on trouveroit à diverses reprises que VS seroit longue de 112 parties, pour l'équivalent des 112 toises qu'il y a depuis le piquet M, jusqu'au piquet L, de sorte que si l'on oste les deux toises, qu'il y a des piquets aux angles des contrescarpes, on trouvera que la distance depuis les angles saillans M & L de la contrescarpe, ou bord du fossé qui est devant l'hôtel Royal des Invalides, est longue de 110 toises.

LIV. II. De la Trigonometrie. PLANCHE XX.

47



5. Naissance sumérienne du rapporteur selon D. Sidersky

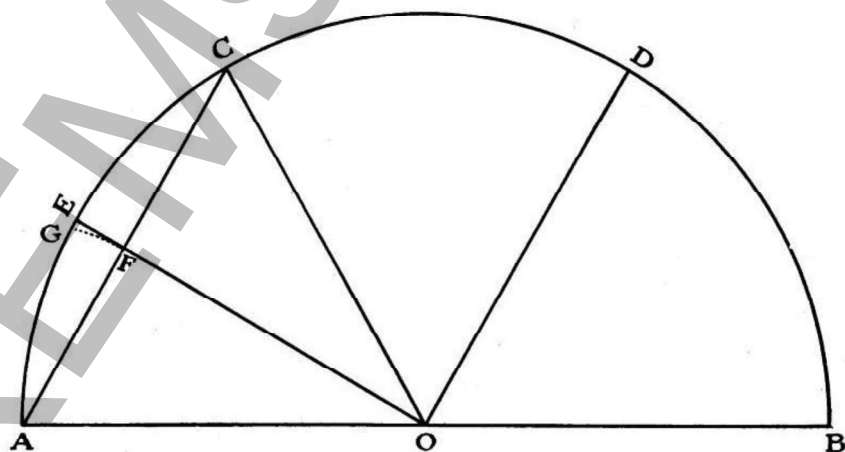
La division de la circonférence en 360 parties. Revue d'Assyriologie 26 (1929), 31-32.

L'évidente parenté des degrés d'arc avec le système sexagésimal en indique bien l'origine chaldéenne, mais l'on a cru pendant longtemps que la division de la circonférence en 360 parties ne datait que de la basse époque babylonienne. Dans son très intéressant livre *L'Astronomie* (in-12°, Paris, 1913, pp. 21-22), M. Bigourdan dit que la division du zodiaque en 360 parties était inconnue d'Eudoxe (IV^e siècle avant J.-C.); qu'on la trouve pour la première fois en Grèce dans un traité d'*Hypsiclès*, et que c'est Hipparque (II^e siècle avant J.-C.) qu'on considère comme en ayant le premier fait usage d'une manière abstraite, c'est-à-dire appliquée à un cercle quelconque.

Cependant, M. Thureau-Dangin vient de démontrer que l'origine des degrés d'arc remonte bien plus haut dans l'Antiquité, et que ce sont les Sumériens qui ont inventé cette division de la circonférence. Évidemment, les Grecs n'en ont eu connaissance qu'au III^e siècle avant J.-C., grâce aux travaux des Chaldéens hellénisés du genre *Bérose*, qui s'attachèrent à rendre accessible aux Grecs les trésors de connaissances qui étaient consignées dans les textes cunéiformes accumulés dans les antiques bibliothèques de leur patrie¹.

Les tablettes publiées par M. Thureau-Dangin posent une question subsidiaire : *Par quel moyen pratique les Sumériens de la haute antiquité avaient réalisé la division géométrique de la circonférence en 360 parties ?* Avec les instruments primitifs (le compas et la règle), ces premiers géomètres savaient diviser la circonférence en 6 parties égales, au moyen du rayon, et en 4 parties égales, au moyen de deux circonférences égales ayant leurs centres aux extrémités du diamètre et se coupant en deux points, dont la ligne de jonction, verticale au diamètre, passe par le centre de la circonférence. Mais il leur eût fallu trouver le moyen de subdiviser le sextant en 60 parties égales.

A défaut de documents, nous pouvons émettre l'hypothèse de la construction suivante : Dans la figure géométrique ci-contre, le sextant A O C est partagé en deux par la ligne E O qui coupe en F la corde A C, de sorte que $A F = F C = \frac{R}{2}$ = le sinus de l'angle A O E qui est de 30°.



En prenant A pour centre et en traçant avec le rayon A F un arc qui coupe la circonférence en G, de sorte que $A G = A F = \frac{R}{2}$, on obtient l'arc A G = 29° et l'arc G E = 1°. En effet, la corde d'un arc de 29° a une longueur de 0.5008 R (d'après les tables modernes). Les Sumériens, en faisant usage de cette construction géométrique si simple, s'étaient sans doute aperçus que le petit arc G E était la soixantième partie du sextant, et la division de la circonférence en $6 \times 60 = 360$ degrés était ainsi réalisée sans difficulté.

6. L'angle, un concept ambivalent

La notion d'angle est sans doute celle qui soulève le plus de discussions et de difficultés dans l'enseignement de la Géométrie. (Choquet, 1964)

Qu'est-ce qu'un angle ? Une ouverture, une inclinaison, ou bien l'intersection de deux demi-plans, la réunion de deux demi-droites ? Veut-on y voir une grandeur ou un objet géométrique ? Au-delà de la diversité des définitions qui ont pu être données de l'angle, statiques ou dynamiques, c'est certainement cette ambivalence grandeur-objet qui est la plus problématique. Mais problématique pour qui ?

La nature de l'angle : figure ou grandeur ? Comment le définir ?

L'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert est un bon endroit pour revenir aux sources des notions car cela faisait partie du projet des auteurs. De plus, c'est un ouvrage facilement accessible sous des formes diverses. La lecture de l'article *Angle* (voir le texte 1) nous met aussitôt en présence de la définition d'une grandeur, *l'ouverture*, et non d'un objet géométrique, même si celui-ci est sous-jacent puisque *l'angle est l'ouverture que forment deux lignes qui se rencontrent*. Mais la suite de l'article définit ces deux lignes comme les *côtés de l'angle* et leur point d'intersection comme son *sommet*. Donc le terme *angle* désigne à la fois un objet et une grandeur qui lui est associée, son ouverture. Cette définition *cinématique* amène naturellement à quantifier cette ouverture au moyen d'un arc de cercle ayant pour centre le sommet de l'angle et reliant les deux côtés de l'angle, cet arc donnant à la fois le moyen de comparer les angles et d'en trouver une mesure. On peut en effet comparer les angles par *le rapport de leurs arcs à la circonférence du cercle tout entier*. Remarquons qu'ici l'article utilise le même mot pour l'objet *arc* et sa longueur : ambivalence grandeur-objet pour le vocable *arc*, comme pour *l'angle*, mais dont le contexte lève l'ambiguïté, ce qui est l'usage dans les textes anciens et classiques pour les grandeurs géométriques. La mesure des arcs sert alors à la mesure des angles. La lecture attentive de l'article montre aussi que le terme mesure y est utilisé à la place de grandeur, confusion très fréquente aujourd'hui où la notion de grandeur a quasiment disparu du paysage mathématique, même si elle a été réhabilitée récemment dans les programmes de l'école et du collège. Or c'est la définition de l'angle en tant que grandeur qui permet d'opérer sur les angles : de les comparer, les ajouter, les partager, et ensuite de les mesurer en choisissant un angle pour unité. C'était autrefois la façon classique de parler des angles et de leur mesure.

La définition de l'angle comme ouverture, plus ou moins grande, permet d'en faire d'emblée une grandeur, mais le chemin pour y parvenir n'est pas toujours aussi immédiat. La démarche de Clairaut dans ses *Éléments de Géométrie* (1741) nous semble intéressante pour éclairer le rôle de la définition et des concepts en mathématiques. La notion d'angle apparaît dans son traité pour lever un obstacle à un problème d'arpentage : comment reproduire un triangle dont n'est accessible sur le terrain que la mesure de deux côtés ? La solution est de faire *pencher DF sur DE*, côtés du triangle sur le dessin, comme *penche AB sur BC*, côtés correspondants sur le terrain (voir le texte 2). Et Clairaut d'ajouter : *ou, pour s'exprimer comme les Géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC*. Figure alors en marge, en guise de définition : *Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre*. C'est la définition 8 des *Éléments* d'Euclide dont nous reparlerons. Donc l'*inclinaison* est immédiatement ramenée à une *ouverture*, et rendue opérationnelle, pour réaliser le dessin par l'utilisation d'une fausse équerre, *instrument tel que abc, composé de deux règles qui puissent tourner autour de b*. C'est un instrument qui existe toujours dans les magasins de bricolage et dont les professionnels se servent, en particulier menuisiers et charpentiers. L'utilisation d'une fausse équerre permet le report des angles et donc la reproduction de figures. Cet

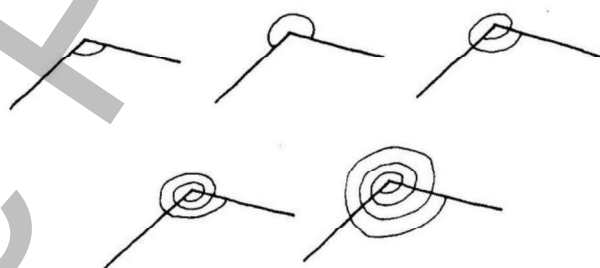
instrument montre clairement que c'est la grandeur de l'ouverture entre deux demi-droites de même sommet que l'on prend et reporte, donc une grandeur et pas un objet. Clairaut donne, à la suite, une autre façon classique de reproduire un angle à l'aide de cercles donc réalisable avec une corde sur le terrain, ou à la règle et au compas sur une feuille (voir le texte 2). L'ouverture est matérialisée par un arc de cercle, et sa grandeur par la corde de l'arc : c'est la longueur de cette corde qui va être reportée au compas ou avec une corde par le tracé d'un cercle. Puis, ce n'est que vingt pages plus tard que Clairaut passe de la grandeur angle à sa mesure en montrant que le report direct d'un angle sur un autre peut avoir des inconvénients. Il va donc falloir créer un autre instrument auquel il assigne un cahier des charges précis : permettre de connaître la grandeur absolue des angles et leurs rapports. C'est l'analyse mathématique de la situation à partir de la notion d'ouverture et la mise en relation avec le problème analogue et déjà résolu pour les longueurs qui va lui permettre de définir la mesure des angles et donc le principe des deux instruments qu'il décrira un peu plus loin : le demi-cercle (d'un graphomètre) sur le terrain d'arpentage pour mesurer les angles et le rapporteur pour tracer sur le papier les angles dont les mesures ont été données par le demi-cercle. Le nom même de rapporteur s'éclaire. On comprend mieux alors la genèse des notions mathématiques et de leurs propriétés dans cette interaction entre problèmes de la vie à résoudre et moyens effectifs pour les résoudre.

Revenons à la définition euclidienne de l'angle donnée par Clairaut en termes d'*inclinaison*. Si dans le traité de Clairaut elle est donnée dans un contexte où elle prend sens, et peut donc s'interpréter facilement, dans les *Éléments* d'Euclide elle est posée a priori, ce qui a amené mathématiciens et commentateurs de l'Antiquité à se demander quelle était la nature de l'angle. La référence étant alors les catégories aristotéliennes de relation, qualité ou quantité, le terme inclinaison d'une ligne sur une autre définit l'angle plutôt comme une relation entre deux lignes. Mais si pour la définition 8 l'angle relève de la relation, pour la définition 9 de l'angle rectiligne il relève plutôt de la qualité ; et pour les trois définitions suivantes c'est manifestement de la quantité, puisqu'elles définissent l'angle droit à partir de l'égalité de deux angles adjacents, l'angle obtus comme plus grand que l'angle droit, et l'angle aigu comme plus petit que l'angle droit. C'est pourquoi Proclus, célèbre commentateur du livre I des *Éléments* d'Euclide, pense que l'angle chez Euclide participe des trois catégories : relation, qualité et quantité. En fait la nature de l'angle va dépendre de ce que l'on en fait, et donc cette trivalence est pour lui recevable. Par la suite, dans les postulats 4 et 5, et dans les propositions du texte euclidien les angles vont être comparés, partagés, ajoutés : ils sont donc considérés comme des grandeurs et relèvent de la quantité. Tous ces angles sont en fait des angles rectilignes, même si Euclide ne le précise pas toujours puisque leurs côtés sont des droites, tout comme cela a été implicite pour nous depuis le début. Or dans la définition 8, les côtés de l'angle sont des lignes qui peuvent être des courbes, puisque la définition 9 précise la notion d'angle rectiligne. De fait Euclide considère dans le livre III des *Éléments* des angles mixtilignes entre un cercle et une corde, ou ceux entre un cercle et une tangente, angles appelés de contingence ou corniculaires en raison de leur forme. Mais ces angles sont problématiques car comme le prouve Euclide dans la proposition 16 ils sont plus grands ou plus petit que tout angle rectiligne aigu, et on ne peut donc plus comparer les angles entre eux, contrevenant ainsi à l'idée même de grandeur. Ce qui explique l'abandon par les géomètres grecs eux-mêmes de la notion d'angle mixtiligne qui se maintiendra cependant au fil des siècles, mais redéfinie comme angle des tangentes aux courbes au sommet de l'angle.

Pour un même objet, un cylindre par exemple, on peut parler de sa hauteur, de son aire ou de son volume, et on distingue naturellement l'objet de la grandeur de l'objet que l'on considère. Pour un angle *géométrique* les objets associés sont usuellement des paires de demi-droites de même origine à propos desquelles on veut parler uniquement de leur ouverture (ou

inclinaison ou écartement) que l'on peut visualiser par un petit arc de cercle. Et de fait, appeler angle la figure formée par ces deux demi-droites n'est pas un réel problème dans la mesure où cette figure représente bien cette ouverture, et n'est destinée qu'à cela : c'est donc une représentation de l'angle que l'on pourrait aussi appeler un représentant de l'angle dans le langage des classes d'équivalence. C'est sur cette figure que se réalise tout le travail géométrique qui va faire de l'angle une grandeur, et il est alors difficile de distinguer sans arrêt l'angle de sa représentation. Néanmoins, dans un souci de clarification, les années 70-80 du siècle passé ont mis en avant le terme de secteur angulaire, défini comme une portion de plan, réservant celui d'angle à sa grandeur, évitant ainsi la confusion entre angle-figure et angle-grandeur. On pourra par exemple consulter les articles *Angle* et *Secteur angulaire* du Dictionnaire de mathématiques élémentaires de Stella Baruk (1992) qui prônent cette démarche, abandonnée même si on en trouve encore des traces dans des manuels scolaires. En effet on ne peut plus alors parler par exemple de bissectrice d'un angle, ou d'angles opposés par le sommet ou d'angles alternes-internes. Donc tout le vocabulaire classique concernant les angles serait à modifier.

D'autre part l'angle de secteur a pour limite l'angle *plein*, ce qui interdit de parler de la somme des angles des polygones ayant plus de 4 côtés, alors que la notion *cinématique* d'ouverture permet d'envisager des angles dépassant le tour complet, et aussi de les orienter ; la même paire de demi-droites peut alors représenter une infinité d'angles.



Une infinité d'angles pour une paire de deux demi-droites

Nous voyons donc l'importance que peuvent avoir les définitions et l'usage que l'on en fait. En ce qui concerne l'angle-grandeur, il est intéressant de remarquer que les appellations angle de demi-droites, angle de droites, angle de vecteurs, angle de secteurs portent en elles l'angle-figure de la grandeur duquel on parle.

La mesure des angles : mesurer à partir de la grandeur angle

C'est la démarche classique et ancestrale pour définir la mesure d'une grandeur : puisque l'on sait comparer des angles, en prendre des multiples et les diviser, pour dire la grandeur d'un angle, il suffit de le comparer à un angle choisi pour unité et de dire combien de fois l'unité est contenue dans cet angle. Ce nombre est la mesure de l'angle dans l'unité choisie. Nous avons alors réalisé l'objectif de Clairaut de connaître la grandeur absolue des angles et leurs rapports : *il était donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avait déjà une pour les longueurs.*

Remarquons que pour un angle $\hat{A}$ de 60° , par exemple, on devrait dire un angle dont la mesure est 60 si l'unité est le degré ; et si l'on veut calculer sur la mesure des angles, il faut introduire une notation du type $\text{mes } \hat{A}$ et écrire : $\text{mes } \hat{A} = 60$; celle utilisée dans les années 70-80 était $E(\hat{A})$ et même $E_{180}(\hat{A})$ pour préciser l'unité ; elle se lisait écart de l'angle géométrique $\hat{A}$ ou écart angulaire du couple de demi-droites représentant l'angle. Voici comment s'énonçait le théorème de la somme des angles du triangle dans un manuel de 1974 pour la classe de troisième : *La somme des écarts angulaires des angles géométriques d'un triangle est égale à l'écart angulaire k d'un angle plat.* Par contre, le degré étant un angle (le 360° de l'angle plein), 60° devrait se lire 60 fois le degré, et alors l'angle $\hat{A}$ est égal à 60 degrés : cela justifie le calcul avec les unités et l'écriture $\hat{A} = 60^\circ$; car ce calcul est un calcul sur les angles, calcul dans un espace vectoriel de dimension 1 puisque l'on a défini pour les angles une addition et une multiplication par un scalaire ayant les bonnes propriétés ; ce

calcul en plus facilite les changements d'unités. C'est ce calcul avec les unités qui est préconisé dans les programmes actuels de l'école et du collège.

Quelle unité choisir ? Dans les *Éléments* d'Euclide, l'étalon de comparaison des angles est l'angle droit. Tous les angles particuliers s'expriment en multiples ou fraction de l'angle droit. Les angles supplémentaires valent deux droits, la somme des angles du triangle aussi. L'angle du triangle équilatéral est les deux tiers d'un angle droit, et l'angle du pentagone régulier vaut un angle droit et un cinquième. Dans le manuel de la classe de sixième de chez Hachette datant de 1958, il est dit que l'unité principale d'angle est l'angle droit, et que l'angle droit étant trop grand pour les mesures usuelles d'angles on utilise deux systèmes de sous-multiples : le *grade* centième de l'angle droit, et le *degré* quatre-vingt-dixième de l'angle droit. Si le grade a bien été défini ainsi à l'époque révolutionnaire où la France a systématisé l'emploi du système décimal pour toutes les mesures, par contre le degré vient de la mesure des arcs de cercle et d'une époque bien plus lointaine (voir le texte 6). Notons que l'angle plein fait aussi office d'unité d'angle usitée sous l'appellation de tour (tr).

On peut aussi mesurer les angles à partir des arcs de cercle, ou de longueurs de segments. Pour approfondir ces sujets on pourra lire les articles (Guichard, 2015).

Les instruments de mesure

La mesure effective des angles passe par la conception et la réalisation d'instruments. Ont déjà été évoqués le rapporteur, le graphomètre, le quart de cercle de marine, la rose des vents. En fait leur nombre et leur variété est impressionnant, aussi bien à travers l'histoire qu'actuellement : astrolabe, anneau astronomique, triquetrum, bâton de Jacob ou arbalestrille, quartier anglais, sextant, octant, compas de navigation, quadrant, carré géométrique, compas géométrique, trigonomètre, henrymètre, récipient, radio latino, mesureurs d'angles et équerres professionnels, goniomètre, clinomètre, inclinomètre, éclimètre... (voir la partie 5 *Écologie*, et la brochure de l'IREM sur les *Angles* en 5^e) Adaptés à la nature des angles à mesurer, et donc aux différents métiers qui en ont besoin, l'étude de leur conception et de leurs graduations ne manque pas d'intérêt pour faire des mathématiques.

L'angle : un concept grec

Mais cet angle, dont nous avons essayé d'éclairer la nature et les façons de le mesurer, d'où nous vient-il ?

Les astronomes mésopotamiens et égyptiens mesuraient la hauteur des astres et des étoiles sur l'horizon. Et c'est toujours ainsi que s'expriment astronomes ou navigateurs. Les architectes égyptiens parlaient de la pente des pyramides (le sekhed), les architectes mésopotamiens de celle de leurs murailles (le fruit). Et c'est toujours ainsi que s'expriment couvreurs, maçons ou panneaux de signalisation routière. Mais point de mot pour désigner un objet dont on mesurerait l'ouverture : seulement des termes, spécifiques à la profession, pour dire le rapport de longueurs mesurant cette ouverture : hauteur, pente, fruit... Même dans la mathématique indienne, à laquelle nous devons l'utilisation du sinus, il n'est jamais question d'angles mais d'arcs. Et les mesures en degrés des relevés astronomiques mésopotamiens ou égyptiens, comme celles des tables des cordes de Ptolémée ou des Indiens sont celles d'arcs de cercles et non d'angles.

C'est en fait dans la Grèce antique, à l'époque de Thalès (VI^e siècle av. J.-C.), qu'apparaît dans la science ionienne le terme d'angle (gônios) emprunté au langage courant où il désigne le coin formé par deux murs. La tradition grecque attribue d'ailleurs à Thalès les premiers énoncés mathématiques connus concernant des angles, énoncés que l'on ne retrouve dans aucune autre tradition : égalité des angles à la base du triangle isocèle, égalité des angles opposés par le sommet formés par l'intersection de deux droites, et le troisième cas d'égalité des triangles (triangles ayant deux angles égaux et un côté égal).

Qu'a permis cette désignation explicite d'un nouvel objet mathématique ? Dans un premier temps de comparer des angles, et d'établir des propriétés, comme en témoignent les énoncés attribués à Thalès que nous venons d'évoquer, ce qui va permettre de modéliser l'univers et en retour d'avoir une action sur lui. C'est grâce au corpus mathématique construit à partir des angles que les astronomes grecs vont pouvoir déterminer les équinoxes et l'inclinaison de l'écliptique, ou encore la circonférence de la Terre. On sait d'ailleurs qu'un certain nombre de propositions des *Eléments* d'Euclide concernant les angles y sont à l'intention des astronomes. Et petit à petit l'angle va devenir un *objet* indispensable dans la vie des hommes. L'article *Angle* de l'*Encyclopédie* se termine par un nombre impressionnant de dénominations d'angles qui montrent l'usage de cette notion d'angle dans une pluralité de disciplines : optique, fortification, navigation, astronomie..., et aussi en mathématiques !

La notation des angles

En géométrie élémentaire il n'y a pas, comme en algèbre, une nécessité impérieuse d'utiliser des symboles pour améliorer l'efficacité des procédures. Une grande partie des raisonnements passe toujours par le discours.

Ce sont en fait les progrès de l'algèbre qui ont amené l'utilisation de plus en plus systématique de symboles dans la partie calculatoire de la géométrie, ou dans l'écriture des données. En voici deux exemples relativement récents.

– Dans le *Lebossé & Hemery* 2^e (1960) :

« Si OM est la bissectrice de l'angle AOB on peut écrire : $\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

– Dans un sujet de BEPC de 1951 :

« Déterminer la valeur de l'angle AMB... Comparer les angles ODM et DMH... Soit D le point de PY tel que : $\widehat{PCD} = \widehat{PBA}$... »

Hadamard, dans ses *Leçons de Géométrie Élémentaire* (1922), écrit : « On désigne un angle par la lettre de son sommet, placée entre deux autres lettres qui désignent ses côtés, et surmontée souvent d'un signe spécial ». Souvent, pas toujours...

De fait la plupart des mathématiciens jusqu'au XX^e siècle, qu'il s'agisse de Descartes (1637), de Taylor (1759), de Legendre (1813), de Houël (1867)... écrivent « l'angle ABC ». De même pour les manuels et les sujets d'examens, même relativement récents, comme en témoignent ces extraits du BEPC de 1970 : « Calculer tg AED et en déduire la valeur approchée de l'angle AED à une minute près par excès »... « Montrer que MB est la bissectrice de l'angle ABP. En déduire la mesure en degrés des angles en A et en B du triangle APB ».

On trouve parfois chez certains auteurs une abréviation comme *Angl. ABC* (!) chez Legendre (1794), *Wkl DOQ* chez A.von Frank (angle se dit "Winkel" en allemand).

Ce qui est intéressant c'est de savoir qu'actuellement il n'y a pas de notation unifiée mais coexistent 3 notations :

- 1) $\widehat{ABC}$ en usage chez nous et d'origine française (Carnot, *Géométrie de Position* 1803). Elle ne figure pas dans les polices de Word : on ne peut la réaliser qu'avec l'éditeur d'équation, en utilisant l'option accentuation !
- 2) $\angle ABC$ en usage chez les anglo-saxons et d'origine anglaise (Oughtred *Trigonometria* 1657). Cette notation, elle, figure dans la police mathématique Symbol de Word ! Elle a l'avantage, comme les parenthèses par rapport au surlignage, comme le symbole %, comme le signe / pour les fractions, de rester « en ligne ».
- 3) $\sphericalangle ABC$ en usage en Allemagne et aux États Unis, d'origine allemande (Spitz 1862, Hilbert *Les fondements de la géométrie* 1899).

En fait ces trois notations ne sont que des variantes des pictogrammes $\angle$ ABC et $\sphericalangle$ ABC créés en 1634 par le français Hérigone, qui bien qu'en usage aux XVII^e et XVIII^e siècles (ils figurent à l'article « Caractère » de *L'Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert de 1784), vont rapidement se trouver en compétition avec les symboles $<$ et $>$ introduits à la même époque par l'anglais Harriot (1631) pour signifier « plus petit que » et « plus grand que ». Ces symboles vont rencontrer un grand succès et être adoptés, rapidement, quasi universellement, et ce, fait rare dans l'histoire des symboles, sans changement jusqu'à nos jours. L'idée est alors d'apporter de légères modifications au symbole $<$ pour désigner un angle : côté horizontal $\sphericalangle$, rotation Λ , symbolisation de l'arc intercepté $\sphericalangle$, avec d'autres variantes : V, ∇ ...

Quelques illustrations

<i>Si deux lignes droictes se coupent l'une l'autre, elles feront les angles au sommet égaux entr'eux.</i> <i>Hypoth.</i> ab & cd snt —. <i>Req. π. demonstr.</i> $\sphericalangle aec \sphericalangle \sphericalangle deb,$	<i>Si à quelque ligne droite, & a un point en icelle, font menées deux lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles oppozes au sommet égaux entr'eux: icelles lignes droictes se rentreront directement.</i> <i>Hypoth.</i> gah est —, $\sphericalangle d \sphericalangle \sphericalangle c.$ <i>Req. π. demonstr.</i> eaf est —. <i>Demonstr.</i>
---	--

Les angles opposés par le sommet (Livre I, théorème VIII) du tome 1 du Cours Mathématique d'Hérigone (1634)

Théorème 13. *C'est le deuxième cas de congruence des triangles.* Un triangle ABC est congruent à un autre triangle A'B'C' si les congruences suivantes sont satisfaites :

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

D. Hilbert. *Les Fondements de la Géométrie*, 1899

Soit un cercle de centre O et de rayon R.

1° Tracer une corde BA égale au côté du carré inscrit, puis une corde AC égale au côté du triangle équilatéral inscrit (O est à l'intérieur de l'angle BAC). Justifier les tracés.

2° Tracer BC et donner la valeur des angles du triangle BAC.

3° Calculer la hauteur AH du triangle ABC puis le côté BC et l'aire de ce triangle en fonction de R.

4° Prolonger AH jusqu'à son intersection A' avec le cercle. Quelle est la nature du quadrilatère ABA'C ? Évaluer ses côtés et son aire en fonction de R.

Sujet de Géométrie du BEPC, 1951, 1^{ère} session, Académie de POITIERS

Bibliographie

Ouvrages

- BARBIN Évelyne, dir. *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses, 2014.
- CAHEN Raymond. *Cours de Mathématiques. Classe de Sixième*. R. Maillard (dir.). Paris : Classiques Hachette, 1958.
- CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie*, Paris : Lambert et Durand, 1741. Rééd. Paris : J. Gabay, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, Laval : éditions Siloë, 1987. Préface publiée dans *Petit x* n° 2. IREM de Grenoble 1983, p. 77-80.
- ENCYCLOPÉDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS par une société de gens de lettres ; mis en ordre et publié par M. Diderot,... et quant à la partie mathématique, par M. d'Alembert,... Paris : Briasson, David, Le Breton. Tome 1, 1751.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50533b/f520.chemindefer>
- ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE – MATHÉMATIQUES. Par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, de la Lande, Le Marquis de Condorcet, &c. Tome premier, Paris : Panckoucke et Leyde : Plomteux 1784. Réédition du Bicentenaire, Paris : ACL-éditions 1987. <http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3828j.r=.langFR>
- MANESSON MALLET Allain. *La Géométrie pratique, divisée en quatre livres*. Paris : Anisson, 1702. L.II, De la Trigonométrie.
- PLESSIER Pierre et MORLET Maurice. *Mathématiques classe de Sixième*. M. Queysanne, A. Revuz (dir.). Paris : Nathan, 1965.

Brochures, Articles

- AYMES Jean. *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)*. APMEP, brochure n°70, 1988.
- FAVRAT Jean François et Al. « Développement cognitif et apprentissages scolaires : l'exemple de l'acquisition du concept d'angle » - *Revue française de pédagogie*, n° 152, p 49-61, 2005.
- GAMBIN Marie-Thérèse. « Des cartes portulans à la formule d'Edward Wright : l'histoire des cartes à « rhumbs ». M: A.T.H., *MNEMOSYNE* n° 11. IREM de Paris VII 1996, p. 31-62. Repris en partie dans « L'histoire des cartes à « rhumbs » », in *Sciences et Techniques aux 15^e et 16^e siècles*, ASSP Rouen 2005, 10 p. : http://assprouen.free.fr/publications/sciences_et_techniques.php
- GAMBIN Marie-Thérèse. « La cartographie dieppoise ». In É. Hébert (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'Histoire*, Paris : Ellipses, 2004, p. 43-55.
- GUICHARD Jean-Paul. *Histoires de symboles*. IREM de Poitiers, 2003.
- GUICHARD Jean-Paul. « L'angle, un concept ambivalent » et « La mesure des angles ». *Tangente HS* n°53, *Les angles sous tous les angles*, Éditions POLE, Paris, 2015, p. 22-29, et p. 98-101.
- GUICHARD Jean-Paul. « Les angles au collège : arpentage et navigation », In *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*, chapitre 1, Vuibert, 2010. (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWH10002.htm>).

Existe aussi en version anglaise électronique chez Springer, 2018.

- IREM DE POITIERS, Groupe collège. *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les ANGLES*, 2009.
- IREM DE POITIERS, Groupe collège. *Enseigner les mathématiques en 5^e à partir des grandeurs : les ANGLES*, 2014.
- MATHS & PUZZLES, brochure n° 1009, APMEP, 2017.
- MERCIER Jean-Paul. « Mesureurs d'angles du XVI^e au XXI^e siècle : recherches en filiation », In *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations*, chapitre 4, Presses universitaires de Rennes (PUR), Collection Essais, Rennes, 2018. (<http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWH18001.htm>).
- MÉTIN Frédéric. « Quand les Jésuites enseignaient la fortification ». *Bulletin de l'APMEP* n° 439, Paris : APMEP, 2002, p. 223-234.
- MÉTIN Frédéric. « Mathématiques et Fortifications : construire la sécurité ». *Tangente* n° 124, Paris : Éditions POLE, 2008, p. 36-38.
- STOLL André. « Les spirales ». *L'Ouvert* n°s 96 et 97, IREM de Strasbourg 1999 et *Repères IREM*, n° 39, Metz : Topiques éditions, 2000, p. 73-99 : <http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/39stoll.pdf>
- TROUDET Marc, « Et si nous mesurons la cour de l'école ? Expériences d'arpentage », publié dans l'ouvrage *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en Cycle 3*, édité par l'ARPEME, mai 2018, p. 173-199.

Annexe 6. Bibliographie

Bibliographie générale concernant les grandeurs

- BARBIN Évelyne, *Les Éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée*. Repères IREM, n° 4, p.119-133, Topiques Éditions, 1991. (En ligne)
- BARBIN Évelyne, *L'arithmétisation des grandeurs*. Repères IREM, n° 68, p.5-20, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)
- CHAMBRIS Christine, *Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire*. Repères IREM, n° 69, p.5-31, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)
- CHAMONTIN Françoise & alii, *Des aires sans mesure à la mesure des aires*. Repères IREM, n° 44, p. 33-62, Topiques Éditions, 2001. (En ligne)
- CHARNAY Roland, *Quelle culture mathématique partagée à la fin de la scolarité obligatoire ?* Repères IREM, n° 64, p.49-61, Topiques Éditions, 2006. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, *Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique*. Bulletin APMEP n° 471, 2007, p.439-461. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, *Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité*, 2009. (Texte en ligne)
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée*. Petit x, n° 55, p.5-32, IREM de Grenoble, 2001. (En ligne)
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, *Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations*. Petit x, n° 59, p.43-76, IREM de Grenoble, 2002. (En ligne)
- CLAIRAUT Alexis, *Éléments de Géométrie*. Lambert et Durand, Paris, 1741. Réédition : J. Gabay, Paris, 2006. Plusieurs éditions sont téléchargeables sur le Net.
- DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Points Sciences N° 49, Le Seuil, Paris, 1986.
- DORIER Jean-Luc & alii, *Actes de la XI^e École d'été de didactique des mathématiques*, Thème 4 : Mesure et grandeur dans l'enseignement des mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2001.
- ÉduSCOL, *Grandeurs et mesures au collège*. Mathématiques, Ressources pour les classes du collège, Octobre 2007. (En ligne)
- *Grandeurs*, N° spécial. Repères-IREM n° 68, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)
- LEBESGUE Henri, *La mesure des grandeurs*. Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1, Genève, 1935. Réédition : A. Blanchard, Paris, 1975.
- PRESSIAT André, *La place des grandeurs dans la construction des mathématiques*. APMEP, Bulletin 483, 2009. (En ligne)
- ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure « Des grandeurs aux nombres rationnels »*. Collection Formation, Hatier, 1992.
- ROUCHE Nicolas, *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique*. Repères IREM, n° 15, p. 25-36, Topiques Éditions, 1994. (En ligne)

- ROUCHE Nicolas, *Du quotidien aux mathématiques : nombres, grandeurs, proportions*. Ellipses, Paris, 2006.
- ROYE Louis, *Enseigner et apprendre les grandeurs à l'école élémentaire*. Repères IREM, n° 69, p.55-79, Topiques Éditions, 2007. (En ligne)

Nos écrits autour de notre démarche

- *Grandeurs et géométrie*, Matthieu Gaud, Actes du colloque *Mathématiques en cycle 3*, 8 et 9 juin 2017, Poitiers.
- *La vie des hommes comme sujet d'étude*, Groupe collège, IREM de Poitiers, Les Cahiers pédagogiques n° 529, avril 2016.
- *Enseigner par les grandeurs au collège*, Jean-Paul Mercier et Jean-Paul Guichard, Losanges n° 28, mars 2015. (<http://www.sbpn.be/2015/03/losanges-28/>).
- *Le prix du lait*, Jean-Paul Mercier, Repères IREM n°90, janvier 2013, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR13005.htm>).
- *Évaluer les prix*, Frédéric de Ligt et Jean-Paul Guichard, APMEP, PLOT n°40, quatrième trimestre 2012, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/APL12022.htm>).
- *Le volume de la pyramide*, Jean-Paul Mercier, Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs, chapitre 5, Vuibert, 2012. (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWH12006.htm>).
- *Les grandeurs au collège*, Jean-Paul Guichard et Jean-Paul Mercier, juin 2011, CORFEM, Actes des 17^{ème} et 18^{ème} colloques, article en ligne sur le Portail des IREM (Commissions inter-IREM, CORFEM).
- *Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens*, Jean-Paul Guichard et Sébastien Peyrot, Bulletin de l'APMEP n°492, janvier-février 2011, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10011.htm>).
- *Les durées : un thème pour travailler les nombres et calculs en sixième*, Walter Mesnier, Repères IREM n°82, janvier 2011, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR11003.htm>), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- *Les angles au collège : arpentage et navigation*, Jean-Paul Guichard, De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet, chapitre 1, Vuibert, 2010. (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWH10002.htm>).
Existe aussi en version anglaise électronique chez Springer, 2018.
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs*, Fabrice Tarra, Repères IREM n°78, janvier 2010, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10011.htm>), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- *Le chapitre probabilités en troisième*, Thierry Chevalarias, Repères IREM n°78, janvier 2010, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR10005.htm>), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).

- *Le volume de la boule en troisième*, Sébastien Peyrot, Repères IREM n°77, octobre 2009, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09016.htm>), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).
- *Les volumes en classe de sixième*, Jean-Paul Guichard, Repères IREM n°76, juillet 2009, (<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09013.htm>), article en ligne sur le Portail des IREM (Repères IREM).

Nos publications sur notre démarche :

Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs

On peut se procurer ces documents à l'**IREM** de Poitiers : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>

En sixième

- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les ANGLES*, 2009
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les DURÉES*, 2010
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les AIRES*, 2010
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les PRIX*, 2011
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les VOLUMES*, 2011
- *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les LONGUEURS*, 2012

En cycle 4

- *Enseigner les mathématiques en 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} à partir des grandeurs. Pourquoi ? Comment ?*, 2014
- *Enseigner les mathématiques en 5^e à partir des grandeurs : les ANGLES*, 2014
- *Enseigner les mathématiques en 5^e à partir des grandeurs : les TEMPÉRATURES*, 2015
- *Enseigner les mathématiques en cycle 4 à partir des grandeurs : les LONGUEURS*, 2016
- *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs*, 2017
- *Enseigner les mathématiques en cycle 4 à partir des grandeurs : les PRIX*, 2018

Annexe 7. Pour expérimenter

Si notre démarche vous intéresse, et que, pour l'expérimenter vous voulez utiliser certains de nos documents sous forme numérique, pour concevoir des diaporamas, des fiches de travail, des évaluations pour vos élèves, nous avons ouvert un espace dédié, à accès réservé aux acheteurs de nos brochures, sur notre site où vous trouverez tous nos documents : ceux figurant dans les brochures et d'autres documents que nous utilisons dans nos classes.

Contactez-nous au secrétariat de l'IREM de Poitiers :

Bâtiment de mathématiques H3,
Téléport 2 BP 30179,
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 FUTUROSOCPE-CHASSENEUIL cedex
tél : (+33) 05 49 45 38 77
mél : secirem@math.univ-poitiers.fr.

Bonne expérimentation.

Auteurs BOUCARD Romain, CHEVALARIAS Thierry, COILLOT Jérôme, DEBERTONNE-DASSULE Florence, GAUD Matthieu, GUICHARD Jean-Paul, MERCIER Jean-Paul, REDONDO Cyril, avec la participation de CORNEAU Florence, DESROSIER Pauline, FRUGIER Sébastien, GANDAIS Aude, HUTREL Delphine, REBOURG-FERT Laëtizia et THOMAS Florence.

Titre Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : Les ANGLES

Editeur IREM de POITIERS

Public concerné Professeurs de collège, professeurs des écoles
Enseignants en formation initiale (PE, PLC)
Formateurs d'enseignants.

Date Septembre 2018

Mots clés Angle, définition d'un angle, comparaison des angles, somme des angles, partage des angles, mesure des angles, grandeur, cerf volant, polygones, fausse équerre, rapporteur, distance inaccessible, orientation, arpentage, navigation, situation, vie des hommes, écologie, grande question, parcours d'étude et de recherche, dictée géométrique, histoire des mathématiques, Chevallard, Clairaut, Manesson Mallet, Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

Résumé Cette brochure propose une étude des angles et de la géométrie plane en cycle 3 structurée autour de la construction de la grandeur « angle » comme outil permettant de reproduire et de construire des figures polygonales, de trouver des distances inaccessibles, de s'orienter sur mer, sur terre ou dans les airs. Ses cinq grandes parties sont conçues comme des éléments de réponses à cinq grandes questions : comment définir un angle, comparer des angles, ajouter des angles, partager des angles, mesurer des angles ? La démarche proposée est intégrative de nombreuses compétences du programme qui retrouvent ainsi une place naturelle et leur donne du sens. Pour la mettre en œuvre dans la classe, nous avons élaboré une banque de plus de 80 situations, ancrées dans la vie des hommes, qui nous sert de ressources pour choisir activités d'étude, exercices et sujets de devoirs. Des mises en œuvre expérimentées sont proposées pour les classes de CM1, CM2, 6^e, ainsi que des fiches de séances pour les CM1 et CM2, et des activités mentales. Tout le matériel est disponible en ligne sur un espace dédié.

Ce travail s'inscrit dans un projet plus global de restructuration des contenus des programmes de mathématiques de l'école et du collège autour des grandeurs et de la vie des hommes.

* * *

IREM - Bâtiment de mathématiques H3, Téléport 2 BP 30179, boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL cedex. **Tél.** : (+33) 05.49.45.38.77.

Mél. : secirem@math.univ-poitiers.fr . **Adresse réticulaire** : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>.

ISBN : 978-2-85954-098-2

EAN : 9782859540982

