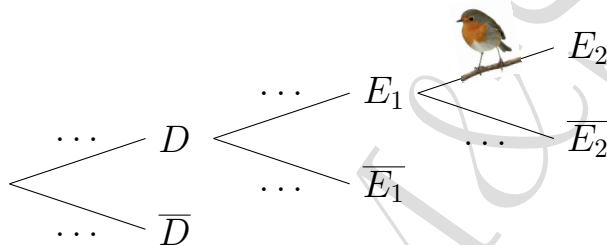
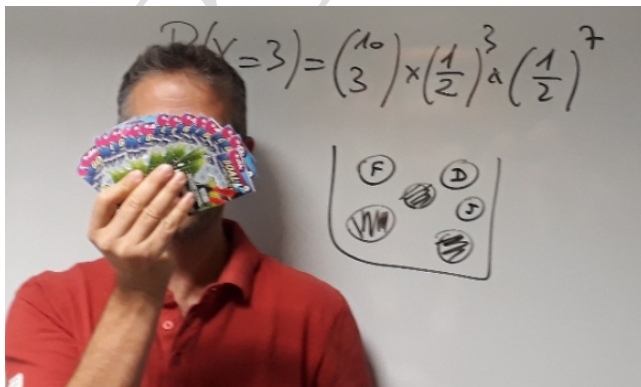
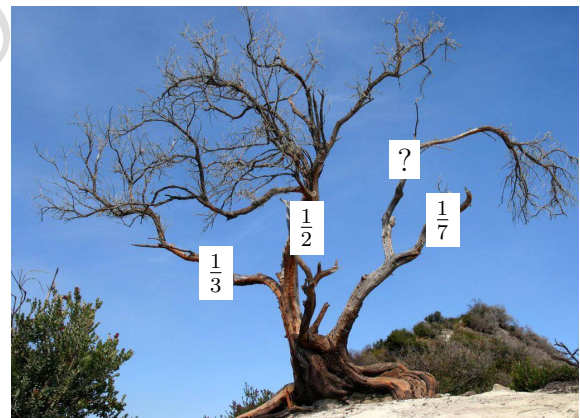


# Mathématiques vivantes au lycée (Fascicule 2)

## Probabilités en première : des arbres et des jeux



Arbres probabilistes :
   
 outil de résolution ou
   
 objet d'enseignement indispensable ?



Comment gagner plus
   
 (ou perdre moins)
   
 aux jeux de la FDJ ?

IREM&S Poitiers

**Les mathématiques vivantes au lycée**  
**Fascicule 2**

**PROBABILITÉS EN PREMIÈRE :**  
**DES ARBRES ET DES JEUX**

**Par le groupe Lycée de l'IREM de Poitiers**

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche initiée par la commission Inter IREM Didactique.

IREM&S Poitiers

# Table des matières

|                                                                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>A. Arbres probabilistes : outil de résolution ou objet d'enseignement indispensable ?</b>                                  | <b>1</b>  |
| 1. Quand les arbres probabilistes sont-ils apparus dans la littérature pédagogique ? . . . . .                                | 4         |
| 2. Quand les arbres sont-ils apparus dans les programmes ? . . . . .                                                          | 4         |
| 3. Comment enseigner actuellement les arbres probabilistes en suivant les préconisations des documents ressources ? . . . . . | 6         |
| 4. Le doute . . . . .                                                                                                         | 12        |
| 5. Comment enseigner le calcul de probabilités en cas d'épreuves successives ?                                                | 14        |
| 6. Conclusion . . . . .                                                                                                       | 17        |
| Bibliographie de la partie A. . . . .                                                                                         | 18        |
| <b>B. Comment gagner plus (ou perdre moins) aux jeux de la FDJ ?</b>                                                          | <b>19</b> |
| 1. Organisation didactique du parcours . . . . .                                                                              | 21        |
| 2. Organisation mathématique du parcours . . . . .                                                                            | 23        |
| 3. Compte rendu d'expérience . . . . .                                                                                        | 34        |
| 4. Déroulement d'un parcours réalisé en classe . . . . .                                                                      | 44        |
| 5. Annexes de la partie B. . . . .                                                                                            | 45        |
| Bibliographie de la partie B. . . . .                                                                                         | 59        |
| <b>C. Annexes</b>                                                                                                             | <b>61</b> |
| L'enseignement des mathématiques par parcours . . . . .                                                                       | 62        |
| Bibliographie : textes de Yves Chevallard . . . . .                                                                           | 63        |
| Bibliographie : publications du groupe lycée de l'IREM de Poitiers . . . . .                                                  | 64        |
| <b>D. Pour expérimenter</b>                                                                                                   | <b>65</b> |

IREM&S Poitiers

---

## Partie A.

Arbres probabilistes :

outil de résolution

ou

objet d'enseignement indispensable ?

## Préambule

Avant tout développement, quelques précisions de vocabulaire semblent nécessaires.

D'une part il s'agit de bien distinguer les trois types d'arbres mentionnés dans les programmes, documents ressource et manuels scolaires concernant les probabilités : *arbres des issues possibles*, *arbres de dénombrement* dont les branches sont pondérées par le nombre de façons d'obtenir ces issues et *arbres probabilistes* dont les branches sont pondérées par des probabilités.

D'autre part, dans la suite nous serons amenés à utiliser un concept qui nous semble fondamental pour l'enseignement des probabilités discrètes au collège et au lycée. Il s'agit de l'urne de Bernoulli<sup>1</sup> qui est une urne idéale composée de  $N$  boules telle que la probabilité de tirer l'une quelconque de ces boules est  $1/N$ . Dans une telle urne, la probabilité de tirer une boule d'une certaine catégorie est alors la proportion de boules de cette catégorie. Elle est archétypale du modèle d'équiprobabilité (trop souvent sous-entendu dans les manuels par la formule « au hasard ») et elle permet de modéliser des expériences aléatoires d'univers fini<sup>2</sup> : la réalisation d'un événement de probabilité  $k/N$  correspond au tirage d'une boule blanche dans une urne de Bernoulli contenant  $N$  boules dont  $k$  blanches.

Au moment où nous rédigeons cet article, les références aux arbres dans l'enseignement des probabilités se multipliant, il nous est apparu important de nous interroger sur leur statut dans les connaissances attendues d'un élève de collège ou de lycée et sur la nécessité de leur utilisation dans le cursus du lycée en nous appuyant sur la lecture de documents officiels.

D'où la question posée en titre de l'article qui peut sembler surprenante, voire saugrenue, tant est répandu l'usage d'arbres probabilistes tout d'abord dans les manuels, puis la préconisation de leur étude dans les deux (ou trois) dernières moutures des programmes. Ainsi voit-on apparaître dans de nombreux exercices au baccalauréat des questions spécifiques à propos de la création d'arbres probabilistes qui deviennent un passage obligé pour la résolution de problème, dont un exemple se trouve page suivante<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Nommée ainsi car Jacques Bernoulli l'utilise pour démontrer sa loi des grands nombres. Voir l'article *A propos de la définition en probabilité* de Jean-Claude Thiénard dans *Enseigner les probabilités au lycée*[10]

<sup>2</sup> Dans le cas de probabilités rationnelles.

<sup>3</sup> Sujet Bac S, Métropole 21 juin 2012, extrait de l'exercice 2.

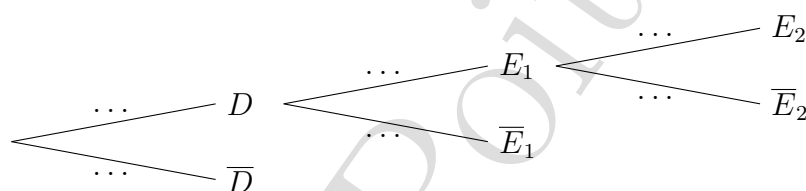
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

- $D$  : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- $E_1$  : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- $E_2$  : « Le candidat est recruté ».

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



Notre interrogation peut se décliner en diverses questions auxquelles nous allons tenter d'apporter des réponses :

- l'arbre probabiliste est-il un outil incontournable pour résoudre de nombreuses situations ?
- comment peut-on envisager l'enseignement des arbres probabilistes ?
- l'enseignement de la notion d'arbre probabiliste ne peut-il pas aboutir à la création d'obstacles didactiques ?
- comment en est-on arrivé à faire figurer l'étude des arbres probabilistes dans les programmes ?
- les arbres probabilistes apparaissent-ils dans le savoir académique<sup>4</sup> ?

La dernière question que nous nous posons est vite réglée : dans tous les écrits fondateurs de la théorie des probabilités que nous avons consultés, il n'est jamais question d'arbres probabilistes<sup>5</sup>. Cela tendrait à prouver que les arbres probabilistes sont une création didactique.

<sup>4</sup> Ce savoir est nommé « savoir savant » dans les écrits de Yves Chevallard.

<sup>5</sup> Huygens utilise une présentation sous forme d'arbre pour résoudre son 5<sup>ème</sup> exercice voir *Epistémologie et Histoire des Mathématiques*[3] mais d'une part ce n'est pas un arbre probabiliste au sens défini ci-avant et d'autre part les auteurs suivants, comme Bernoulli, qui reprendront son ouvrage, ne conserveront pas cette présentation.

# 1. Quand les arbres probabilistes sont-ils apparus dans la littérature pédagogique ?

Engel en donne une des premières formalisations à l'usage des enseignants dans son ouvrage *L'enseignement des probabilités et statistiques*<sup>6</sup> (page 36) après qu'il ait introduit les arbres de dénombrement (page 20).

Sa « justification » des calculs basés sur les arbres probabilistes repose sur une approche fréquentiste de la probabilité, sur la notion d'indépendance (non définie mais nous en reparlerons ultérieurement) et sur le calcul de proportions de proportions.

## Exemple 1

On tire au hasard une lettre de l'urne (fig. 2.1), on la note et on la remet dans l'urne. Puis on recommence le tirage.

C'est une expérience à deux épreuves.

Les deux épreuves sont identiques. On dit qu'il s'agit d'une expérience à épreuves indépendantes.

L'univers des issues est  
 $\Omega = \{aa, an, na, nn\}$

Les issues sont des "mots" de deux lettres.

Chaque issue est représentée par un chemin. Sur les branches, on a indiqué des probabilités.

Comment calcule-t-on la probabilité d'un chemin à l'aide des probabilités de ses branches ?

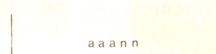


Fig. 2.1

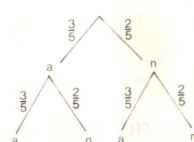


Fig. 2.2

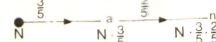


Fig. 2.3

Pour trouver une définition raisonnable de la probabilité d'un chemin, inspirons-nous de l'interprétation en fréquence de la probabilité. La figure 2.3 nous montre un des quatre chemins. Si on répète un grand nombre de fois l'expérience à deux épreuves, combien parmi ces  $N$  expériences répétées conduiront au résultat indiqué par le chemin ?

La figure 2.3 fournit la réponse:  $\frac{3}{5}$  des  $N$  expériences suivront la branche vers "a", et  $\frac{2}{5}$  de ces  $\frac{3}{5} N$  expériences iront vers "n". Donc  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$  des  $N$  expériences répétées suivront le chemin "an".

Ce résultat intuitif conduit à la définition suivante:

La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Par multiplication et en suivant les chemins de la figure 2.2 on obtient le tableau 2.1.

| $\omega$    | aa             | an             | na             | nn             |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $p(\omega)$ | $\frac{9}{25}$ | $\frac{6}{25}$ | $\frac{6}{25}$ | $\frac{4}{25}$ |

Tableau 2.1

On trouve trace d'arbres probabilistes dans certains manuels des années 1980 mais de manière anecdotique. Il en est tout autrement des arbres de dénombrement car jusque dans les années 2000, l'enseignement des probabilités était fondé sur la combinatoire.

# 2. Quand les arbres sont-ils apparus dans les programmes ?

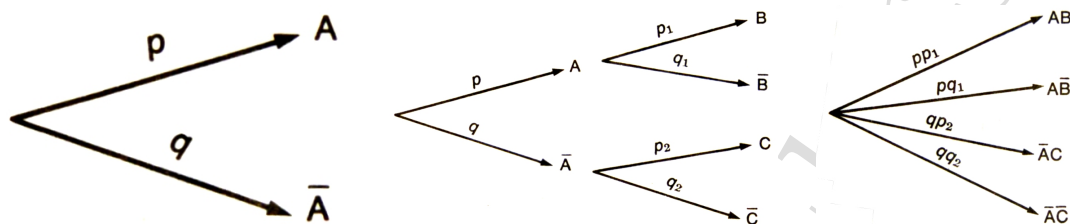
Nous avons regardé les programmes depuis 1974 en notant les évolutions significatives.

**En 1974**, les programmes des séries scientifiques restent ceux de la décennie précédente. Les probabilités y sont abordées de manière théorique. Dans les programmes figure alors aussi l'étude des ensembles, des cardinaux, des arrangements, permutations, injections... Il n'est pas question de représentation (en particulier par les arbres) ni dans les programmes, ni dans les instructions.

<sup>6</sup> *L'enseignement des probabilités et statistiques*[9]

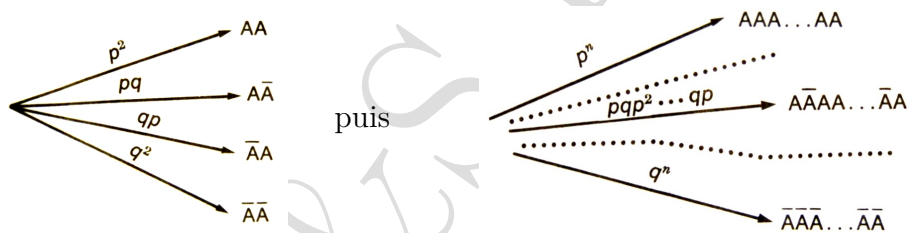
**En 1982**, la partie probabilité est fortement marquée par l'étude de la combinatoire. Cependant pour la première fois dans l'annexe au commentaire du programme de Terminale B des approches possibles du schéma de Bernoulli sont présentées :

- la première : constitution de l'urne équivalente à deux tirages ;
- la seconde : **introduction par des arbres** : deux branches, puis deux fois deux branches que l'on regroupe en un arbre, puis arbre à quatre branches équivalent, enfin schéma de Bernoulli et généralisation à  $n$  répétitions.



« Les probabilités portées par les branches étant le produit des probabilités correspondantes ».

Dans le cas du Schéma de Bernoulli on obtient :



En revanche, rien n'est indiqué dans les commentaires du programme de terminale D, qui lui comporte des probabilités conditionnelles.

Les arbres probabilistes sont indiqués comme un outil possible de résolution.

**En 1991**, les probabilités conditionnelles et le schéma de Bernoulli apparaissent dans les programmes de terminales C et E, ainsi que la notion de variable aléatoire. Les premières notions de probabilités (réunion, intersection, contraire) sont maintenant introduites en première. Les « modèles d'urne » restent présents dans les exemples de TP. Mais surtout on voit arriver explicitement le terme d'arbre : « exemples simples d'emploi de partitions et de représentation (arbres, tableaux, ...) pour organiser et dénombrer des données ». Notons que ce sont des arbres de dénombrement et non des arbres probabilistes.

**En 1997**, l'usage des arbres se généralise, on le trouve régulièrement dans la marge de droite en commentaire des contenus : « on exploitera la représentation en arbre ». Ils sont indiqués non seulement en combinatoire pour dénombrer (comme dans le programme précédent), mais surtout les arbres pondérés apparaissent pour le calcul des probabilités : « on introduira les arbres pondérés. Prenant appui sur le travail fait en première, on en explicitera les règles de fonctionnement pour leur utilisation comme outil de calcul ». Dans ce programme, on voit aussi apparaître la notation  $p_B(A)$  pour les probabilités conditionnelles. En revanche, la formule des probabilités totales n'apparaît plus dans les contenus, elle est signalée en marge dans le programme de terminale ES mais pas dans

celui de S ; elle semble être devenue un implicite des calculs de probabilités... peut-être découlant naturellement de l'exploitation des règles de calculs sur les arbres pondérés ? La tendance à exploiter les arbres probabilistes se généralise.

**En 2001**, les arbres restent indiqués comme des représentations utiles au calcul des probabilités. Ils deviennent plus centraux dans le raisonnement : « un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve ».

Le formalisme des mathématiques dites modernes a totalement disparu. Les arbres probabilistes qui étaient un moyen didactique pour enseigner les probabilités acquièrent un autre statut.

**En 2009 (et suivantes)**, le dénombrement a disparu des programmes. Les arbres apparaissent dès la classe de seconde, sans mention de pondération ; on peut donc penser qu'il s'agit d'arbres de dénombrement ou d'arbres des issues possibles. En première, « l'arbre pondéré est la représentation *privilégiée* pour représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes », il s'agirait donc d'un arbre de probabilité. Enfin en terminale, l'arbre pondéré est une capacité attendue et comme en 2001, « un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve ».

Ainsi, l'étude des programmes depuis une quarantaine d'années montre comment les arbres probabilistes, conçus d'abord comme un moyen parmi d'autres pour enseigner les probabilités, sont devenus un objet d'enseignement incontournable ne serait-ce que pour répondre aux questions posées au baccalauréat. Ils sont d'abord apparus (si on omet les arbres de dénombrement) pour calculer des probabilités en cas d'épreuves répétées (en particulier dans le schéma de Bernoulli) puis dans les calculs utilisant des probabilités conditionnelles. À regarder les manuels actuels, il n'y aurait même que les arbres pour enseigner les probabilités conditionnelles<sup>7</sup>. Or il en est tout autrement.

### 3. Comment enseigner actuellement les arbres probabilistes en suivant les préconisations des documents ressources ?

#### a. Au collège

En 2008, les probabilités apparaissent dans les programmes du collège :

« La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou à deux épreuves. »

---

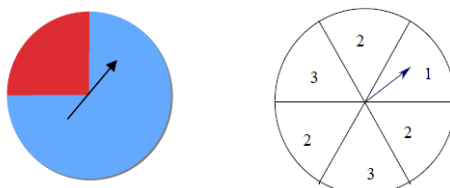
<sup>7</sup> Nous conseillons de lire l'article sur le tableau de signes, APMEP, bulletin vert [http://www.apmep.fr/IMG/pdf/bull-474\\_Gaud.pdf](http://www.apmep.fr/IMG/pdf/bull-474_Gaud.pdf) pour voir le parallélisme entre l'évolution de la notion d'arbre probabiliste et celle du tableau de signes d'une expression polynomiale.

## Partie A.

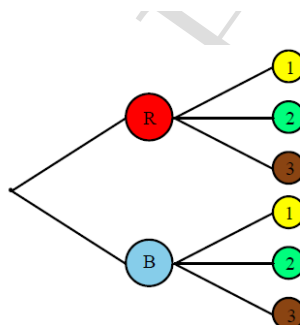
Aucune référence aux arbres de quelques natures que ce soit dans l'énoncé du programme mais, la question de savoir comment enseigner les expériences aléatoires à deux épreuves se posant, il en est tout autrement dans le document d'accompagnement dont voici un extrait<sup>8</sup> :

Aucune compétence sur les expériences à deux épreuves n'est exigible dans le cadre du socle commun. Les situations proposées aux élèves doivent rester élémentaires. On se bornera à des expériences conduisant à un maximum de 6 cas ( $2 \times 2$ ,  $2 \times 3$  ou  $3 \times 2$ ) et on n'abordera pas les cas de tirages successifs dans une urne (avec ou sans remise)<sup>9</sup>.

On considère l'expérience suivante, qui se déroule en deux étapes : d'abord, on fait tourner la roue de loterie située ci-dessous à gauche (on obtient la couleur « Rouge » avec une probabilité de 0,25 et la couleur « Bleu » avec une probabilité de 0,75). Ensuite, on fait tourner la deuxième roue de loterie (on obtient le numéro 1 avec la probabilité  $1/6$ , le numéro 2 avec la probabilité  $1/2$  et le numéro 3 avec la probabilité  $1/3$ ).

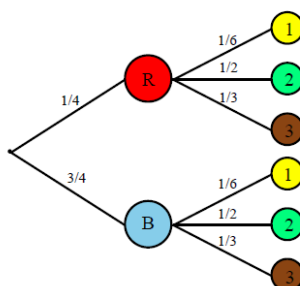


Un arbre non pondéré permet de déterminer tous les résultats possibles à l'issue de ces deux étapes. Les résultats possibles peuvent être notés ainsi : (R, 1), (R, 2), (R, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3). Chacun de ces résultats est représenté dans l'arbre ci-dessous par la succession de deux branches<sup>10</sup>.



On cherche la probabilité d'obtenir chacun des six résultats possibles à l'issue des deux étapes : (R, 1), ..., (B, 3).

On peut pondérer l'arbre avec les probabilités :



La démarche rejoint celle de Engel et suscite quelques remarques et questions :

- l'exemple choisi entretient la confusion entre le modèle et la réalité ;
- l'approche fréquentiste est mathématiquement problématique : la probabilité est un nombre qui est probablement voisin de la fréquence. La probabilité est définie par les probabilités : on a donc une définition circulaire ;
- l'approche fréquentiste ne serait-elle pas incompatible avec la notion d'intervalle de fluctuation enseigné en seconde ?

<sup>8</sup> <http://www.arpeme.fr/documents/7E7DAF5DD2B58FE9343.pdf>

- la justification par la multiplication des fréquences est plus de nature psychologique que logique ;
- l'apprentissage dès la troisième de la formule  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  n'est-il pas source d'obstacle dans les classes ultérieures lorsque sera introduite la notion de probabilités conditionnelles ?
- la notion d'indépendance est laissée à l'appréciation du lecteur.

## b. Au lycée

Voici ce que disent les documents ressources<sup>9</sup> :

### A. Exemple d'expérience aléatoire à deux épreuves

On se donne :

- une urne contenant quatre boules indistinguables au toucher dont trois boules bleues, notées  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ , portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, et une boule rouge unique, notée  $r$  ;
- un jeu de six cartes identiques portant chacune un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre "1" en vert, une carte avec un chiffre "2" en rouge, une carte avec un chiffre "2" en bleu, une carte avec un chiffre "2" en vert, une carte avec un chiffre "3" en rouge, une carte avec un chiffre "3" en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte. On rappelle qu'un modèle associé à cette expérience aléatoire est défini par la donnée :

- de l'ensemble  $\Omega$  de toutes les issues possibles de l'expérience ;
- d'une probabilité  $P$  déterminée par ses valeurs pour chacun des événements élémentaires définis par ces issues.

La liste de toutes les issues possibles peut être trouvée en utilisant l'arbre des possibles ci-dessous. Les issues possibles pour cette expérience aléatoires sont les couples  $(R,1)$  ;  $(R,2)$  ;  $(R,3)$  ;  $(B,1)$  ;  $(B,2)$  ;  $(B,3)$  où  $B$  désigne la couleur « Bleu » et  $R$  la couleur « Rouge ».

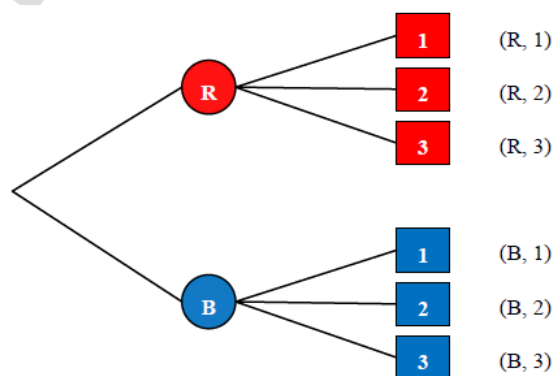


Figure 1

<sup>9</sup> [http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/59/6/Ressource\\_Statistiques\\_Probabilites\\_1eres\\_208596.pdf](http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/59/6/Ressource_Statistiques_Probabilites_1eres_208596.pdf)

Une fois les issues toutes identifiées, il s'agit de trouver la probabilité des événements élémentaires déterminés par chacune des issues. Il est clair que l'équiprobabilité n'est pas une réponse possible. En effet, on a des raisons de penser que la couleur « Bleu » sera plus probable que la couleur « Rouge » et que le chiffre « 2 » a plus de chances de sortir que les autres ; en conséquence, l'issue  $(B,2)$  a plus de chances de sortir que l'issue  $(R,1)$ .

Pour affecter une probabilité à chacune des issues, nous allons considérer un autre modèle (qualifié par la suite de **modèle intermédiaire**) qui prend en compte, pour la boule extraite, sa couleur et aussi son numéro éventuel, et pour la carte, le chiffre mentionné mais aussi sa couleur. On peut recenser tous les résultats par l'arbre représentant les issues possibles ci-après.

On obtient  $4 \times 6$  résultats possibles.

On peut les noter de la façon suivante :  $(r,1)$  ;  $(r,2)$  ;  $(r,2)$  ;  $(r,2)$  ;  $(r,3)$  ;  $(r,2)$  ;  $[\dots]$

Chaque branche de l'arbre représente une issue, et compte tenu des conditions du tirage équiprobable de la boule, puis du tirage équiprobable de la carte, il n'y a pas de raison de penser qu'une branche de l'arbre ait plus de chances d'être parcourue qu'une autre. On peut donc considérer que chacune des issues précédentes a la même probabilité, égale à  $1/24$ , d'être réalisée. Dans le modèle intermédiaire, par exemple, l'événement « Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre « 2 » » se représente mathématiquement par le sous-ensemble des issues  $\{(b_1,2); (b_1,2); (b_1,2); (b_2,2); (b_2,2); (b_2,2); (b_3,2); (b_3,2); (b_3,2)\}$ .

Par suite, la probabilité de cet événement sera égale à  $9/24$ . Revenant alors au premier modèle où l'événement « Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre « 2 » » se représente mathématiquement par

l'événement élémentaire  $\{(B,2)\}$ , on prendra  $9/24$  pour la probabilité d'obtenir l'issue  $(B,2)$ . On peut faire de même pour les cinq autres issues :  $(R,1)$  ;  $(R,3)$  ;  $(B,1)$  ;  $(B,2)$  ;  $(B,3)$ .

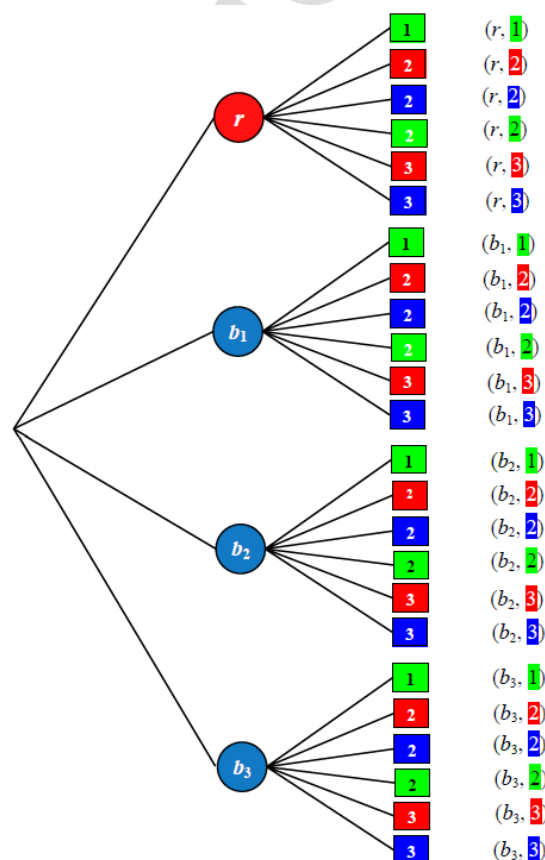


Figure 2

La démarche menée avec les arbres de dénombrement permet de trouver le modèle de l'urne de Bernoulli donc de calculer les probabilités sans passer par les arbres probabilistes.

### B. Justification de l'arbre des probabilités

Si on revient à l'arbre (cf. figure 2) utilisé pour trouver toutes les issues possibles du modèle intermédiaire, on constate que cet arbre est très fastidieux à dessiner. Dans la mesure où on ne s'intéresse qu'à la couleur de la boule et au chiffre inscrit sur la carte, on peut alléger sa construction, moyennant quelques conventions de lecture, pour retrouver l'arbre (cf. figure 1) des issues possibles du premier modèle pondéré par les probabilités et justifier la règle des produits de la façon suivante :

#### Étape 1 :

Partant de l'arbre de la figure 2, dans la mesure où on ne s'intéresse qu'à la couleur de la boule (et non à son numéro éventuel) et qu'au chiffre inscrit sur la carte (et non à sa couleur) on peut convenir de représenter chaque branche de l'arbre de la figure 2 aboutissant à la même couleur de boule, par une seule branche comprenant autant de traits parallèles qu'il y a de boules physiques de cette même couleur. On procède de même en représentant chaque branche de l'arbre de la figure 2 aboutissant à un même chiffre de carte, par une seule branche comprenant autant de traits parallèles qu'il y a de cartes physiques avec ce même chiffre inscrit avec des couleurs différentes. On obtient ainsi l'arbre plus simple de la figure 3 ci-après qui contient cependant autant de branches que celui de la figure 2 tout se rapprochant de l'allure de l'arbre de la figure 1.

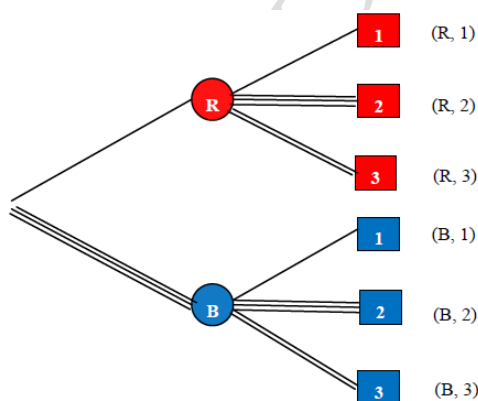


Figure 3

#### Étape 2

On peut alors simplifier davantage l'arbre de la figure 3, en représentant chaque branche par un seul trait pondéré par le nombre de traits composant la branche correspondante dans l'arbre de la figure 3. On obtient alors l'arbre pondéré de la figure 4 qui suit :

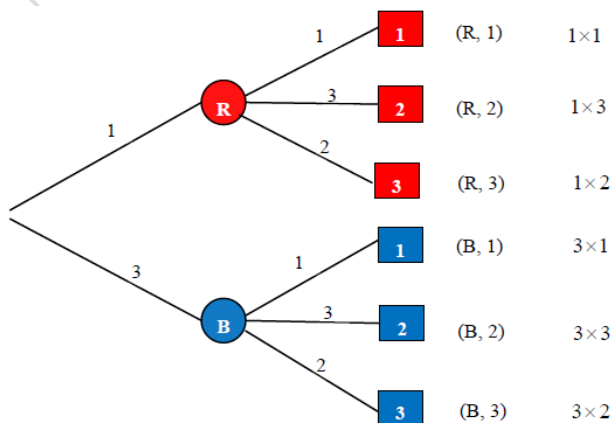


Figure 4

On remarque alors que le produit des nombres rencontrés le long d'un chemin représentant une issue du premier modèle est égal au nombre de chemins de l'arbre de la figure 2 qui réalisent l'événement correspondant dans le modèle intermédiaire. Ainsi, pour l'événement « Tirer une boule bleue puis une carte portant le chiffre 2 », c'est-à-dire  $(B,2)$ , le produit  $3 \times 3$  est égal au nombre de chemins dans le modèle intermédiaire, soit 9.

On a simplifié l'arbre de dénombrement qui, comme cela était déjà le cas avec l'arbre de la figure 2, donne la composition de l'urne de Bernoulli permettant de calculer la probabilité de chacune des issues : la probabilité de l'issue  $(B,2)$  est  $9/24$ .

Comment le document ressources invite-t-il à passer de l'arbre de dénombrement à l'arbre probabiliste ?

### Étape 3

Cette étape consiste à pondérer chaque branche de l'arbre, non plus avec le nombre de traits composant la branche correspondante dans l'arbre de la figure 3, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches d'un même niveau. On obtient ainsi l'arbre pondéré suivant :

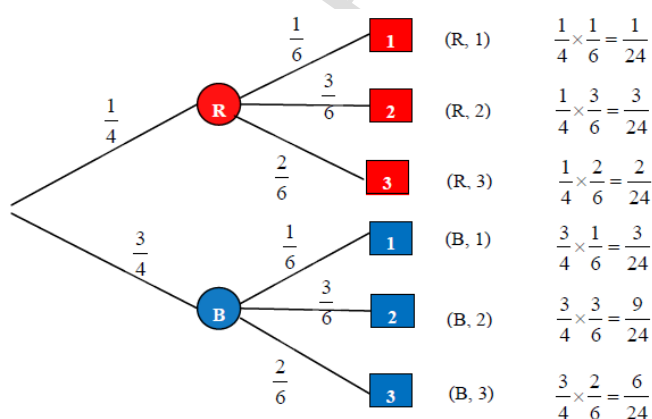


Figure 5

**On remarque**<sup>10</sup> alors que le produit des quotients affectés aux diverses branches d'un chemin aboutissant à une issue donnée du premier modèle, par exemple pour  $(B,2)$  le produit  $3/6 \times 3/4$ , est égal à la probabilité, dans cet exemple  $9/24$ , que cette issue se réalise. Cette remarque est valable pour toutes les branches de l'arbre. Au final, on peut constater que l'arbre de la figure 5 n'est rien d'autre que l'arbre de probabilités associé à l'arbre des possibles de la figure 1.

L'étape 3, passage de l'arbre de la figure 4 à celui de la figure 5, est problématique car une fois encore fondée sur un argument plus psychologique que logique : « on remarque que ». Elle apparaît comme un tour de passe-passe pédagogique qui permet la justification de la multiplication des probabilités sans utiliser les probabilités conditionnelles. Mais cela fonctionne-t-il dans toutes les situations ?

La justification est complètement différente de celle proposée en troisième basée il est vrai

<sup>10</sup> Souligné par les auteurs.

sur l'approche fréquentiste préconisée par les programmes. Comment fait-on cohabiter ces deux approches ?

D'autre part, au lycée, il semble, sans que cela ne soit explicité, que les calculs de probabilités sont fondés sur le modèle de l'urne de Bernoulli. Ce modèle, que l'on perd de vue dans la démarche proposée par le document ressource, permet de calculer immédiatement les probabilités cherchées à partir de l'arbre de la figure 4 sans utilisation d'arbre probabiliste.

## 4. Le doute

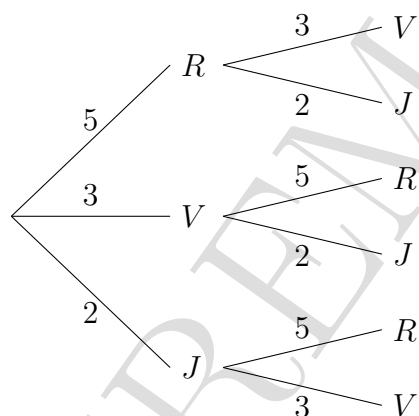
Considérons l'exercice suivant :

*Une urne est composée de cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules jaunes invisibles de l'extérieur et indiscernables au toucher (ce qui assure l'équiprobabilité des tirages d'une boule dans cette urne). L'épreuve consiste à tirer une boule, noter sa couleur, enlever de l'urne toutes les boules de cette couleur puis en tirer une deuxième et noter sa couleur.*

*Calculer la probabilité de tirer une boule jaune puis une verte.*

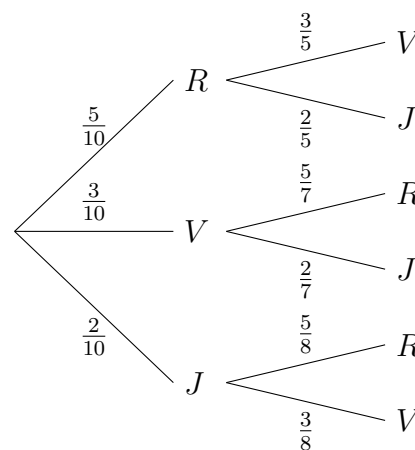
Pour résoudre cet exercice en classe de première, reprenons le document d'accompagnement :

Dresser l'arbre des issues possibles conformément au document ressource, puis pondérer chaque branche par le nombre de boules de chaque couleur selon la composition de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage :



Arbre 1 qui correspond à l'arbre de la figure 4 du document ressource

Puis passer à l'arbre probabiliste en suivant l'étape 3 du document ressource :



Arbre 2 qui correspond à l'arbre de la figure 5 du document ressource

La probabilité de tirer une boule jaune puis une verte est donc  $\frac{2}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$ .

Mais qu'en est-il de la justification donnée dans le document ressource ?

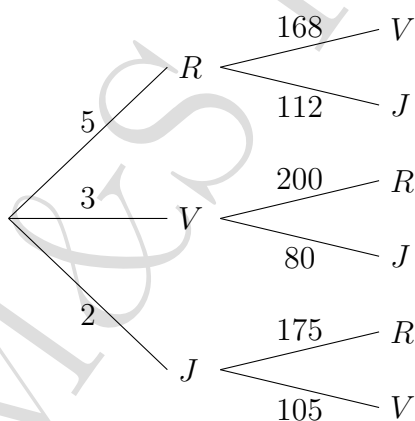
Pour rappel : « **On remarque** alors que le produit des quotients affectés aux diverses branches d'un chemin aboutissant à une issue donnée du premier modèle, par exemple pour (B,2) le produit  $\frac{3}{6} \times \frac{3}{4}$ , est égal à la probabilité, dans cet exemple  $\frac{9}{24}$ , que cette issue se réalise ».

## Partie A.

D'après l'arbre 1 correspondant à celui de la figure 4 du document ressource, on obtient 15 RV, 10 RJ, 15 VR, 6 VJ, 10 JR et 6 JV. D'où on pourrait conclure que sur 62 issues il y en a 6 JV donc la probabilité de tirer une boule jaune puis une verte est  $6/62$  soit  $3/31$ . On observe alors que la justification donnée dans le document ressource ne fonctionne plus (tout en sachant que le résultat  $3/40$  qui repose en fait sur les probabilités conditionnelles est exact).

Pour comprendre l'erreur commise dans le raisonnement lié à l'arbre 1, il faut remarquer que l'urne constituée suite au dénombrement,  $\{15 RV, 10 RJ, 15 VR, 6 VJ, 10 JR \text{ et } 6 JV\}$ , n'est pas une urne de Bernoulli dans la mesure où les issues recensées ne sont pas équiprobables. En effet la proportion d'issues avec R en premier ( $15/62$ ) n'est pas égale à la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage ( $1/2$ ), de même pour les issues avec V en premier et avec J en premier.

Néanmoins on peut envisager un raisonnement utilisant une urne de Bernoulli modélisant l'épreuve à condition de constituer cette urne en respectant les probabilités de tirages avec R, V ou J en premier. Pour cela il suffit que le nombre total de boules de l'urne dans laquelle on effectue le second tirage soit le même, quel que soit l'issue du premier tirage, par exemple le ppcm de 5, 7 et 8 soit 280. On peut alors dresser l'arbre de dénombrement en respectant la condition énoncée ci-dessus et en affectant aux branches du second niveau une pondération conforme aux probabilités du second tirage :



Arbre 3

Sur cet arbre, on dénombre 1400 issues avec R en premier, 840 avec V en premier et 560 avec J en premier sur un total de 2800. Les proportions correspondent alors aux probabilités d'obtention de chaque couleur au premier tirage.

D'où à l'aide de l'urne de Bernoulli qui en découle,  $\{840 RV, 560 RJ, 600 VR, 240 VJ, 350 JR, 210 JV\}$ , on obtient pour probabilité de JV :  $210/2800$  soit  $3/40$ .

Autrement dit la justification s'appliquant à l'exemple choisi dans le document ressource s'avère fausse.

## 5. Comment enseigner le calcul de probabilités en cas d'épreuves successives<sup>11</sup> ?

Il nous semble que, quel que soit le niveau où les probabilités sont enseignées, il ne faut pas confondre les expériences réelles et le modèle et que le calcul ne peut s'effectuer qu'une fois un modèle choisi. L'approche fréquentiste ne donne pas un modèle, il permet d'en choisir un. Seule l'urne de Bernoulli permet d'effectuer des calculs.

Jusqu'à l'introduction des probabilités conditionnelles, le calcul de probabilités lors d'épreuves successives ne peut passer que par la construction de l'urne de Bernoulli en s'aidant éventuellement d'arbres de dénombrement. Autrement dit nous pensons qu'il faut éviter les arbres probabilistes avant la terminale.

La multiplication des probabilités en cas d'épreuves successives ne peut être comprise que par le truchement des probabilités conditionnelles introduites à l'aide des urnes. L'utilisation prématurée des arbres probabilistes conduisant à la formule  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  risque d'engendrer des automatismes préjudiciables en terminale quand il n'y a plus indépendance des épreuves. On peut à ce propos être surpris de trouver dans les manuels ce qui suit sans aucune justification<sup>12</sup> :

### 1.2 Cas général

Lorsqu'une expérience aléatoire est la répétition de  $n$  épreuves identiques et indépendantes, on peut la représenter par un arbre pondéré.

On admettra que :

- une issue est une liste ordonnée de résultats, représentée par un chemin ;
- la probabilité d'une issue est le produit des probabilités de chacun de ces résultats.

### 1.3 Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

Les règles suivantes précisent les conditions à respecter pour construire un arbre pondéré représentant une expérience aléatoire et calculer les probabilités des événements.

#### Règle 1

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut 1.

Ceci est la loi des nœuds.

#### Règle 2

La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ceci est la loi des chemins.

#### Règle 3

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de A.

En classe de première, jusqu'à l'introduction de la loi binomiale, le modèle de l'urne de Bernoulli permet de traiter les exercices à propos d'épreuves successives.

En ce qui concerne la loi binomiale, les arbres probabilistes, comme nous venons de le voir n'étant pas justifiés de manière satisfaisante sans la notion de probabilités conditionnelles, nous proposons, ci-dessous, deux démarches possibles :

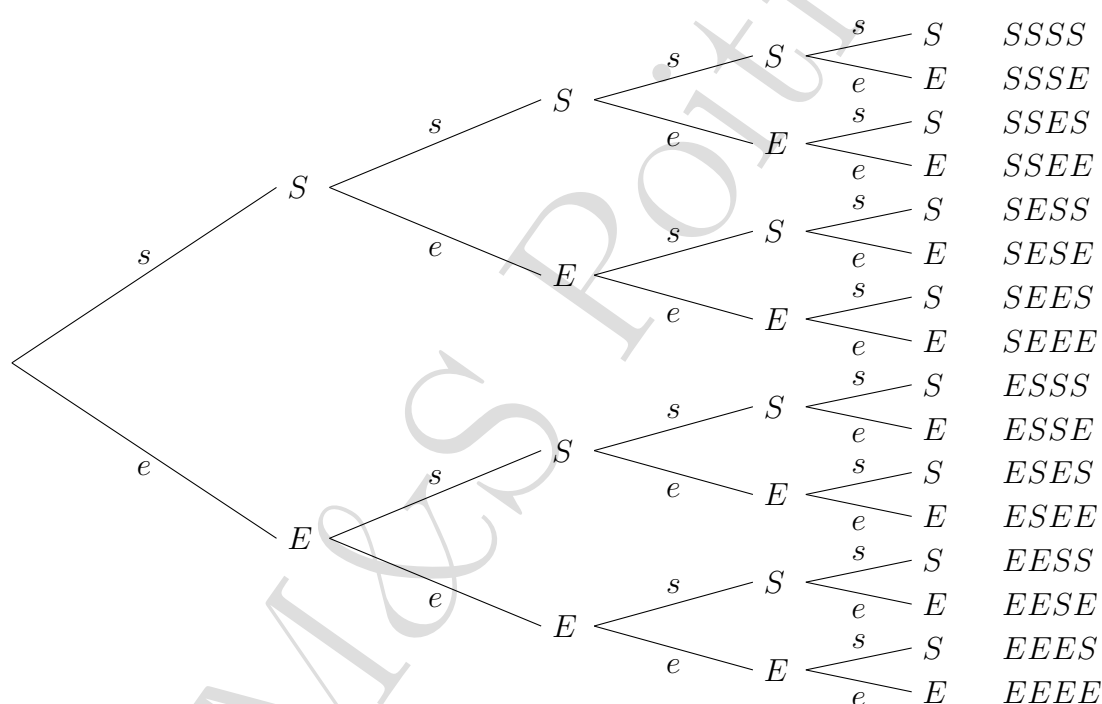
<sup>11</sup> L'intérêt des arbres probabilistes réside dans le calcul de probabilités dans le cas d'épreuves successives.

<sup>12</sup> Transmath 1ereS, programme 2011, page 320[1]

• **Première démarche :** Découvrir la loi binomiale sans les arbres **probabilistes**

Soit une épreuve  $\mathcal{E}$  à deux issues, l'une appelée succès notée  $S$  de probabilité  $p$  et l'autre échec notée  $E$  de probabilité  $1 - p$ .  $\mathcal{E}$  peut être modélisée par une urne de Bernoulli composée de  $N$  boules,  $s$  marquées  $S$  et  $e = N - s$  boules marquées  $E$  avec  $p = \frac{s}{N}$  et  $1 - p = \frac{e}{N}$ .

Considérons l'expérience aléatoire  $\mathcal{M}$  consistant à répéter quatre fois de suite l'épreuve  $\mathcal{E}$ , modélisée à chaque occurrence de  $\mathcal{E}$  par l'urne de Bernoulli décrite ci-dessus<sup>13</sup>. On cherche à déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès obtenus lors de la réalisation de l'expérience  $\mathcal{M}$ . Il s'agit alors de déterminer une urne de Bernoulli modélisant  $\mathcal{M}$ , ce qui peut se faire à l'aide d'un arbre de dénombrement comme celui de la figure 4 du document ressource, basé sur le principe de la multiplication.



On obtient ainsi une urne de Bernoulli<sup>14</sup> modélisant  $\mathcal{M}$ , comportant  $N^4$  boules,  $s^4$  marquées  $SSSS$ ,  $s^3e$  marquées  $SSSE$ ,  $s^2e^2$  marquées  $SSEE$ , ...

Sur l'arbre, un seul chemin mène à quatre succès mais on remarque que plusieurs chemins mènent à des issues comportant le même nombre de succès (et d'échecs) c'est-à-dire à une même valeur de  $X$ .

Six chemins aboutissent à deux succès et deux échecs : chacun des chemins correspond à  $s^2e^2$  boules de l'urne de Bernoulli qui en compte donc  $6 \times s^2e^2$  correspondant à  $X = 2$ .

Quatre chemins aboutissent à trois succès et un échec : chacun des chemins correspond à  $s^3e$  boules de l'urne de Bernoulli qui en compte donc  $4 \times s^3e$  correspondant à  $X = 3$ ...

<sup>13</sup> Cette formulation est une manière de comprendre la notion de répétition d'épreuves identiques et indépendantes figurant dans le programme.

<sup>14</sup> On remarquera que l'arbre de dénombrement obtenu respecte bien les conditions permettant de définir l'urne de Bernoulli modélisant l'épreuve  $\mathcal{M}$ , contrairement à l'arbre 1 du paragraphe IV.

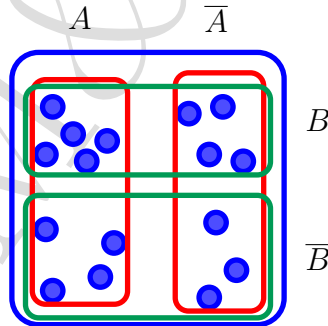
En notant  $\binom{4}{k}$  le nombre de chemins aboutissant à  $k$  succès lors de l'expérience  $\mathcal{M}$ , on a dans l'urne de Bernoulli modélisant  $\mathcal{M}$ ,  $\binom{4}{k} \times s^k$  boules correspondant à  $X = k$ ,  $\binom{4}{3} \times s^3 e$  boules correspondant à  $X = 3$ ,  $\binom{4}{2} \times s^2 e^2$  boules correspondant à  $X = 2$ , ... D'où la probabilité que :

$$\begin{aligned} - X = 4 \text{ est } & \binom{4}{4} \times \frac{s^4}{N^4} = \binom{4}{4} \times \left(\frac{s}{N}\right)^4 = \binom{4}{4} \times p^4 = p^4 \\ - X = 3 \text{ est } & \binom{4}{3} \times \frac{s^3 e}{N^4} = \binom{4}{3} \times \left(\frac{s}{N}\right)^3 \frac{e}{N} = 4 \times p^3(1-p) \\ - X = 2 \text{ est } & \binom{4}{2} \times \frac{s^2 e^2}{N^4} = \binom{4}{2} \times \left(\frac{s}{N}\right)^2 \left(\frac{e}{N}\right)^2 = 6 \times p^2(1-p)^2 \\ & \dots \end{aligned}$$

Ainsi la loi de probabilité de  $X$  est, pour  $k$  entre 0 et 4,  $P(X = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$ .

Formule qui peut être généralisée au cas de la répétition de  $n$  épreuves et ainsi obtenir la loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi  $n$  et  $p$ .

- **Deuxième démarche :** introduire les probabilités conditionnelles en première. Injonction est faite dans les programmes de ne pas introduire les probabilités conditionnelles mais il ne s'agit en aucun cas de traiter le programme de terminale, seulement justifier la multiplication des probabilités figurant sur les branches des arbres probabilistes. On peut procéder ainsi avec une urne de Bernoulli composée de  $N$  boules ayant deux caractères  $A$  et  $B$ .



Pour calculer la probabilité que  $B$  soit réalisé sachant que  $A$  est réalisé, on modélise la situation en se plaçant dans une nouvelle urne qui n'est composée que des boules marquées  $A$  et ainsi  $P_A(B) = N_{A \cap B} / N_A = (N_{A \cap B} / N) / (N_A / N) = P(A \cap B) / P(A)$ . Ainsi on retrouve la formule des probabilités conditionnelles.

Dans le cas de la loi binomiale, on doit alors admettre que  $P_A(B) = P(B)$  car la réalisation de  $A$  ne peut pas avoir d'incidence sur réalisation de  $B$ .

On peut alors reprendre la démarche classique enseignée dans les manuels.

## 6. Conclusion

Loin de nous l'idée de bannir l'usage des arbres probabilistes de notre enseignement. Notre propos a été de montrer qu'il est souhaitable de ne pas les introduire avant les probabilités conditionnelles au risque de créer des obstacles didactiques et qu'il est possible de le faire en n'utilisant que des arbres de dénombrement puis en calculant les probabilités après modélisation par une urne de Bernoulli. L'évolution du statut des arbres probabilistes dans les programmes montre qu'ils sont devenus objet d'enseignement alors qu'ils n'ont aucune vie dans le savoir académique. C'est ce que les didacticiens nomment glissement métacognitif. C'est malheureusement un phénomène classique<sup>15</sup> dans l'enseignement où un *outil* introduit dans les manuels devient un *objet d'étude* cité à étudier dans les programmes.

D'autre part, derrière les apparences se cache la notion d'indépendance. Elle est considérée comme naturelle depuis le collège sans être définie mathématiquement. Cela suffit largement pour résoudre les situations rencontrées dans les classes du second degré mais alors faut-il introduire l'indépendance de deux événements au lycée vu l'usage qui en est fait ?

Enfin, dernière remarque, le recours systématique aux arbres probabilistes peut installer chez certains élèves une conception chronologique ou causaliste de la notion de probabilités conditionnelles qui risque de constituer un obstacle didactique lorsqu'en terminale il sera demandé de « renverser » l'arbre<sup>16</sup>.

---

<sup>15</sup> Par exemple, *Quelques interrogations à propos du « tableau de signes »* dans le bulletin vert APMEP n° 474, [http://www.apmep.fr/IMG/pdf/bull-474\\_Gaud.pdf](http://www.apmep.fr/IMG/pdf/bull-474_Gaud.pdf)

<sup>16</sup> *L'introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence*[27].

## Bibliographie de la partie A.

- [1] In : *Transmath 1<sup>re</sup>* S. Nathan, 2011. Chap. 13 : Loi binomiale, p. 320.
- [3] Evelyne BARBIN et Jean-Pierre LAMARCHE. In : *IREM - Epistémologie et Histoire des Mathématiques*. Ellipses, 2004, p. 25.
- [9] Arthur ENGEL. *L'enseignement des probabilités et statistiques, volume 1*. Cedic, 1975.
- [10] “Enseigner les probabilités au lycée”. In : *Commission Inter-Irem « Statistiques et probabilités »* (1997).
- [18] Bernard PARZYSZ. “Des statistiques aux probabilités, exploitons les arbres”. In : *Repère IREM* (1993), p. 91-104.
- [19] Bernard PARZYSZ. “Un outil sous estimé : l’arbre probabiliste”. In : *bulletin APMEP n° 372* (1990), p. 47-52.
- [20] Heinz STEINBRING. “L’indépendance stochastique”. In : *Recherche en didactique des mathématiques 7.3* (1986).
- [27] André TOTOHASINA. “L’introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l’arborescence Règles d’utilisation d’un arbre pondéré”. In : *Repère IREM n° 15* (1994), p. 97-117.

## Partie B.

Comment gagner plus  
(ou perdre moins)  
aux jeux de la FDJ ?

## Présentation générale du parcours

L'omniprésence des jeux de hasard dans l'histoire de la vie des hommes amène naturellement un questionnement sur le hasard et sur l'attitude à tenir face aux phénomènes aléatoires.

Peut-on prévoir ou prédire quoi que ce soit dans ces domaines ?

Lorsqu'on regarde de près le fonctionnement du Loto par exemple, on peut être surpris par les statistiques tenues sur les numéros déjà sortis... Il existerait des numéros « chauds », des numéros « froids »<sup>1</sup>...

Voici, suite à nos études des tirages et numéros sortis, les numéros du **loto** selon leur état de forme :

**Les numéros du loto "chauds":**

13 37 48 40 6 22 33 26 29 30 15 31 32 45 46 47

**Les numéros du loto "tièdes":**

21 4 23 11 36 44 7 3 2 17 5 1 12 24 27 49 10

**Les numéros du loto "froids":**

41 16 34 25 39 20 19 28 9 35 43 18 38 8 14 42

Quel sens cela a-t-il ? En quoi la connaissance des tirages précédents permet-elle d'appréhender les tirages futurs ? Simple intuition ou loi mathématique ?

Dans d'autres situations moins ludiques, comme les sondages ou bien les tests médicaux, on retrouve les mêmes questionnements.

La théorie des probabilités permet de modéliser des phénomènes aléatoires et l'expérience statistique permet de valider ou d'invalidier ces modèles.

<sup>1</sup> <http://www.faites-vos-jeux.lib-expression.fr/loto/>

## 1. Organisation didactique du parcours

Ce parcours sur l'enseignement des probabilités en première prolonge celui de seconde sur des jeux de hasard plus anciens (*Comment estimer ses chances de gagner aux dés ?*<sup>2</sup>).

### Premier temps

#### Enquête/introduction : questionnaire et discussion sur le hasard

C'est l'occasion de reprendre les idées fausses et les idées justes sur la notion de hasard, et de réfléchir sur les enjeux sociaux des jeux de hasard (Casino, PMU, FDJ, ...). Pour cela, on visionne une courte vidéo liée si possible à l'actualité ou à des affaires plus anciennes (Riblet<sup>3</sup>, addiction au jeu, accompagnement psychologique des gagnants au loto, ...). On peut aussi faire le point sur les résultats d'un questionnaire<sup>4</sup> réalisé préalablement (pas nécessairement avec la même classe).

On annonce les études qui vont baliser le parcours :

- L'étude 1 sur deux jeux de la FDJ (*Astro et Fétiche*) et la notion d'espérance mathématique.
- L'étude 2 sur un jeu de casino (*La Boule*) et la loi binomiale.
- L'étude 3 sur l'affaire Riblet et la fluctuation d'échantillonnage.

### Deuxième temps

#### Étude 1 sur les jeux à gratter : *Astro vs Fétiche*

On cherche à comparer les deux jeux pour savoir si l'un est plus avantageux pour les joueurs que l'autre. On part de tickets réels (perdants) sur lesquels on va chercher et traiter les informations qui doivent y figurer.

- Quelles chances a-t-on de gagner ?
- Quelles chances a-t-on de perdre ?
- Quelle répartition des gains ?

Le but est, en plus d'alerter le sens critique du citoyen (30% des mises ne sont pas redistribuées et les chances de perdre sont habilement dissimulées), d'amener la notion de variable aléatoire, d'espérance (et de variance). On peut prolonger cette étude à d'autres jeux à gratter (réels ou virtuels) : Le résultat est frappant : tous ces jeux offrent la même espérance de gagner (ou plutôt de perdre). La différence est traduite par la variance (ou l'écart type) qui mesure la dispersion possible des gains.

---

<sup>2</sup> Enseigner les mathématiques en Seconde, Statistiques et probabilités, quatre parcours [15]

<sup>3</sup> Robert Riblet est un ancien ingénieur en procès avec la FDJ suite à une expérience statistique qu'il a personnellement mise en place et qui remet en cause le caractère aléatoire des jeux à gratter. Pour plus de précision voir le livre *100 % des perdants ont tenté leur chance. L'affaire des jeux de grattage* [6]

<sup>4</sup> Voir l'énoncé des études dans la partie 2.b, p.29.

### Troisième temps

#### Étude 2 sur le casino : *le jeu de la Boule.*

On va élaborer une stratégie sur un jeu plus simple et avec du « vrai » hasard : le Jeu de la Boule au Casino (ancêtre de la Roulette).

- Comment optimiser ses gains en jouant plusieurs fois de suite ?
- Combien gagne le casino à long terme ?
- Existe-t-il des « martingales » efficaces ?

C'est la rencontre progressive de la loi binomiale, qui pourra apporter des éléments de réponse. De plus, on observe une nette différence sur la redistribution des mises, qui doit également interpeler le citoyen. Pourquoi prélever 3% au casino au lieu de 30% à la FdJ ? (public concerné, ambiance...)

### Quatrième temps

#### Étude 3 sur la FDJ : *hasard ou pas ?*

On souhaite tester si un phénomène est dû ou non au hasard en prenant l'affaire Riblet comme exemple. Est-il possible à partir d'un certain nombre d'observations statistiques de se prononcer sur une triche à un jeu de hasard ? L'étude de la fluctuation entreprise en seconde s'approfondit ici grâce à la loi binomiale. Encore une fois, l'esprit critique est mis à l'épreuve. Peut-on faire confiance aux faiseurs de hasard ?

## 2. Organisation mathématique du parcours

### a. Les programmes

Les programmes de 1<sup>e</sup> ES-L, 1<sup>e</sup> STMG et 1<sup>e</sup> S sont assez proches en matière de contenus probabilistes, même si l'approche et le niveau de compétence peuvent différer : (intersection des trois programmes surlignée en jaune)

#### Extraits du programme de 1<sup>e</sup> ES-L (2010)

##### 2. Statistiques et probabilités

L'étude et la comparaison de séries statistiques menées en classe de seconde se poursuivent avec la mise en place de nouveaux outils dans l'analyse de données.

L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'Insee).

La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde.

L'utilisation des arbres pondérés est développée pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Elle est restreinte à ce cadre afin d'éviter toute confusion avec des situations relevant des probabilités conditionnelles.

Dans le cas particulier d'expériences identiques et indépendantes à deux issues, on introduit la loi binomiale. En s'appuyant sur cette loi, on poursuit la formation des élèves dans le domaine de l'échantillonnage.

| CONTENUS                                                                                                                            | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Statistique descriptive, analyse de données</b><br>Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type.<br>Diagramme en boîte. | <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile).</li> <li>Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.</li> </ul> | On utilise la calculatrice ou un logiciel pour déterminer la variance et l'écart-type d'une série statistique.<br>Des travaux réalisés à l'aide d'un logiciel permettent de faire observer des exemples d'effets de structure lors du calcul de moyennes.                |
| <b>Probabilités</b><br>Variable aléatoire discrète et loi de probabilité.<br>Espérance.                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire.</li> <li>Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.</li> </ul>                                                                                                                                                         | À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne d'une série de données.<br>On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire. |

| CONTENUS                                                                                                                                                                                                                                                                                  | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.</p> <p>Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.</p> <p>Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès).</p> <p>Coefficients binomiaux.</p> <p>Espérance de la loi binomiale.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.</li> <li>Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.</li> <li>Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale.</li> <li>Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.</li> <li>Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.</li> </ul> | <p>Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme.</p> <p>La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de <math>n</math> (<math>n \leq 4</math>) ;</li> <li>introduire le coefficient binomial <math>\binom{n}{k}</math> comme nombre de chemins de l'arbre réalisant <math>k</math> succès pour <math>n</math> répétitions ;</li> <li>établir enfin la formule générale de la loi binomiale.</li> </ul> <p>L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme. En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.</p> <p>La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise.</p> <p>◇ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.</p> |
| <p><b>Échantillonnage</b></p> <p>Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.</p>                                                                                                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde.</p> <p>◇ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.</p> <p>Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

Extraits du programme de 1<sup>e</sup> STMG (2012)

## Statistique et probabilités

## Objectifs

- Approfondir, par l'introduction de l'écart type, le travail entrepris en statistique au collège et en seconde.
- Résumer une série statistique par les couples moyenne/écart type et médiane/écart interquartile et interpréter ces résultats.
- Dans le domaine des probabilités, découvrir et utiliser un premier exemple de loi discrète : la loi binomiale.
- Utiliser cette notion pour poursuivre la formation dans le domaine de l'échantillonnage.

| Contenus                                                                                                       | Capacités attendues                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Statistique</b><br>Caractéristiques de dispersion : écart type, écart interquartile.<br>Diagramme en boîte. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart type) et (médiane, écart interquartile).</li> <li>- Rédiger l'interprétation d'un résultat ou l'analyse d'un graphique.</li> <li>- Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.</li> </ul> | L'expression de l'écart type n'est pas un attendu du programme. Sa détermination est faite avec le tableur ou la calculatrice.<br><br>Des travaux réalisés à l'aide d'un logiciel permettent de faire observer des exemples d'effets de structure lors du calcul de moyennes. |
| <b>Probabilités</b><br>Schéma de Bernoulli.                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.</li> <li>◊ Simuler un schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                         | Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.<br><br>La notion de probabilité conditionnelle est hors programme.                                                  |
| Variable aléatoire associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.                                   | - Connaître et utiliser les notations $\{X = k\}$ , $\{X < k\}$ , $P(X = k)$ , $P(X < k)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Aucun développement théorique à propos de la notion de variable aléatoire n'est attendu.                                                                                                                                                                                      |

| Contenus                                                                                                        | Capacités attendues                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Loi binomiale</b><br>Loi binomiale $B(n, p)$ .                                                               | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale et en identifier les paramètres.</li> <li>- Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale à l'aide de la calculatrice ou du tableur.</li> <li>- Représenter graphiquement la loi binomiale par un diagramme en bâtons.</li> </ul> | La notion de factorielle, les coefficients binomiaux et l'expression générale de $P(X = k)$ ne sont pas des attendus du programme.<br><br>Pour introduire la loi binomiale, la représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. Pour $n \leq 4$ , on peut ainsi dénombrer les chemins de l'arbre réalisant $k$ succès pour $n$ répétitions et calculer la probabilité d'obtenir $k$ succès.<br><br>◊ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.<br><br>Après cette mise en place, on utilise un tableur ou une calculatrice pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale. |
| <b>Espérance de la loi binomiale.</b>                                                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer l'espérance de la loi binomiale.</li> <li>- Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.</li> </ul>                                                                                                                                           | On admet l'expression de l'espérance de la loi binomiale.<br><br>L'espérance peut être conjecturée ou illustrée à l'aide de simulations.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Échantillonnage et prise de décision</b><br>Intervalle de fluctuation d'une fréquence.<br>Prise de décision. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation, à environ 95 %, d'une fréquence.</li> <li>- Exploiter un tel intervalle pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.</li> </ul>                                                                                         | ◊ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un algorithme ou d'un tableur.<br><br>Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

Extraits du programme de 1<sup>e</sup> S (2010)

## 3. Statistiques et probabilités

L'étude et la comparaison de séries statistiques menées en classe de seconde se poursuivent avec la mise en place de nouveaux outils dans l'analyse de données. L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'Insee).

La notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de modéliser des situations aléatoires, d'en proposer un traitement probabiliste et de justifier certains faits observés expérimentalement en classe de seconde. L'utilisation des arbres pondérés est développée pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes. Elle est restreinte à ce cadre afin d'éviter toute confusion avec des situations relevant des probabilités conditionnelles.

Dans le cas particulier d'expériences identiques et indépendantes à deux issues, on introduit la loi binomiale. En s'appuyant sur cette loi, on poursuit la formation des élèves dans le domaine de l'échantillonnage.

| CONTENUS                                                                                                                                                                                                                                                                                     | CAPACITÉS ATTENDUES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | COMMENTAIRES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Statistique descriptive, analyse de données</b><br>Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type.<br><br>Diagramme en boîte.                                                                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile).</li> <li>Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.</li> </ul>                                    | On utilise la calculatrice ou un logiciel pour déterminer la variance et l'écart-type d'une série statistique.<br><br>Des travaux réalisés à l'aide d'un logiciel permettent de faire observer des exemples d'effets de structure lors du calcul de moyennes.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Probabilités</b><br>Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart-type.                                                                                                                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire.</li> <li>Interpréter l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.</li> </ul>                                                                                                                                                                                            | À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données.<br><br>On exploite les fonctionnalités de la calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.<br><br>☐ On démontre les formules suivantes sur l'espérance et la variance :<br>$E(aX + b) = aE(X) + b$ et<br>$V(aX) = a^2 V(X)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.<br><br><br><br><br><br><br><br><br>Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.<br><br>Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès).<br><br>Coefficients binomiaux, triangle de Pascal. | <ul style="list-style-type: none"> <li>Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré.</li> <li>Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.</li> <li>Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale.</li> <li>Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.</li> </ul> | Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.<br>La notion de probabilité conditionnelle est hors programme.<br><br>On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée.<br>◇ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme.<br><br>La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de $n$ ( $n \leq 4$ ) ;<br>introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant $k$ succès pour $n$ répétitions ;<br>établir enfin la formule générale de la loi binomiale. |

|                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale.</p>                                                          | <p>☐ Démontrer que</p> $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Représenter graphiquement la loi binomiale.</li> <li>• Utiliser l'espérance d'une loi binomiale dans des contextes variés.</li> </ul> | <p>Cette égalité est établie en raisonnant sur le nombre de chemins réalisant <math>k+1</math> succès pour <math>n+1</math> répétitions. On établit également la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.</p> <p>L'utilisation des coefficients binomiaux dans des problèmes de dénombrement et leur écriture à l'aide des factorielles ne sont pas des attendus du programme.</p> <p>En pratique, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale.</p> <p>La formule donnant l'espérance de la loi binomiale est conjecturée puis admise, celle de la variance est admise.</p> <p>◇ On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme.</p> |
| <p><b>Échantillonnage</b><br/>Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion.</li> </ul>                                                 | <p>L'objectif est d'amener les élèves à expérimenter la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue et à remarquer que, pour une taille de l'échantillon importante, on conforte les résultats vus en classe de seconde.</p> <p>◇ L'intervalle de fluctuation peut être déterminé à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.</p> <p>Le vocabulaire des tests (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

Notons que le lien entre statistiques et probabilités est confirmé dans les trois séries, avec notamment l'apparition de l'espérance mathématique, interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

Un nouvel intervalle de fluctuation est introduit et cette fois justifié par la loi binomiale qu'il faut définir (et approfondir particulièrement en 1S).

Les notions statistiques de dispersion et de position permettent de résumer des lois de probabilités et de faire le lien avec les distributions statistiques observées.

Notons également le rôle et la place sensible de l'arbre pondéré<sup>5</sup>.

On observe toutefois quelques différences dans la technicité des calculs (tableur ou calculatrice en STMG, utilisation des coefficients binomiaux en ES-L et surtout en S) et du seuil de confiance pour les intervalles de fluctuation (95% en STMG, quelconque en ES-L et S).

Globalement dans les trois séries, plusieurs compétences peuvent être doublement travaillées (dualité loi de probabilité/distribution statistique) :

- passer des effectifs aux fréquences ;
- représenter une série statistique(ou une loi de probabilité) graphiquement ;
- concevoir, mettre en œuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou de la calculatrice.

<sup>5</sup> Voir à ce propos la partie A : Arbres probabilistes : outil de résolution ou objet d'enseignement indispensable

De même, des compétences en dénombrement vont être développées :

- trouver et utiliser une urne de Bernoulli modélisant une situation pour calculer une probabilité ;
- construire un arbre de dénombrement et de probabilité (dans le cas des répétitions indépendantes) ;
- utiliser les coefficients binomiaux.

Enfin on approfondit les raisonnements d'inférence statistique :

- expérimenter un grand nombre de fois pour estimer une probabilité (une proportion) ;
- exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage.
- prendre une décision (rejet ou non d'hypothèse) à partir d'un échantillon.

Le parcours proposé est donc bien adapté aux trois programmes, à condition de différencier certains points (plus de tableur en STMG, plus de technique en S...).

## b. Énoncés des études

Premier tempsEnquête/introduction : questionnaire et discussion sur le hasard

Calcul mental sans réfléchir ! Cinq questions (50 secondes) : « Choisir au hasard » :

- un nombre (entier) entre 1 et 10.
- une voyelle.
- une couleur.
- une année du 20ème siècle.
- pile ou face.

Que pensez-vous des résultats obtenus dans cette autre classe :

**Entiers de 1 à 10**

| issue    | 1 | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |       |
|----------|---|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| effectif | 1 | 5    | 1     | 3    | 4     | 3     | 3     | 3     | 3     | 2     | total |
| freq     |   | 3,6% | 17,9% | 3,6% | 10,7% | 14,3% | 10,7% | 10,7% | 10,7% | 10,7% | 7,1%  |

total  
28

**Voyelles**

| issue    | a     | e    | i    | o     | u    | y     | tot |
|----------|-------|------|------|-------|------|-------|-----|
| effectif | 13    | 2    | 1    | 5     | 1    | 6     | 28  |
| freq     | 46,4% | 7,1% | 3,6% | 17,9% | 3,6% | 21,4% |     |

**Pile ou Face**

| issue    | Pile  | Face  | tot |
|----------|-------|-------|-----|
| effectif | 16    | 12    | 28  |
| freq     | 57,1% | 42,9% |     |

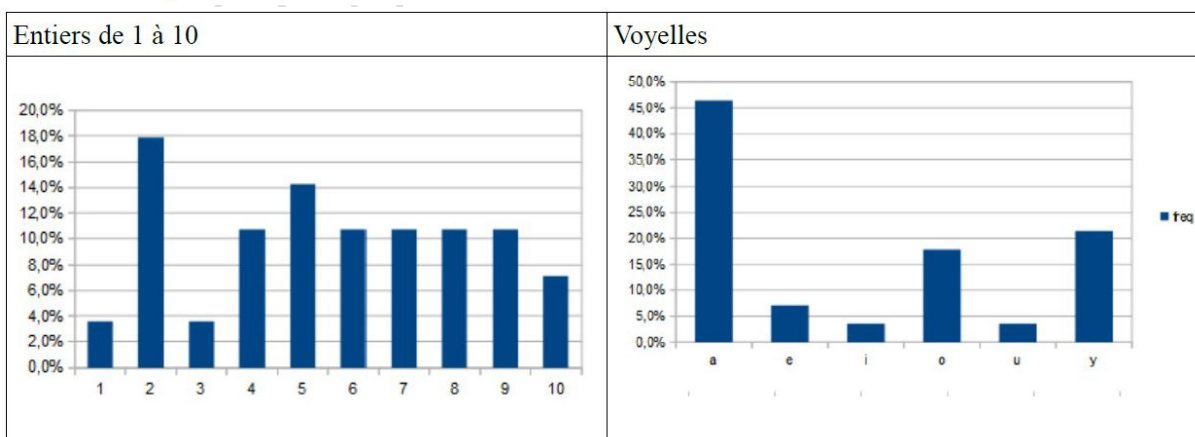
**Couleur**

| issue    | Bleu  | Jaune | Rouge | Vert  | Noir | Violet | Cyan | Rose | Marron |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|------|--------|------|------|--------|-------|
| effectif | 5     | 3     | 10    | 4     | 2    | 1      | 1    | 1    | 1      | total |
| freq     | 17,9% | 10,7% | 35,7% | 14,3% | 7,1% | 3,6%   | 3,6% | 3,6% | 3,6%   | 28    |

**Années Xème**

| issue    | 1901 | ... | 1914 | ... | 1942 | ... | 1972 | ... | 1997 | ... | 2000 |
|----------|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| effectif | 1    |     | 2    |     | 2    |     | 3    |     | 2    |     | 0    |

Rq : 1780 et 2009 sont cités une fois

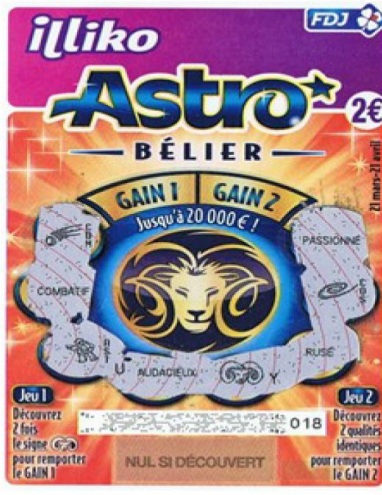


## Deuxième temps

### Étude 1 sur les jeux à gratter : *Astro vs Fétiche*

J'ai acheté deux tickets il y a quelques années, un *Astro* et un *Fétiche*. Valait-il mieux jouer alors à l'*Astro* ou au *Fétiche* (voir les tableaux de lots ci-dessous) ?

Et maintenant (voir les tableaux de lots actuels sur le site de la FDJ) ?

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p><b>iliko Astro</b> 2€<br/>BÉLIER<br/>Jusqu'à 20 000 € !<br/>GAIN 1 GAIN 2<br/>COMBATIF PASSIONNÉ<br/>AUDACIEUX RUSE<br/>Jeu 1 : Découvrez 2 fois le signe pour remporter le GAIN 1<br/>Jeu 2 : Découvrez 2 signes identiques pour remporter le GAIN 2<br/>NUL SI DÉCOUVERT</p> | <p><b>Emission N°01 du code jeu 513</b></p> <p>La participation à ce jeu implique l'adhésion à son règlement publié au Journal Officiel, disponible auprès de La Française des Jeux, et qui peut être consulté auprès des détaillants et sur fdj.fr</p> <p><b>Tableau de lots :</b> sur 1 500 000 tickets : 268 000 lots de 2€, 117 000 lots de 4€, 82 000 lots de 8€, 13 000 lots de 18€, 700 lots de 50€, 20 lots de 150€, 4 lots de 2 000€ et 2 lots de 20 000€. Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.</p> <p><b>Paiement des gains :</b> jusqu'à 200€ inclus dans les points de vente commercialisant l'offre "grattage" de La Française des Jeux ; au-delà dans un centre de paiement de La Française des Jeux.</p> <p><b>Date limite de paiement et de réclamation :</b> 30 jours à compter de la date indiquée dans l'avis de clôture de la présente émission, publié au Journal Officiel et disponible sur fdj.fr</p> |
|  <p><b>iliko NUMÉRO FÉTICHE 2</b> 1€<br/>7€ 6€ 10€ 100€ 1000€<br/>SI VOUS DÉCOUVREZ UNE OU PLUSIEURS FOIS LE NUMÉRO 2 (DEUX) VOUS GAGNEZ LA OU LES SOMMES CORRESPONDANTES.<br/>NUL SI DÉCOUVERT<br/>106</p>                                                                      | <p><b>Emission 01 du code jeu 490</b></p> <p>La participation à ce jeu implique l'adhésion à son règlement publié au Journal Officiel, disponible auprès de La Française des Jeux, et qui peut être consulté auprès des détaillants et sur fdj.fr</p> <p><b>Tableau de lots :</b> sur 360 000 tickets : 39 000 lots de 1€, 30 000 lots de 2€, 9 360 lots de 6€, 1 690 lots de 10€, 720 lots de 50€, 118 lots de 100€ et 7 lots de 1 000€. Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.</p> <p><b>Paiement des gains :</b> jusqu'à 200€ inclus dans les points de vente commercialisant l'offre "grattage" de La Française des Jeux ; au-delà dans un centre de paiement de La Française des Jeux.</p> <p><b>Date limite de paiement et de réclamation :</b> 30 jours à compter de la date indiquée dans l'avis de clôture de la présente émission, publié au Journal Officiel et disponible sur fdj.fr</p>                           |

### Guide (facultatif selon la série enseignée)

1. Pourquoi considère-t-on que ces jeux sont des jeux de hasard ?
2. Quelle est la probabilité d'acheter un ticket perdant à l'*Astro* ?
3. Quelle est la probabilité d'acheter un ticket gagnant au *Fétiche* ?
4. Donner la loi de probabilité des gains pour chaque jeu.
5. Quel serait le gain moyen par ticket si on achetait tous les tickets ?
6. Dans quel jeu la dispersion des gains est-elle la plus forte ?
7. Conclure.

### Exercice (facultatif)

Étudier les versions en ligne de ces deux jeux.

(voir <https://www.fdj.fr/jeux/illiko-jeux-de-grattage/astro>)<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Voir annexe 1, page 45.

### Troisième temps

#### Étude 2 sur le casino : le jeu de la Boule.<sup>7</sup>

Le jeu de la boule est un jeu de casino similaire à celui de la roulette, mais avec les chiffres de 1 à 9. Il n'y a que deux types de mises : Chance simple (sur quatre numéros) ou Numéro plein (sur un seul numéro).

« J'ai dix euros pour jouer, vaut-il mieux que je mise une fois dix euros, ou bien dix fois un euro ? »

|                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Numéro plein</b><br/>Si le numéro misé sort, le joueur gagne 7 fois la mise sinon la mise est perdue.</p>  | <p><b>Chance simple</b><br/>Il est possible de miser rouge, noir, manque, passe, pair ou impair.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Les chiffres 1, 3, 7, 9 sont impairs.</li> <li>• Les chiffres 2, 4, 6, 8 sont pairs.</li> <li>• Les chiffres 1, 3, 6, 8 sont noirs.</li> <li>• Les chiffres 2, 4, 7, 9 sont rouges.</li> <li>• Les chiffres 1, 2, 3, 4 sont manques.</li> <li>• Les chiffres 6, 7, 8, 9 sont passes.</li> </ul> <p>Le chiffre 5 n'est ni pair, ni impair, ni manque, ni passe, ni rouge, ni noir.<br/>Si le 5 sort, la mise jouée sur une chance simple perd.</p> <p>Si la chance simple miseée sort, le joueur gagne une fois la mise, sinon la mise est perdue.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Guide(facultatif)

Pour chaque type de mise (Simple et Plein)

1. Je joue une fois 1 euro. Donner la loi de probabilité des gains(sans compter la mise) ainsi que l'espérance et l'écart type.
2. Je joue deux fois de suite 1 euro. Quelle est la probabilité que je gagne au moins une fois ? Donner la loi de probabilité des gains, ainsi que l'espérance et l'écart type.
3. Je joue trois fois de suite 1 euro. Même question.
4. Je joue dix fois de suite 1 euro. Même question.
5. Conclure : que me conseillez - vous ?

#### Exercice : martingales (facultatif)

Faire une recherche sur la martingale de Saint Petersburg. Puis exposer une méthode pour gagner contre le Casino...<sup>8</sup>

<sup>7</sup> [https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu\\_de\\_la\\_boule\\_\(jeu\\_de\\_casino\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_boule_(jeu_de_casino))

<sup>8</sup> Voir annexe 2, page 46.

## Quatrième temps

### Étude 3 sur la FDJ : *hasard ou pas ?*

On achète 40 tickets à gratter GOAL. On suppose qu'il s'agit bien d'un jeu de hasard.<sup>9</sup>

1. Estimer à l'avance le nombre de tickets gagnants, ainsi que le gain total (et donc le coût de l'opération).
2. Analyser les résultats obtenus.
3. Peut-on mettre en doute à partir de cette expérience les chiffres indiqués par la FDJ au dos des tickets (cf. tableau ci-dessous)<sup>10</sup> ?



| Gain                    | 0€ | 1€      | 2€      | 4€     | 10€    | 100€ | 400€ | 4000€ |
|-------------------------|----|---------|---------|--------|--------|------|------|-------|
| Nombre (sur 3 millions) | ?  | 323 000 | 295 000 | 60 000 | 77 000 | 20   | 5    | 2     |
| Nombre (sur 40 tickets) | 28 | 5       | 5       | 1      | 1      | 0    | 0    | 0     |

### c. Notions mathématiques abordées dans l'introduction et les trois études

Dans le questionnaire, l'objectif est de rappeler quelques notions sur le hasard...

- Un humain ne peut pas vraiment choisir au hasard.
- Un ordinateur non plus, mais il peut simuler le hasard de manière satisfaisante...
- Une véritable expérience aléatoire doit pouvoir être répétée plusieurs fois dans les mêmes conditions...
- Il est possible de faire des calculs dans certains cas (modèle de l'urne<sup>11</sup>) ou d'exploiter des observations statistiques sous certaines conditions.

Remarque : le visionnage d'une vidéo issue de l'actualité sur la Française des Jeux ou autres, peut aussi permettre d'amener cette discussion... Par exemple, le 6 juin 2018 :

#### Loterie : un homme deux fois millionnaire en 18 mois ! - Franceinfo



<https://www.francetvinfo.fr> > Eco / Conso > Votre argent

6 juin 2018 - Ajouté par Franceinfo

L'homme a **gagné deux fois** le pactole d'un jeu complémentaire de l'**Euro Millions**, et qui fonctionne comme ...

Dans l'étude 1, l'objectif est de définir la notion de variable aléatoire, de loi de probabilité et de donner un sens à l'espérance mathématique, à la variance et à l'écart type.

Les questions posées dans le guide, permettent une différenciation dans la gestion de classe, en fonction du niveau et de la série (ES-L, S ou STMG).

<sup>9</sup> Une discussion sur l'affaire Riblet peut légitimer un doute !

<sup>10</sup> Le tableau de gains et des résultats tel qu'il apparaît sur le site de la FDJ est donné en annexe.

<sup>11</sup> Une urne de Bernoulli, est une urne parfaite dont la composition permet de définir les probabilités élémentaires. Pour plus de précision, voir l'annexe 3 et le rappel sur le modèle de l'urne page 46.

On reprend en détails les rappels évoqués lors de l'introduction : notion de hasard, calcul de probabilité comme une proportion, formats d'écriture (fractionnaire, décimal, pourcentage, scientifique), évènement contraire, loi de probabilité (tableau des gains), puis on fait le lien entre moyenne et espérance. La notion de dispersion est également évoquée à l'aide de l'écart type déjà vu en statistiques, et permet de comparer les deux jeux. En effet, on constatera que tous les jeux de la FDJ ont la même espérance, mais pas forcément la même variance...

**Dans l'étude 2**, l'objectif est de réinvestir les notions de l'étude 1 (loi, espérance, écart type) et d'étudier la loi binomiale afin de choisir une stratégie face au hasard : « Vaut-il mieux jouer une fois dix euros, ou bien dix fois un euro ? »

Les questions posées dans le guide, permettent une différenciation dans la gestion de classe, en fonction du niveau et de la série (ES-L, S ou STMG).

La construction progressive d'arbres de dénombrement, puis d'arbres simplifiés<sup>12</sup> permet d'entrevoir et d'appréhender la formule de probabilité de la loi binomiale, mais prépare aussi à la notion de probabilité conditionnelle l'année suivante. L'écart type permet à nouveau de comparer deux stratégies de même espérance. Dans le cas de la loi binomiale, ces calculs sont nettement plus simples ! On obtient très rapidement un intervalle de fluctuation permettant une prévision « macroscopique ».

Il est alors possible de prévoir globalement ce qui va se reproduire (en acceptant une petite marge d'erreur).

**Dans l'étude 3**, l'objectif est de confronter la théorie du modèle probabiliste et la pratique via une petite expérience statistique. Toute ressemblance avec l'affaire Riblet n'est pas fortuite !

On réinvestit les connaissances acquises pour donner un « pronostic » basé sur des calculs de probabilités. L'analyse des résultats fera apparaître la pertinence des intervalles de fluctuation obtenus et justifiés par la loi binomiale.

---

<sup>12</sup> Voir la partie A : *Arbres probabilistes : outil de résolution ou objet d'enseignement indispensable* et en particulier les pages 8 et suivantes.

### 3. Compte rendu d'expérience

Je détaille ici ce qui s'est passé cette année dans ma classe de 1STMG (dont une partie des élèves avait suivi le parcours sur les jeux de dés<sup>13</sup> l'année précédente).

#### Premier temps

#### Enquête/introduction : questionnaire et discussion sur le hasard

Calcul mental sans réfléchir ! Cinq questions (50 secondes) : « Choisir au hasard » :

- un nombre (entier) entre 1 et 10.
- une voyelle.
- une couleur.
- une année du 20ème siècle.
- pile ou face.

Que pensez-vous des résultats obtenus dans cette autre classe ?<sup>14</sup>

Pour débiter ce chapitre, les élèves sont invités à commenter les résultats d'un questionnaire réalisé dans ma classe de seconde la semaine précédente. Certains se montrent déjà très critiques sur la question posée : est-ce possible de choisir au hasard ? qu'est-ce que cela signifie ? Ces notions ont été déjà abordées en seconde, et il est bon de se remémorer certains principes :

- pas de véritable hasard dans le choix d'un humain ou d'une intelligence artificielle ;
- on étudie simplement le hasard qui existe dans une urne parfaite (modèle de l'urne de Bernoulli), où on peut définir la probabilité qu'a une issue de se produire.

On peut souligner qu'il est possible de se rendre compte, en particulier dans le choix d'une voyelle, que les élèves de seconde n'ont pas répondu au hasard (malgré eux). En effet l'écart entre la fréquence observée (46,4%) et la probabilité théorique (1 chance sur 6 soit 16,7%) est trop important si l'on connaît certains résultats mathématiques de seconde (intervalle de fluctuation). Des études en psychologie<sup>15</sup> montrent que la lettre A est majoritairement choisie (sans doute parce que c'est la première voyelle de l'alphabet). En revanche, il est plus difficile de se prononcer sur le choix du pile ou face, et même de l'entier entre 1 et 10.

J'explique donc que le but de notre chapitre est d'approfondir certaines méthodes entrevues en seconde, consistant à calculer les probabilités de certains événements et de les confronter à des expériences répétées. Ainsi on pourra mieux comprendre comment fonctionne le hasard, et j'ajoute qu'on va en profiter pour apprendre à gagner de l'argent à certains jeux... (en réalité j'en rajoute un peu, mais c'est dans le but d'exacerber la motivation et l'intérêt des élèves).

Les élèves évoquent alors des jeux d'argent comme le poker, le black jack, le loto... Après réflexion, nous convenons qu'il vaut mieux commencer par des jeux de hasard « pur », ce qui n'est pas le cas du poker ou du black jack, où de véritables choix sont possibles (et

<sup>13</sup> Enseigner les mathématiques en Seconde, Statistiques et probabilités, quatre parcours [15]

<sup>14</sup> Voir page 29 pour les résultats de l'autre classe.

<sup>15</sup> Vous avez dit hasard ? Entre mathématiques et psychologie [12].

souhaitables). J'annonce donc que nous allons étudier deux situations : les jeux à gratter et la roulette.

Pour pimenter la sortie de la salle de classe et pour expliquer le principe de la roulette (les élèves ne sont pas très familiers avec cet ancien jeu de casino), j'organise un petit jeu qui consiste à miser sur rouge ou noir. On fait tourner une roulette (virtuelle à l'aide d'un petit fichier tableur). Ceux qui ont gagné peuvent sortir, les autres doivent rejouer... Cette sorte « d'escape game du chanceux » aura ainsi parfois lieu à la fin d'heure (cela permet de garder le caractère aléatoire et ludique de la roue).

## Deuxième temps

### Étude 1 sur les jeux à gratter : *Astro* vs *Fétiche*

J'ai acheté deux tickets il y a quelques années, un *Astro* et un *Fétiche*. Valait-il mieux jouer alors à l'*Astro* ou au *Fétiche*<sup>16</sup> ?

Et maintenant (voir les tableaux de lots actuels sur le site de la FDJ) ?

Pour commencer, je distribue aux élèves des tickets (perdants) qu'il me restait d'une expérience réalisée un vendredi 13 à l'IREM, avec la question ouverte : « Valait-il mieux jouer à l'*Astro* ou au *Fétiche* ? »

Les discussions commencent avec plus ou moins de pertinence :

« On peut pas savoir », « mon voisin, il a gagné 1000 euros au Banco », ou encore « il faut qu'on fasse des calculs ? »...

Pour mieux gérer les débats, je leur distribue l'énoncé avec les questions qui devraient nous guider plus facilement.

La question zéro permet d'insister sur le fil directeur (hasard ou pas hasard ?) en évoquant une première fois l'affaire Riblet, mais aussi sur le fait que les informations fournies sur les tickets permettent de construire une urne de Bernoulli nous permettant de faire tous les calculs de probabilité nécessaires.

Dans la question 1, on insiste sur le fait que le nombre de tickets perdants n'est pas indiqué sur le ticket. Je demande aux élèves s'ils devinent une raison à cet oubli. À ma grande surprise je constate que c'est loin d'être évident : un élève pensait par exemple que le but de la FDJ est de faire gagner de l'argent aux joueurs. Plus encore qu'en série ES ou S (où j'ai pu observer des esprits critiques plus développés), il est essentiel de prendre le temps de discuter avec ces élèves de STMG de ce sujet de société !

Dans les questions 2 et 3, les calculs deviennent nombreux, et les formats d'écriture compliquent la bonne compréhension des plus faibles<sup>17</sup>. La machine ou le tableur est nécessaire. Je choisis de leur faire compléter un fichier tableur, donnant la loi de probabilité des gains pour chaque jeu. L'aspect technique demande du temps, mais c'est l'occasion de retravailler la nécessaire maîtrise du tableur (sur laquelle le programme de STMG insiste fort justement). Les élèves les plus rapides complètent la loi des deux jeux, et peuvent même aller chercher sur internet les nouvelles versions en ligne, légèrement différentes.

<sup>16</sup> Voir les tableaux de lots page 30.

<sup>17</sup> Notamment les écritures scientifiques données systématiquement par la calculatrice pour les probabilités très faibles

|    | A                              | B                  | C             | D | E | F | G | H | I | J | K |
|----|--------------------------------|--------------------|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | Gain                           | X                  |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  | Proba                          | P(X)               |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | nombre de lots                 |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | ASTRO                          | (2euros le ticket) |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | 0,00 €                         |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  | espérance                      |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | Gain                           | X                  |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | Proba                          | P(X)               |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 | nombre de lots                 |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 | FETICHE                        | (1euro le ticket)  |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 | 0,00 €                         |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | espérance                      |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 | Règles du Jeu                  | Tableau des gains  | Visuels       |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 | ▼ Pour 4 500 000 unités de jeu |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 |                                | Nombre de lots     | Gain en euros |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 |                                | 4                  | 20 000 euros  |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |                                | 9                  | 1 000 euros   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |                                | 415                | 200 euros     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |                                | 2 112              | 30 euros      |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |                                | 44 992             | 18 euros      |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |                                | 225 008            | 8 euros       |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |                                | 450 008            | 4 euros       |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |                                | 647 544            | 2 euros       |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                                | 1 370 092          |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 34 |                                |                    |               |   |   |   |   |   |   |   |   |

|    | A                              | B                  | C              | D            | E | F | G | H | I | J | K |
|----|--------------------------------|--------------------|----------------|--------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | Gain                           | X                  |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  | Proba                          | P(X)               |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | nombre de lots                 |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | ASTRO                          | (2euros le ticket) |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | 0,00 €                         |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  | espérance                      |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | Gain                           | X                  |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | Proba                          | P(X)               |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 | nombre de lots                 |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 | FETICHE                        | (1euro le ticket)  |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 | 0,00 €                         |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | espérance                      |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 | Règles du Jeu                  | Tableau des gains  | Visuels        |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 | ▼ Pour 1 500 000 unités de jeu |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 |                                |                    |                |              |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 |                                | Nombre de lots     | Gains en euros | 1 chance sur |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 |                                | 3                  | 1 000 euros    | 500 000      |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |                                | 50                 | 100 euros      | 30 000       |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |                                | 150                | 25 euros       | 10 000       |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |                                | 800                | 15 euros       | 1 875        |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |                                | 22 000             | 10 euros       | 68           |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |                                | 54 680             | 4 euros        | 27,4         |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |                                | 157 500            | 2 euros        | 9,5          |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |                                | 190 050            | 1 euro         | 7,9          |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                                | 425 233            |                | 3,53         |   |   |   |   |   |   |   |

Un fichier élève est finalement projeté en guise de corrigé. On observe que la grande majorité des tickets sont perdants (68% à l'*Astro* et 78% au *Fétiche*). Mais cela ne suffit pas pour décider si l'un des deux jeux est plus « rentable ».

On peut faire la synthèse, dans le cours<sup>18</sup>, d'une première partie sur les lois de probabilité.

Dans les questions 4 et 5, la notion d'espérance comme valeur moyenne est introduite.

Le grand nombre de tickets dans un lot permet de donner du sens à cette valeur moyenne.

Ce nombre peut aussi être vu comme le gain moyen sur un grand nombre de parties<sup>19</sup>.

L'écart type déjà étudié en statistiques est réinvesti pour distinguer les deux jeux qui ont presque la même espérance (par euro joué) : 0,63€ pour le Fétiche (5,40€ d'écart type) et 0,66€ pour l'Astro (11,75€ d'écart type). Par rapport à la question posée, on pourrait donner un léger avantage à l'Astro, même si tous les avis peuvent se défendre. Dans chaque cas, on dispose de données objectives pour faire son choix.

La suite du cours est construite sur trois exemples simplifiés de jeux à gratter totalement fictifs. Il permet néanmoins de clarifier les notions avec des variables didactiques qui simplifient les calculs.

On peut alors conclure en insistant sur le fait que dans tous les cas, aujourd'hui comme hier ou demain, le joueur est perdant ! (et que la FDJ récupère environ 35% de la mise, soit à peu près deux fois la TVA !). Décider de jouer à un jeu de hasard, est un choix qui doit être réfléchi et conscient.

Quelques exercices classiques peuvent compléter ce temps.

<sup>18</sup> Voir Annexe 3.

<sup>19</sup> Ou comme le gain moyen dans le cas particulier où on achète la totalité des tickets du lot.

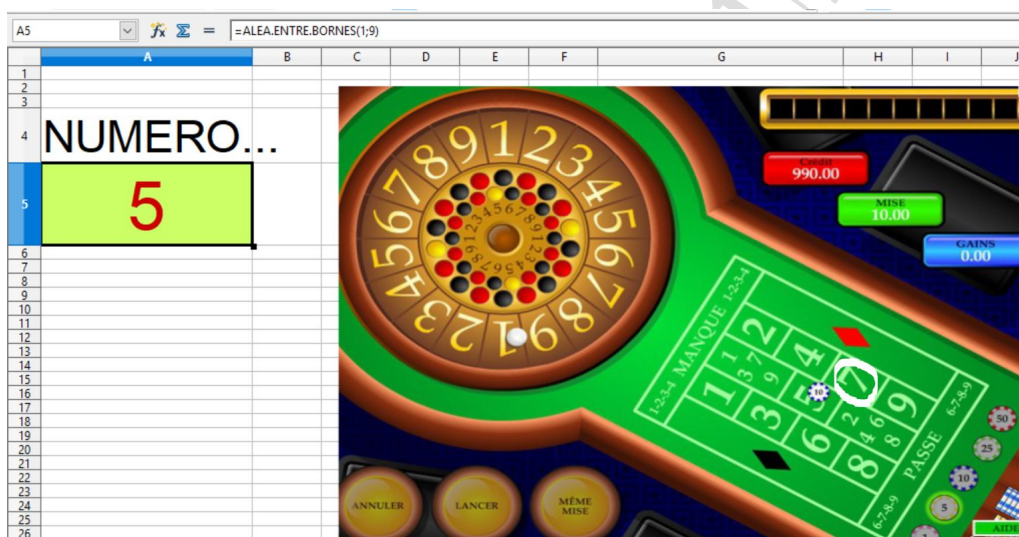
### Troisième temps

#### Étude 2 sur le casino : le jeu de la Boule.

Le jeu de la boule est un jeu de casino similaire à celui de la roulette, mais avec les chiffres de 1 à 9. Il n'y a que deux types de mises : Chance simple (sur quatre numéros) ou Numéro plein (sur un seul numéro)<sup>20</sup>

« J'ai dix euros pour jouer, vaut-il mieux que je mise une fois dix euros, ou bien dix fois un euro ? »

Je distribue les énoncés, et nous commençons par les règles du jeu. Je demande à un élève qui propose de miser son billet de cinq euros de décider : chance simple, numéro plein. . . Il choisit numéro plein : le 7. (Des études<sup>21</sup> montrent que c'est souvent ce qui est choisi par les néophytes). Je lance la roulette (simulée sur le tableur).



C'est un 5. Donc il perd sa mise (que je lui rend tout de même à la fin de l'heure).

Au bout de quelques essais, les élèves ont compris qu'il est moins risqué de jouer sur chance simple, même si le gain est alors plus faible. Après quelques discussions sur les stratégies de chacun (jouer en une ou plusieurs fois, chance simple ou numéro plein), nous passons aux questions guidées. Nous faisons ensemble la moitié du travail et ils terminent seuls l'autre moitié.

<sup>20</sup> Voir page 31 pour les indications sur un « numéro plein » ou une « chance simple ».

<sup>21</sup> Vous avez dit hasard ? entre mathématiques et psychologie [12]

Pour plus de lisibilité, je leur impose un modèle de présentation.

**Bilan Pb2 ( mercredi 9 mai)**

1) Je joue une fois 1 euro, donner la loi des gains ( sans compter la mise )ainsi que l'espérance et l'écart type.

| 1 euro sur Chance simple : une fois n=1 p=4/9                            |            |            | 1 euro sur Numéro plein : une fois n=1 p=1/9                             |            |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|------------|--------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| Nb succès $X$                                                            | 0          | 1          | Nb succès $X$                                                            | 0          | 1          |
| Gain                                                                     | 0          | 2          | Gain                                                                     | 0          | 8          |
| Proba $P(X)$                                                             | 5/9 = 0,56 | 4/9 = 0,44 | Proba $P(X)$                                                             | 8/9 = 0,89 | 1/9 = 0,11 |
| Espérance de gain : $0 \times 5/9 + 2 \times 4/9 = 8/9 = 0,89 \text{ €}$ |            |            | Espérance de gain : $0 \times 8/9 + 8 \times 1/9 = 8/9 = 0,89 \text{ €}$ |            |            |
| Ecart type : 0,99 €                                                      |            |            | Ecart type : 2,51 €                                                      |            |            |
| Proba de gagner au moins une fois : $P(X>0) = 0,44$                      |            |            | Proba de gagner au moins une fois : $P(X>0) = 0,11$                      |            |            |

2) Je joue deux fois de suite 1 euro quelle est la probabilité que je gagne au moins une fois ?  
Donner la loi des gains. Ainsi que l'espérance et l'écart type.

| 1 euro sur Chance simple : deux fois n=2 p = 4/9                                                              |              |              |              | 1 euro sur Numéro plein : deux fois n=2 p = 1/9 |   |   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|-------------------------------------------------|---|---|----|
| Nb succès $X$                                                                                                 | 0            | 1            | 2            | Nb succès $X$                                   | 0 | 1 | 2  |
| Gain                                                                                                          | 0            | 2            | 4            | Gain                                            | 0 | 8 | 16 |
| Proba $P(X)$                                                                                                  | 25/81 = 0,31 | 40/81 = 0,50 | 16/81 = 0,20 | Proba $P(X)$                                    |   |   |    |
| ARBRE !!!                                                                                                     |              |              |              |                                                 |   |   |    |
| Espérance de gain : $0 \times 0,31 + 2 \times 0,50 + 4 \times 0,20 = 144/81 = 16/9 = 1,78 \text{ € (double)}$ |              |              |              | Espérance de gain :                             |   |   |    |
| Ecart type : 1,41 € (pas double)                                                                              |              |              |              | Ecart type :                                    |   |   |    |
| Proba de gagner au moins une fois : $P(X>0) = 0,69$                                                           |              |              |              | Proba de gagner au moins une fois : $P(X>0) =$  |   |   |    |

Pour  $n = 1$ , il n'y a rien de nouveau, on s'exerce sur le calcul d'espérance et d'écart type (à la machine).

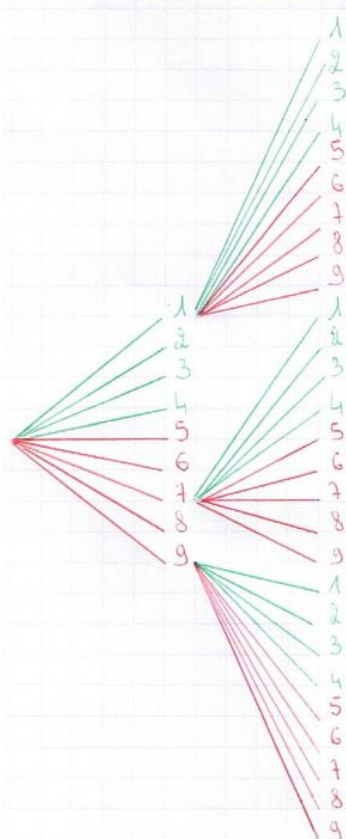
Pour  $n = 2$ , l'utilisation d'un arbre devient intéressant.

Toutefois, nous prenons le temps de décomposer la construction de l'arbre : en effet l'arbre de probabilité avec le principe multiplicatif, n'est pas installé (et pas forcément nécessaire<sup>22</sup>).

Dans l'exemple d'une mise sur « manque : 1,2,3,4 », nous construisons (presque) un premier arbre complet de dénombrement (avec  $9 \times 9$  branches, c'est laborieux!), avant de passer à l'arbre simplifié (avec  $2 \times 2$  branches pondérées par le nombre de cas) : on compte alors le nombre de branches gagnantes ou perdantes et on en déduit les probabilités de la loi des gains.

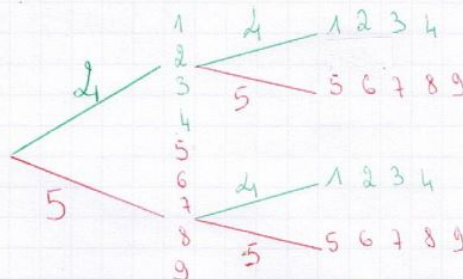
<sup>22</sup> Voir partie A : Arbres probabilistes : outil de résolution ou objet d'enseignement indispensable

Mise sur MANQUE (1; 2; 3; 4) deux fois



ARBRE incomplet !

ARBRE simplifié :



Nombre total de branches =  $81 = 9 \times 9$

Nombre de branches perdantes =  $25 = 5 \times 5$

Nombre de branches gagnantes (2 fois) =  $16 = 4 \times 4$

Nombre de branches gagnantes (1 fois)  
 $= 40 = 4 \times 5 + 5 \times 4 = 2 \times 4 \times 5$

$\Rightarrow$  PROBABILITÉ de perdre sa mise :  
 $= \frac{25}{81} = \frac{5 \times 5}{9 \times 9} = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$   
 $\approx 0,31 = 31\%$

On peut faire remarquer que le principe multiplicatif, facile à justifier pour un arbre de dénombrement, se généralise aux probabilités, et on introduit ainsi les arbres de probabilités (dans le cas d'expériences indépendantes répétées) :

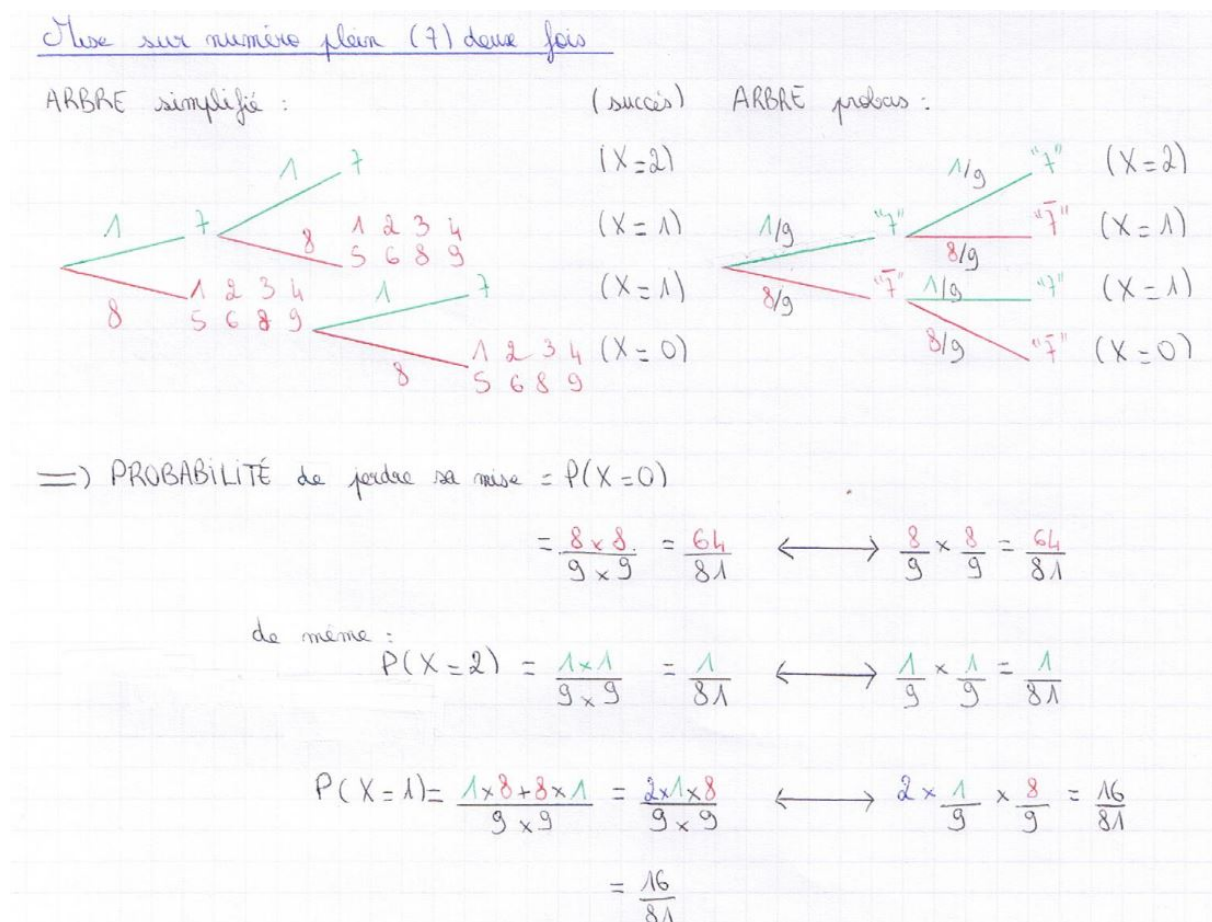
$$P(X = 2 \text{ succès}) = \frac{16}{81} = \frac{4 \times 4}{9 \times 9} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$P(X = 0 \text{ succès}) = \frac{25}{81} = \frac{5 \times 5}{9 \times 9} = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$$

$$P(X = 1 \text{ succès}) = \frac{40}{81} = \frac{2 \times 4 \times 5}{9 \times 9} = 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$$

Cette remarque sera faite à plusieurs reprises.

On recommence avec l'exemple d'une mise sur numéro plein : On s'aperçoit que le même arbre simplifié convient à condition de modifier les coefficients. Les calculs sont analogues.

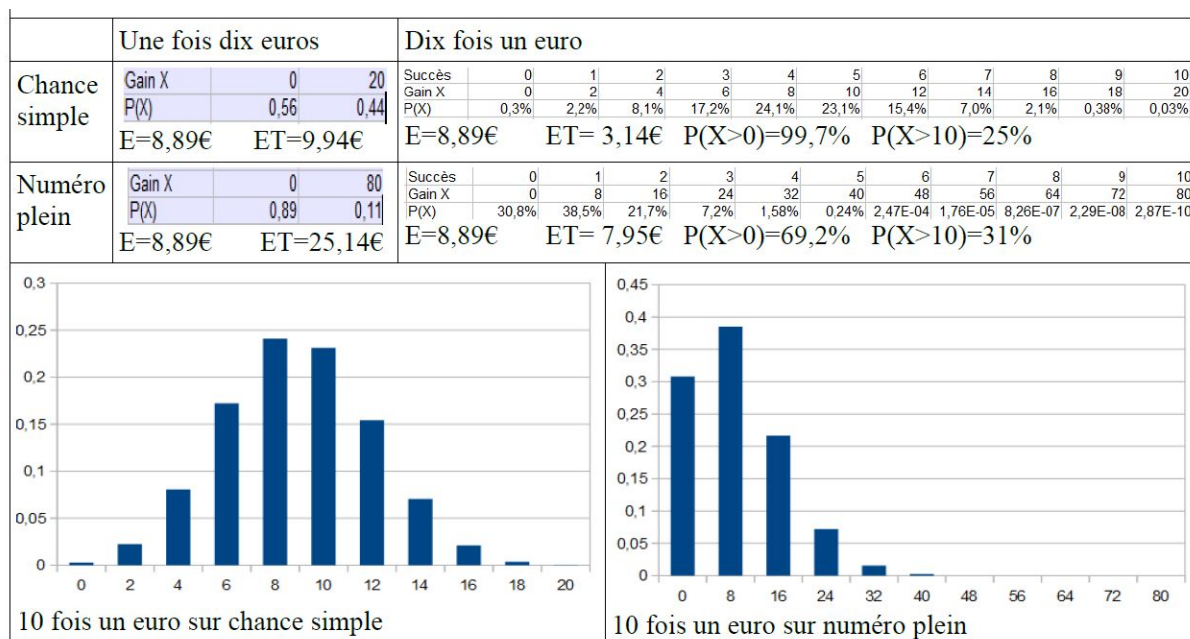


On passe alors au cas  $n = 3$ , pour lequel on redétaille la construction de l'arbre sur le même modèle (arbre non simplifié, arbre simplifié, calcul du nombre total de branches...), puis à la synthèse dans le cours où on généralise ce type d'expérience répétée...

En 1<sup>re</sup> ES-L ou 1<sup>re</sup> S, on insisterait davantage sur les coefficients binomiaux ; ici, on peut se contenter de montrer un triangle de Pascal ainsi que la touche utile sur la calculatrice.

## Partie B.

On peut finalement conclure pour le cas  $n = 10$  grâce à la formule que l'on peut appliquer de différentes façons : ceci sera retravaillé en exercice (machine, tableur, *GeoGebra*...)



On insistera dans les exercices sur la représentation graphique de loi binomiale, en particulier l'aspect « valeurs les plus probables concentrées autour de l'espérance ».

On remarque dans ces deux premières études, que les espérances sont identiques mais pas les écarts types. Un autre indicateur intéressant est la probabilité de gagner au moins une fois :  $P(X > 0) = 1 - P(X = 0)$  ainsi que la probabilité de récupérer au moins sa mise. La connaissance de tous ces paramètres, ne nous permet hélas pas de gagner à tous les coups, mais de décider plus rationnellement de sa manière de jouer.

Les élèves ne sont d'ailleurs pas tous du même avis. En particulier, une moitié de classe ne suivrait pas ma stratégie personnelle, qui vise à jouer longtemps, en misant 10 fois un euro sur chance simple, quitte à gagner très peu...

Il est possible de prolonger ce débat, en classe ou en devoir à la maison, lors de l'étude de certaines martingales<sup>23</sup> (exemple non traité cette année dans cette classe).

<sup>23</sup> Voir Annexe 5, page 57.

## Quatrième temps

### Étude 3 sur la FDJ : *hasard ou pas ?*

On achète 40 tickets à gratter GOAL. On suppose qu'il s'agit bien d'un jeu de hasard.

1. Estimer à l'avance le nombre de tickets gagnants, ainsi que le gain total (et donc le coût de l'opération).
2. Analyser les résultats obtenus.
3. Peut-on mettre en doute à partir de cette expérience les chiffres indiqués par la FDJ au dos des tickets (cf. tableau ci-dessous) ?



| Gain                    | 0€ | 1€      | 2€      | 4€     | 10€    | 100€ | 400€ | 4000€ |
|-------------------------|----|---------|---------|--------|--------|------|------|-------|
| Nombre (sur 3 millions) | ?  | 323 000 | 295 000 | 60 000 | 77 000 | 20   | 5    | 2     |
| Nombre (sur 40 tickets) | 28 | 5       | 5       | 1      | 1      | 0    | 0    | 0     |

Cette dernière étude a été traitée de manière un peu particulière cette année, puisque nous avons regroupé les deux classes de 1<sup>e</sup> STMG sur la dernière heure de cours de l'année, afin de terminer sur une touche un peu ludique. Le cours sur les intervalles de fluctuation a été traité en amont, et ce dernier problème ne devient donc qu'une application amusante. Il est tout à fait possible d'inverser.

La séance a été préparée minutieusement, afin de permettre à chaque élève de gratter un des quarante tickets (réellement achetés par l'équipe pédagogique), et de se livrer à quelques pronostics pendant la séance (nombre de tickets gagnants et gain total).

Voici les pronostics des élèves :

Certains ont tenté de calculer la probabilité d'obtenir un ticket gagnant puis l'espérance de la loi binomiale suivie par le nombre total de tickets gagnants.

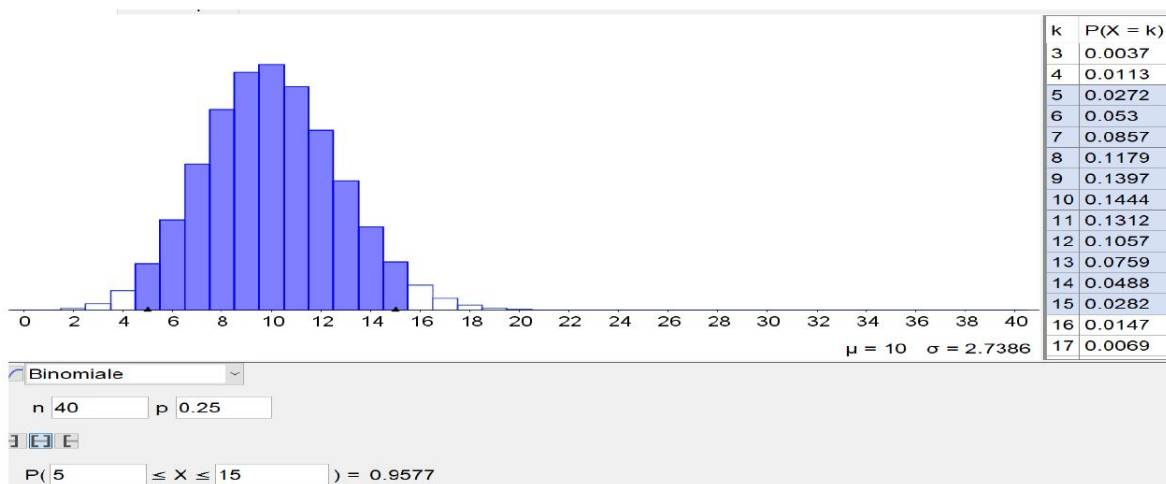
D'autres ont répondu complètement à l'instinct. (C'était la veille des vacances !)

| Nom     | nb de tickets gagnants | Gain total |  |         |     |      |
|---------|------------------------|------------|--|---------|-----|------|
| élève1  | 10                     | 26         |  | élève21 | 5   | 10   |
| élève2  | 10                     | 16         |  | élève22 | 3   | 120  |
| élève3  | 5                      | 8          |  | élève23 | 4   | 40   |
| élève4  | 13                     | 20         |  | élève24 | 4   | 10   |
| élève5  | 10                     | 22         |  | élève25 | 5   | 12   |
| élève6  | 10                     | 22         |  | élève26 | 12  | 29   |
| élève7  | 9                      | 10         |  | élève27 | 7   | 9    |
| élève8  | 10                     | 15         |  | élève28 | 8   | 10   |
| élève9  | 5                      | 40         |  | élève29 | 12  | 20   |
| élève10 | 10                     | 20         |  | élève30 | 8   | 10   |
| élève11 | 11                     | 21         |  | élève31 | 8   | 10   |
| élève12 | 12                     | 20         |  | élève32 | 7   | 25   |
| élève13 | 10                     | 20         |  | élève33 | 10  | 30   |
| élève14 | 10                     | 21         |  | élève34 | 10  | 13   |
| élève15 | 10                     | 21         |  | élève35 | 5   | 40   |
| élève16 | 10                     | 40         |  | élève36 | 6   | 26   |
| élève17 | 10                     | 24         |  | élève37 | 5   | 10   |
| élève18 | 5                      | 7          |  | élève38 | 5   | 12   |
| élève19 | 3                      | 26         |  | élève39 | 7   | 20   |
| élève20 | 6                      | 10         |  | élève40 | 8   | 22   |
|         |                        |            |  | moyenne | 8,0 | 22,2 |

## Partie B.

À partir de la répartition des gains donnés sur le ticket et rappelée dans l'énoncé, l'étude théorique donnerait raison à l'élève 1.

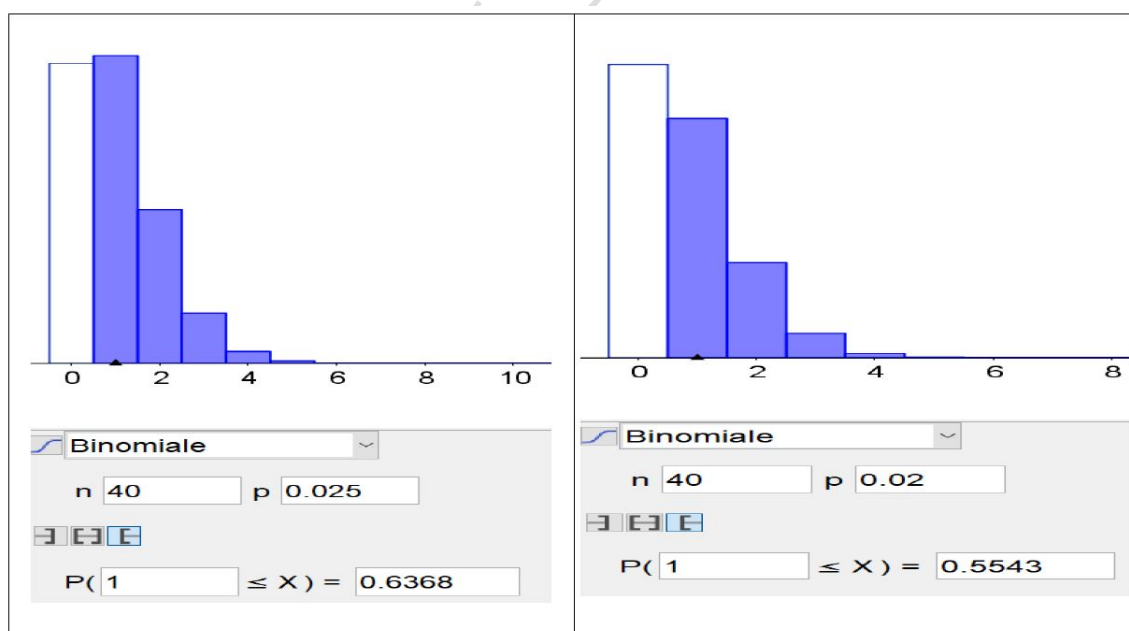
Comme environ 25% des tickets sont gagnants, on modélise le nombre de tickets gagnants sur les 40 grattés par une variable aléatoire qui suit la loi binomiale  $B(40;0,25)$ .



On en déduit que le nombre de tickets gagnant sera le plus probablement 10, (14% de chance), ce qui correspond à l'espérance de la loi binomiale ( $40 \times 0,25 = 10$ ).

Il y a 95% de chance que le nombre de tickets gagnant soit compris entre 5 et 15.

Le gain maximum sera probablement 10€ (en effet, avec une probabilité de 2,6% de gagner 10€ avec un ticket, sur 40 tickets, on peut en effet espérer un ticket ou plus et on a environ 64% de chance pour cela, contre 55% pour un gain de 4€).



De même, pour le gain total, on peut prévoir  $26€ = 10€ + 4€ + 4 \times 2€ + 4 \times 1€$ .

Après une séance de grattage très vivante, nous faisons les comptes( automatiquement à l'aide d'un fichier tableur fort pratique ) :

0 0 0 2 10 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 1 2 0 0 0 0 0 0 2 0 0 1 0 0 2 0 0 4 1 0 0 1 0 1 0

Soit un total de 12 tickets gagnants et un gain total de :  
 $29\text{€} = 10\text{€} + 4\text{€} + 5 \times 2\text{€} + 5 \times 1\text{€}$

Le pronostic des élèves et le pronostic théorique étaient donc un petit peu pessimistes.

A-t-on été particulièrement chanceux ce jour là ?

Les chiffres annoncés par la FDJ (répartition des lots) peuvent-ils être remis en cause ?

Clairement, non, puisque l'intervalle de fluctuation à 95%, prévoyait entre 5 et 15 tickets gagnants sur les 40.

En tout cas, hasard ou pas, notre théorie des probabilités nous a bien permis de prévoir ce qui allait se passer globalement... à savoir que l'on serait perdants (onze euros en tout).

## 4. Déroulement d'un parcours réalisé en classe

**Durée du parcours :** une douzaine d'heures (en STMG)

Des durées indicatives sont proposées entre parenthèses pour les différents moments du parcours.

**Introduction :** questionnaire et discussion sur le hasard (1h)

Peut-on choisir au hasard ? Peut-on prévoir le résultat global d'une expérience aléatoire répétée ?

**Étude 1 :** *Astro vs Fétiche*

**Cours partie 1 :** loi de probabilité et espérance d'une variable aléatoire (3h)

**Exercices :** (1h)

**Étude 2 :** *le jeu de la boule*, loi binomiale

**Cours partie 2 :** loi binomiale (3h)

**Exercices :** (1h)

**Étude 3 :** *Hasard ou pas ?*, intervalle de fluctuation et tests

**Cours partie 3 :** fluctuation (2h)

**Évaluations :** devoir maison, tests, devoir en classe (2h)

## 5. Annexes de la partie B.

### Annexe 1 : tableau des gains de *l'Astro* et du *fetiche*

<https://www.fdj.fr/jeux/illiko-jeux-de-grattage/astro>

*Astro*

| Règles du Jeu                                                                                                                                                                                                                         |  | Tableau des gains |  | Visuels |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------|--|---------|--|
| ▼ Pour 4 500 000 unités de jeu                                                                                                                                                                                                        |  |                   |  |         |  |
| Nombre de lots                                                                                                                                                                                                                        |  | Gain en euros     |  |         |  |
| 4                                                                                                                                                                                                                                     |  | 20 000 euros      |  |         |  |
| 9                                                                                                                                                                                                                                     |  | 1 000 euros       |  |         |  |
| 415                                                                                                                                                                                                                                   |  | 200 euros         |  |         |  |
| 2 112                                                                                                                                                                                                                                 |  | 30 euros          |  |         |  |
| 44 992                                                                                                                                                                                                                                |  | 18 euros          |  |         |  |
| 225 008                                                                                                                                                                                                                               |  | 8 euros           |  |         |  |
| 450 008                                                                                                                                                                                                                               |  | 4 euros           |  |         |  |
| 647 544                                                                                                                                                                                                                               |  | 2 euros           |  |         |  |
| <b>1 370 092</b>                                                                                                                                                                                                                      |  |                   |  |         |  |
| Vous avez 1 chance sur 3.28 de remporter un gain et 66% des mises sont redistribuées aux joueurs.                                                                                                                                     |  |                   |  |         |  |
| ► Résultats et paiements                                                                                                                                                                                                              |  |                   |  |         |  |
| Les jeux de FDJ® sont réservés aux joueurs ayant 18 ans et plus.                                                                                                                                                                      |  |                   |  |         |  |
| Règlements à télécharger Astro :  sur internet  en point de vente |  |                   |  |         |  |

*Fétiche*

| Règles du Jeu                                                                                                                                                                                                                                       |                | Tableau des gains |  | Visuels |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------|--|---------|--|
| ▼ Pour 1 500 000 unités de jeu                                                                                                                                                                                                                      |                |                   |  |         |  |
| Nombre de lots                                                                                                                                                                                                                                      | Gains en euros | 1 chance sur __   |  |         |  |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                   | 1 000 euros    | 500 000           |  |         |  |
| 50                                                                                                                                                                                                                                                  | 100 euros      | 30 000            |  |         |  |
| 150                                                                                                                                                                                                                                                 | 25 euros       | 10 000            |  |         |  |
| 800                                                                                                                                                                                                                                                 | 15 euros       | 1 875             |  |         |  |
| 22 000                                                                                                                                                                                                                                              | 10 euros       | 68                |  |         |  |
| 54 680                                                                                                                                                                                                                                              | 4 euros        | 27,4              |  |         |  |
| 157 500                                                                                                                                                                                                                                             | 2 euros        | 9,5               |  |         |  |
| 190 050                                                                                                                                                                                                                                             | 1 euro         | 7,9               |  |         |  |
| <b>425 233</b>                                                                                                                                                                                                                                      |                | <b>3,53</b>       |  |         |  |
| Vous avez 1 chance sur 3.53 de remporter un gain et 64,5% des mises sont redistribuées aux joueurs.                                                                                                                                                 |                |                   |  |         |  |
| ► Résultats et paiements                                                                                                                                                                                                                            |                |                   |  |         |  |
| Règlements à télécharger Numéro Fétiche 13 :  sur internet  en point de vente |                |                   |  |         |  |

Annexe 2 : le paradoxe de St-Petersbourg<sup>24</sup>

## Le paradoxe de St-Petersbourg..)

Le jeu peut être celui de Pile ou Face, mais la martingale de Saint-Petersbourg fut étudiée par Nicolas Bernoulli, sur le jeu des couleurs à la roulette. Les numéros de 1 à 36 sont alternativement rouge et noir. On peut parier sur l'une de ces deux couleurs. Le gain est alors le double de la mise.

La martingale de Saint-Petersbourg propose la stratégie suivante : on joue une somme  $x$  sur le rouge, et, tant qu'on n'a pas gagné, on double

la mise avant chaque nouveau lancer, toujours sur la même couleur.

Cette stratégie paraît bonne. Si la roulette n'est pas truquée, on finira bien par gagner !

**1** Quelle somme finira-t-on par gagner ?

**2** Examiner la situation lorsque le parieur dispose d'une somme égale à  $3x$ . Le jeu entre le parieur et la banque est-il équitable ?

## Annexe 3 : le cours

## RAPPEL : MODÈLE DE L'URNE

**Définition 1 :** Convenons qu'une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle est reproductible un grand nombre de fois dans les mêmes conditions alors que les différentes issues sont imprévisibles.

L'ensemble des issues possibles s'appelle **l'univers** (noté souvent  $\Omega$ ).

**Définition 2 :** Une **urne de Bernoulli** est une urne "parfaite" dans laquelle lors d'un tirage, chaque boule a autant de chances que les autres d'être choisie : on dit que les issues sont **équiprobables**.

**Définition 3 :** Si  $p$  désigne la **proportion** de boules d'une certaine catégorie dans cette urne, on dit que  $p$  est la **probabilité** de tirer une boule de cette catégorie.

**Conséquence :** Une probabilité est donc **un nombre compris entre 0 et 1**, qu'on peut écrire sous forme fractionnaire, décimale, ou d'un pourcentage.

**Définition 4 :** On dit qu'on **modélise** une expérience aléatoire lorsque l'on choisit clairement la composition d'une urne de Bernoulli.

On peut alors calculer toutes les probabilités que l'on veut.

<sup>24</sup> Extrait de *Faites vos jeux*[7] page 21.

## Chapitre 6 : Probabilités et jeux de hasard

*Jouer avec le hasard est un passe temps qui peut passionner mais qui comporte des risques...*

### 1. Rappels

#### 1. Vocabulaire et notations (Page 212)

Expérience aléatoire, loi de probabilité (tableau), équiprobabilité :  $P(A) = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}}$

Événements  $A$ ,  $P(A)$ , contraire.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

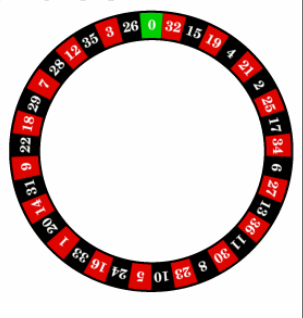
Intersection, réunion,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

#### 2. Loi des grands nombres

«Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, alors la fréquence d'un événement a tendance à se stabiliser autour de sa probabilité»

#### 3. Exemple: Statistiques de mille parties à la roulette (jeu simple)

| Total obtenu                                                       | 0                           | Rouge                         | Noir                          |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Fréquences observées                                               | $\frac{35}{1000}$ Soit 3,5% | $\frac{476}{1000}$ Soit 47,6% | $\frac{489}{1000}$ Soit 48,9% |
| Probabilité théorique                                              | $\frac{1}{37}$ Soit 2,7%    | $\frac{18}{37}$ Soit 48,65%   | $\frac{18}{37}$ Soit 48,65%   |
| Ici les issues de l'expérience aléatoire sont {zéro, rouge, noir}. |                             |                               |                               |



### 2. Espérance

#### 1. A quel jeu jouer ? Voici les lois de probabilité des gains de trois jeux à gratter.

| Tonnerre |         |        |         |
|----------|---------|--------|---------|
| X        | -5,00 € | 0,00 € | 10,00 € |
| P(X)     | 0,4     | 0,5    | 0,1     |

Espérance  $E(X) = -2€ + 1€ = -1€$

Variance  $V(X) = 0,4(-5+1)^2 + 0,5(0+1)^2 + 0,1(10+1)^2 = 19$

Ecart-type :  $\sigma = \sqrt{19} = 4,4€$  environ

| Téméraire |          |        |            |
|-----------|----------|--------|------------|
| Y         | -50,00 € | 0,00 € | 1 000,00 € |
| P(Y)      | 0,04     | 0,959  | 0,001      |

$E(Y) = -1€$

$V(Y) = 97,999$

Ecart-type = 9,9€ environ

| Pépère |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| Z      | -2,00 € | 0,00 € | 1,00 € |
| P(Z)   | 0,625   | 0,125  | 0,25   |

$E(Z) = -1€$

$V(Z) = 1,75$

Ecart type = 1,3€ environ

#### 2. Espérance, variance et écart type

Comme en statistiques, la moyenne (ici appelée espérance) et l'écart type permettent de résumer une série de valeurs. (ici les issues  $x_i$  affectées des probabilités  $p_i$ )

|      |       |       |     |       |
|------|-------|-------|-----|-------|
| X    | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| P(X) | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Espérance :  $E = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

c'est la moyenne théorique

Variance :  $V = V(X) = (x_1 - E)^2 \times p_1 + (x_2 - E)^2 \times p_2 + \dots + (x_n - E)^2 \times p_n$  mesure la dispersion autour de E

Ecart type :  $\sigma = \sqrt{V}$

mesure la dispersion exprimée dans la même unité que X

Rappel : le menu « stats » de la calculatrice permet d'obtenir sans mal ces paramètres !

### 3. Exemple : comparaison des trois jeux vus plus haut.

Les trois jeux ont la même espérance : -1€. C'est à dire que si on jouait un grand nombre de parties, le gain moyen serait proche de -1€, quelque soit le jeu choisi.

Par contre les écarts type montrent des différences : Plus l'écart type est grand, plus il y a d'adrénaline : le risque de perdre beaucoup ou la chance de gagner beaucoup sont plus marqués...

A la FDJ aussi (voir Pb1), les espérances de gains par euro joué sont quasiment identiques. Les écarts type sont différents. Mais c'est surtout l'effet psychologique qui prime...



### 3. Schéma de Bernoulli

Tout comme les bonnes pâtes, Jacques Bernoulli (1654-1705) devait aimer les expériences simples.

Deux issues possibles: succès ou échec ( $S$  ou  $\bar{S}$ ). Pas plus.

Il aimait aussi les jeux de hasard comme le jeu de la boule. (voir Pb2 : chance simple).

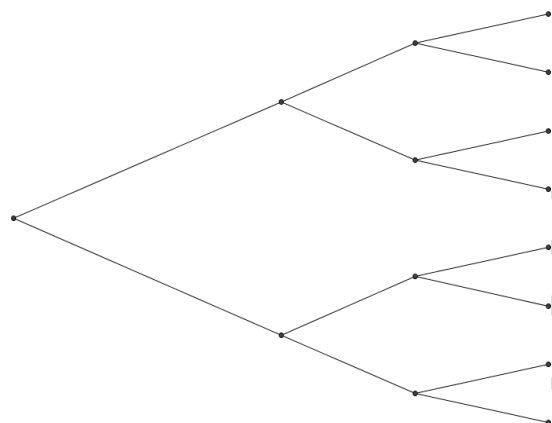
La probabilité de gagner (succès  $S$ ) est  $p = P(S) = \frac{4}{9}$  et celle de perdre (échec  $\bar{S}$ ) est  $q = P(\bar{S}) = \frac{5}{9}$

Il devait également aimer répéter les expériences simples:

Combien de succès peut on alors obtenir et avec quelle probabilité? Ça se complique un peu.

Exemple on joue trois fois de suite à la boule, chance simple.

On dessine un arbre pondéré, facile à compléter: les calculs se ressemblent.



On peut résumer la situation en notant  $X$  le nombre total de succès (variant de manière aléatoire entre 0 et 3) puis en donnant la loi (tableau) de cette « variable aléatoire »  $X$ :

| $X$      | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ |   |   |   |   |

**Théorème 1** (Cas général avec  $n \geq 1$  expériences répétées à l'identique)

Le nombre de succès  $k$  varie aléatoirement entre 0 et  $n$ . C'est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi, dite **binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** , et notée  **$B(n;p)$**  dont voici le tableau

| $X$      | 0         | 1 | ... | $k$                                          | ... | $n-1$ | $n$   |
|----------|-----------|---|-----|----------------------------------------------|-----|-------|-------|
| $P(X=k)$ | $(1-p)^n$ |   |     | $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ |     |       | $p^n$ |

**Définition** Le nombre de chemin menant à  $k$  succès est noté  $\binom{n}{k}$  (lire «  $k$  parmi  $n$  »).

Ce **coefficient**, dit **binomial**, peut se calculer à la main (triangle de Pascal) ou à la calculatrice.

Mais en pratique, un tableur ou un algorithme nous donne le tableau complet. (voir page 214)

## 4. Espérance de la loi Binomiale

**1.** Exemple 1: Je décide de jouer 4 fois de suite 1€ à la boule (chance simple  $p = \frac{4}{9}$ ).

Avec un arbre à 16 branches, on peut alors calculer les probabilités pour chaque gain possible :  
 0€, 2€, 4€, 6€, 8€ (le nombre de chemins y menant est un coefficient binomial)

Exemples :  $P(\text{gain}=2\text{€}) = 4 \times p \times (1-p)^3 \approx 30,5\%$  il y a  $\binom{4}{1}$  quatre chemins qui mènent à ce gain

$P(\text{gain}=4\text{€}) = 6 \times p^2 \times (1-p)^2 \approx 36,6\%$  il y a  $\binom{4}{2}$  six chemins qui mènent à ce gain

On peut ainsi donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « gain » (tenant compte de la mise)

On peut gagner au moins une fois dans plus de 90% des cas.

L'espérance est 3,56€ et la variance 3,95 ( c'est 4 fois plus que lorsque on joue une seule fois...)

| succès  | 0    | 1     | 2     | 3     | 4    |
|---------|------|-------|-------|-------|------|
| gain    | 0 €  | 2 €   | 4 €   | 6 €   | 8 €  |
| P(gain) | 9,5% | 30,5% | 36,6% | 19,5% | 3,9% |
| Chemins | 1    | 4     | 6     | 4     | 1    |

Si on s'intéresse juste au nombre de succès  $X$ , on reconnaît une loi binomiale  $B(4; \frac{4}{9})$ .

L'espérance de  $X$  serait  $E(X) = 0 \times 0,095 + 1 \times 0,305 + 2 \times 0,366 + 3 \times 0,195 + 4 \times 0,039 \approx 1,77$ .

**2.** Exemple 2: On joue 5 fois de suite à la boule, et on compte le nombre de fois où on gagne. (chance simple). On obtient une variable aléatoire  $X$  valant 0 1 2 3 4 ou 5, mais on n'a pas envie de construire un arbre à 32 branches. On applique directement la formule de Bernoulli pour une loi binomiale de paramètres  $n=5$  et  $p = \frac{4}{9}$ . (notée  $B(5; \frac{4}{9})$ )

| $X=k$        | 0                                                            | 1                                                            | 2                                                            | 3                                                            | 4                                                        | 5                                   |
|--------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $P(X=k)$     | $\binom{5}{0} \times (\frac{4}{9})^0 \times (\frac{5}{9})^5$ | $\binom{5}{1} \times (\frac{4}{9})^1 \times (\frac{5}{9})^4$ | $\binom{5}{2} \times (\frac{4}{9})^2 \times (\frac{5}{9})^3$ | $\binom{5}{3} \times (\frac{4}{9})^3 \times (\frac{5}{9})^2$ | $\binom{5}{4} \times (\frac{4}{9})^4 \times \frac{5}{9}$ | $1 \times (\frac{4}{9})^5 \times 1$ |
| soit environ | $1 \times 1 \times 0,0529 \dots$<br>5,3%                     | $5 \times 0,444 \times 0,095$<br>21,2%                       | $10 \times 0,1975 \times 0,171$<br>33,9%                     | $10 \times 0,088 \times 0,309$<br>27,1%                      | $5 \times 0,039 \times 0,555$<br>10,8%                   | $1 \times 0,017 \times 1$<br>1,7%   |

La machine peut le faire directement, puis donner l'espérance (environ 2,22). Mais il y a plus simple !

**3.** Espérance de la loi binomiale  $B(n; p)$

**Théorème 2 :** L'espérance de la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  est tout simplement :  $E(X) = n \times p$

Remarque :  $V(X) = n \times p \times (1-p)$  (hors programme)

→ On retrouve bien les espérances des exemples 1 et 2 en calculant  $4 \times \frac{4}{9} \approx 1,77$  et  $5 \times \frac{4}{9} \approx 2,22$ .

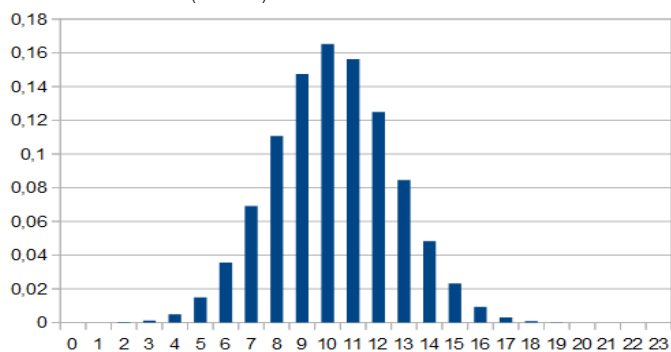
## 5. Représentations graphiques

On a représenté plus haut la loi  $B\left(5; \frac{4}{9}\right)$  dans un tableau. On peut aussi utiliser un graphique.

(surtout lorsque n est grand).

Par exemple je joue 23 fois (chance simple)  $p = \frac{4}{9} \approx 44\%$

on obtient la  $B\left(23; \frac{4}{9}\right)$



environ 70% dans l'intervalle [8;12] et 97% dans [5;15]

Je peux gagner entre 0 et 23 fois.

On lit  $P(X=8) = 11\%$  environ

$P(X>18) = 0\%$  environ

$P(12 \leq X \leq 14) = 12\% + 8\% + 5\% = 25\%$  environ  
(on peut le vérifier par le calcul)

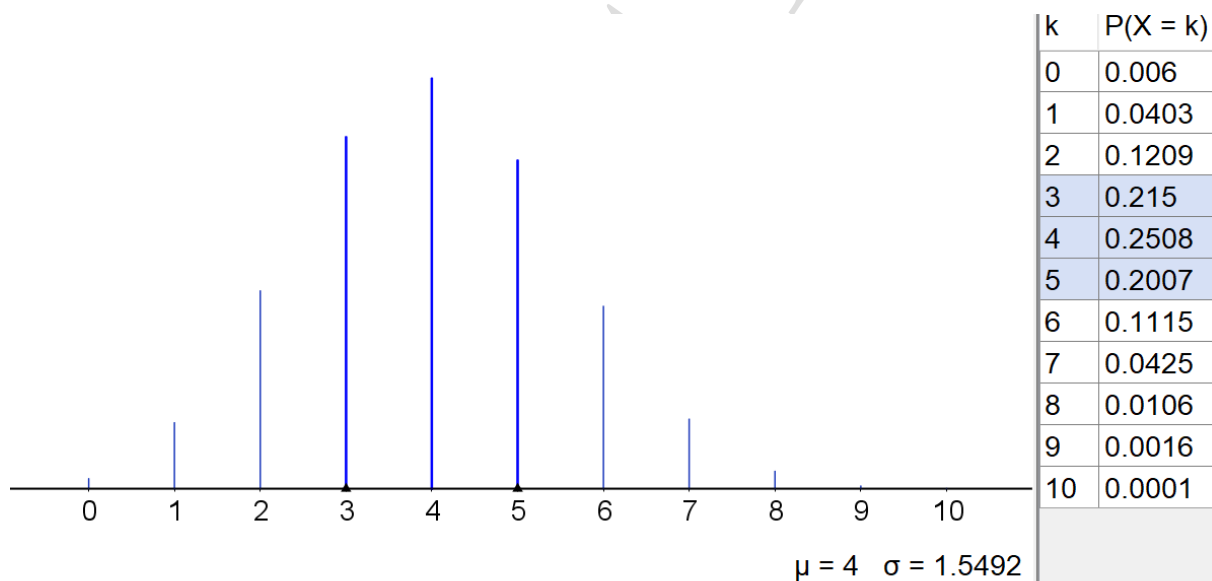
Le nombre de succès moyen est

$$E(X) = 23 \times \frac{4}{9} \approx 10,2$$

$$V(X) = 23 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \approx 5,7$$

On constate que les valeurs de la variable aléatoire restent en majorité proche de la moyenne : (écart type faible 2,4)

**Application :** Représenter la loi binomiale  $B(10;0,4)$  puis calculer son espérance.



Binomiale

n 10 p 0.4

$P(3 \leq X \leq 5) = 0.6665$

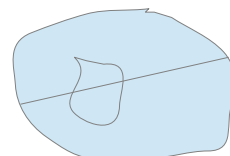
## 6. Fluctuation et tests de décision

### 1. Rappel du problème:

On s'intéresse à la proportion d'individus possédant un caractère donné. On note cette proportion :

**p** dans la population entière (taille N très grand)  
et **f** dans un échantillon de taille **n** (plus petit)

Il s'agit de savoir si la proportion **f** est « conforme » à la proportion **p**.



#### Exemple 1:

On sait que 22,5% des tickets à gratter «FETICHE» sont gagnants. Lundi, j'ai acheté 25 tickets. J'ai gratté et j'ai gagné 11 fois. Est normal ?

### 2. Fourchette de seconde

Lorsque **p** est connue, et que l'échantillon est choisi au hasard, on constate que la fréquence **f** peut changer d'un échantillon à l'autre.

(ce phénomène est appelé fluctuation d'échantillonnage)

Cependant, **f** et **p** restent relativement proches, dans la plupart des cas. (loi des grands nombres) :

Lorsque  $0,2 \leq p \leq 0,8$  et  $n \geq 25$ , on a

$f \in \left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  dans 95% des cas.

C'est à dire qu'on peut prévoir un intervalle de valeurs contenant **f**, avec une incertitude de 5%.

C'est l'**intervalle de fluctuation** au niveau 95%. (version 2nde)

On pourra ainsi décider si les écarts observés entre **f** et **p** sont dus au hasard ou non

(avec toutefois un petit risque de se tromper: 5%)

Exemple 1:(solution)  $p=0,225$   $n=25$   $f=\frac{11}{25}=0,44$   $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{5}=0,2$  :la fourchette est donc  $[0,025;0,425]$

On peut donc en conclure que 0,44 est anormalement élevée :

On peut penser qu'une autre raison que le hasard en est la cause. (avec un risque de se tromper:5%)

Une chance excessive, une triche du buraliste complice....

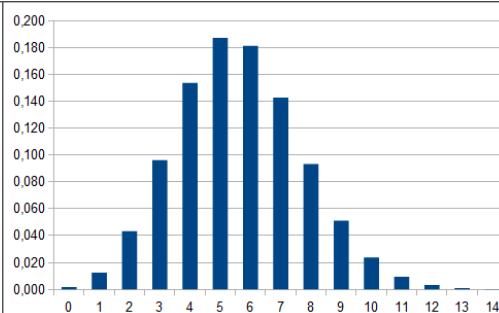
### 3. Nouvelle fourchette en 1ère

On peut considérer que la variable aléatoire **X** comptant le nombre d'individus présentant le caractère étudié, suit la loi binomiale  $B(n,p)$ .

On peut alors définir l'**intervalle de fluctuation à 95%**, d'une fréquence **f** sur un échantillon de taille **n** comme

l'intervalle  $\left[ \frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$  où les nombres **a** et **b** sont choisis de la façon suivante :

- **a** est le plus petit entier tel que  $P(X \leq a) > 2,5 \%$
- **b** est le plus petit entier tel que  $P(X \leq b) \geq 97,5 \%$



De sorte que  $P(a \leq X \leq b) > 95 \%$

Exemple 2: Mardi, je rachète 16 tickets : Seulement 1 ticket est gagnant. Est ce normal ?

Ici  $p=0,225$   $n=16$  et  $f=\frac{1}{16}=0,0625$   $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4}=0,25$

La fourchette de seconde donnerait  $[-0,25;0,475]$  donc on pourrait conclure que c'est normal, mais  $n < 25$ , on ne peut donc pas utiliser cette fourchette! (d'ailleurs on a une borne négative, ce qui semble louche)

La fourchette de 1ère donne  $\left[ \frac{2}{16}; \frac{10}{16} \right]$  On peut donc dire que la fluctuation observée n'est pas

simplement due au hasard (de peu). On pourrait mettre en doute l'honnêteté du buraliste

(Avec bien sur, un risque de se tromper dans 5% des cas, sans compter l'effet contraire de la veille)

## Annexe 4 : évaluations

## Exemple de devoir maison donné après l'étude 1

Première STMG

2017 - 2018

## Devoir à la maison n°13

probabilités, exercices 10,11,12 page 220

**10. + Jeu de cartes**

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes ; toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. On considère les deux événements suivants :

$A$  : « la carte tirée est un valet ».

$B$  : « la carte tirée est un cœur ».

1. a) Définir par une phrase en français les événements,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ .

b) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils incompatibles ?

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

2. a) Calculer les probabilités  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(\bar{A})$ ,  $P(\bar{B})$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cup B)$ .

b) Trouver un événement  $C$  tel que  $B$  et  $C$  soient incompatibles.

1.a)  $\bar{A}$  : "La carte tirée n'est pas un valet"

$\bar{B}$  : "La carte tirée n'est pas un cœur"

$A \cap B$  : "La carte tirée est un cœur et un valet"

$A \cup B$  : "La carte tirée est un cœur ou un valet"

1b)  $A$  et  $B$  ne sont pas incompatibles car une carte peut être un valet de cœur.

$$2a) P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{7}{8}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32} \text{ et enfin } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4+8-1}{32} = \frac{11}{32}$$

2b) On peut choisir  $C$  : " la carte tirée est un pique" , ou bien "la carte tirée est noire"...

**11. ++ Lecture et exploitation d'un tableau**

statistique, calcul de probabilités, calcul de moyenne

Dans une compagnie d'assurances, à partir des fiches de 1 000 assurés, on a dressé le tableau des effectifs suivants :

| Âge \ Sexe | Hommes | Femmes |
|------------|--------|--------|
| [18, 25[   | 121    | 79     |
| [25, 35[   | 83     | 88     |
| [35, 45[   | 82     | 84     |
| [45, 55[   | 80     | 83     |
| [55, 65[   | 81     | 85     |
| 65 et plus | 70     | 64     |

1. On prélève au hasard une des 1 000 fiches. Chaque fiche a la même probabilité d'être prélevée. On désigne par,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  les événements suivants :

$A$  : « La fiche choisie est celle d'un homme » ;

$B$  : « La fiche choisie est celle d'une femme » ;

$C$  : « La fiche choisie est celle d'une femme de moins de 35 ans » ;

$D$  : « La fiche choisie est celle d'une personne d'au moins 55 ans ».

Calculer les probabilités  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ ,  $P(D)$ .

2. À l'aide des données du tableau, l'assureur veut fixer le montant des cotisations « pour un certain type d'automobiles ». Il envisage que les montants des cotisations soient :

- de 1 000 (euros) pour les assurés de moins de 25 ans ;
- de 500 (euros) pour les assurés âgés de 55 ans ou plus ;
- de  $x$  (euros) pour tous les autres assurés.

a) Écrire à l'aide de  $x$  la moyenne  $m$  (en euros) des montants des cotisations.

► Conseil : on peut se reporter au chapitre 5.

b) Déterminer  $x$  pour que  $m = 750$  euros.

$$1) P(A) = \frac{121 + 83 + 82 + 80 + 81 + 70}{1000} = 0,517, \quad P(B) = \frac{79 + 88 + 84 + 83 + 85 + 64}{1000} = 0,483$$

(on retrouve bien  $P(A) + P(B) = 1$ )

$$P(C) = \frac{79 + 88}{1000} = 0,167, \quad P(D) = \frac{81 + 70 + 85 + 64}{1000} = 0,300$$

$$2a) m = \frac{1000 \times (121 + 79) + 500 \times (81 + 85 + 70 + 64) + x \times (83 + 88 + 82 + 84 + 80 + 83)}{1000}$$

$$\text{soit } m = \frac{1000 \times 200 + 500 \times 300 + x \times 500}{1000} = 350 + 0,5x$$

2b) on résout l'équation  $750 = 350 + 0,5x : 400 = 0,5x$  et donc  $x = 800$ .

Il faut donc choisir une cotisation de 800 euros pour la dernière tranche des assurés, si l'on souhaite une cotisation moyenne de 750 euros sur l'ensemble des assurés.

## 12. ++ Des boules dans une urne

Une urne opaque contient 25 boules de deux couleurs, indiscernables au toucher : 6 rouges et 19 jaunes.

Parmi les rouges, trois portent le nombre 0, deux le nombre 5 et une le nombre 10 ; parmi les jaunes, dix portent le nombre 0, cinq le nombre 1, deux le nombre 5 et deux le nombre 10.

On tire une boule de l'urne, au hasard ; tous les tirages sont équiprobables. Déterminer les probabilités des événements suivants. :

- a) A : "la boule tirée ne porte pas le nombre 0" ;
- b) B : "la boule tirée est rouge et porte un nombre pair" ;
- c) C : "la boule tirée est jaune ou porte un nombre impair".

(Les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.)

### REMARQUES GÉNÉRALES :

Il faut expliquer les calculs( détails), répondre aux questions posées ( format décimal, arrondis, confusion entre et/ou, entre au plus/au moins...) et interpréter les réponses dans le cadre de l'exercice.( petite phrase). Faire un dessin peut-être utile.

Solution :

$$a) P(A) = \frac{25 - 3 - 10}{25} = \frac{12}{25} = 0,48$$

$$b) P(B) = \frac{3 + 1}{25} = \frac{4}{25} = 0,16$$

$$c) P(C) = \frac{19 + 2}{25} = \frac{21}{25} = 0,84$$

## Exemple de devoir surveillé donné à la fin du parcours

Nom

DS8 Maths

29 Mai 2018

**Exercice 1 : Le CASH**

Tableau de lots : sur 15 000 000 tickets : 1 560 000 lots de 5€, 1 760 000 lots de 10€, 375 000 lots de 20€, 112 500 lots de 50€, 112 500 lots de 100€, 3 750 lots de 500€, 1 800 lots de 1 000€, 40 lots de 5 000€, 5 lots de 10 000€, 3 lots de 100 000€ et 3 lots de 500 000€. Au moment de votre achat, certains lots ou certaines catégories de lots ont peut-être déjà été remportés.

- 1) Compléter le tableau des gains ( on ne tient pas compte du prix du ticket: 5€) et des probabilités.  
( répondre en pourcentage arrondi à 0,01% près)

| Gain  | 0 € | 5 €    | 10 € |   |   |   |   |   |                      | 10 000 €             | 100 000 €          | 500 000 €          |
|-------|-----|--------|------|---|---|---|---|---|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|
| Proba | %   | 10,40% | %    | % | % | % | % | % | $2,7 \times 10^{-6}$ | $3,3 \times 10^{-7}$ | $2 \times 10^{-7}$ | $2 \times 10^{-7}$ |

- 2) Calculer le gain moyen théorique ( espérance ) et l'écart type : ( arrondir au centime)

E=.....

 $\sigma$  =.....

- 3) Est-il vrai ?

a) Qu'on a plus d'une chance sur quatre de gagner à ce jeu?

b) Qu'on a moins d'une chance sur quatre millions de gagner le gros lot?

c) Qu'il vaut mieux jouer aux jeux de la FDJ qu'au Casino?

**Exercice 2: Le Fétiche**

Au Fétiche, on a vu qu'il n'y a que 23% de tickets gagnants. J'achète 8 tickets et j'appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de tickets gagnants parmi ces 8 tickets.

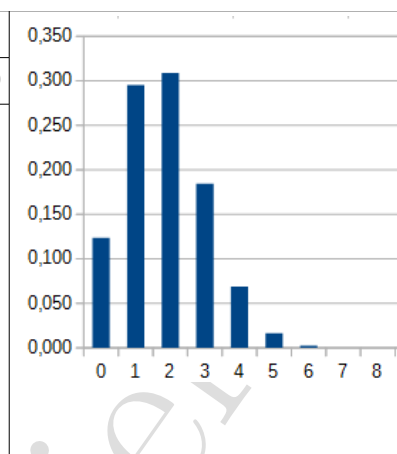
1) Quel nom donne t-on à la loi suivie par X, et notée B(8; 0,23)? .....

2) Rappeler la formule donnant la probabilité

d'avoir exactement k tickets gagnants:  $P(X=k) = \dots\dots\dots$

3) Justifier que  $P(X=3) \approx 18\%$  ( détailler le calcul )

|        |  |  |  |       |  |       |       |       |       |
|--------|--|--|--|-------|--|-------|-------|-------|-------|
| X=k    |  |  |  | 3     |  | 5     | 6     | 7     | 8     |
| P(X=k) |  |  |  | 0,184 |  | 0,016 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |



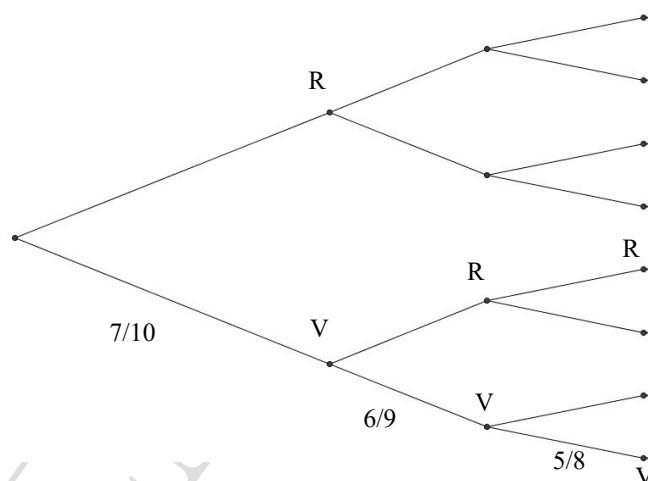
- 4) On a représenté la loi de X dans le graphique ci contre.  
A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau correspondant ci-dessus (arrondir à 0,001 près).
- 5) Calculer l'espérance de X :  $E(X) = \dots\dots\dots$   
Interpréter cette valeur.
- 6) Donner  $P(X \leq 3) = \dots\dots\dots$  (arrondir à 0,01 près)  
Interpréter le résultat.

### Exercice 3: Arbre et boules

Une urne contient dix boules dont trois rouges et sept vertes.

On prélève successivement (sans remise) trois boules dans l'urne.

- 1) Compléter l'arbre correspondant à cette situation (avec les probabilités sous forme de fractions sur les branches)



- 2) Calculer la probabilité de prélever 3 boules vertes. (arrondir à 0,1 % près)
- 3) Calculer la probabilité de prélever au moins une boule rouge. (arrondir à 0,1 % près)
- 4) Calculer la probabilité prélever exactement une boule verte. (arrondir à 0,1 % près)

Extrait d'un DS donné en 1<sup>e</sup> ES-L

## Exercice 3 :

Voici la publicité d'un jeu de hasard.

Vous parait-elle honnête ?

**Néo-Bingo**

1 billet gagnant sur 2 garanti !

Achetez 4 billets pour gagner au moins 2 fois  
avec 80 % de chance !

- Épreuve : billet gagnant (succès avec  $p = \frac{1}{2}$ ) ou pas (échec)
- Achat de 4 billets Néo-Bingo donc  $n = 4$
- $S$  = nombre de billets gagnants

Il nous faut vérifier que  $P(S \geq 2) = 0.8$  avec  $S \sim B(4; 0.5)$

$$P(S \geq 2) = P(S=2) + P(S=3) + P(S=4) = \binom{50}{0} \times 0.5^2 \times 0.5^2 + \binom{50}{0} \times 0.5^3 \times 0.5^1 + \binom{50}{0} \times 0.5^4 \times 0.5^0$$

Donc  $P(S \geq 2) = \dots$

## Exemple de TP sur l'utilisation de la calculatrice ou du logiciel Geogebra

Nombre Mystère =

(Total + Total' + Total'')

Lois Binomiales

1) A l'aide de la calculatrice, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a | b | c | d | e | f | g | h | i | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |

Pour X qui suit la loi  $B(10; 0.4)$  :

$$a = P(X=0) \quad b = P(X=10) \quad c = P(X=6)$$

$$d = P(8 \leq X) \quad e = E(X) \quad f = P(4 \leq X \leq 6)$$

Pour X qui suit la loi  $B(24; 0.2)$  :

$$g = P(X=5) \quad h = P(X \leq 6) \quad i = E(X)$$

2) A l'aide de Géogebra, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a' | b' | c' | d' | e' | f' | g' | h' | i' | Total' |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |        |

Pour X qui suit la loi  $B(100; 0.52)$  :

$$a' = P(X=50) \quad b' = P(X \leq 50) \quad c' = P(40 \leq X \leq 60)$$

$$d' = P(X \leq 65) \quad e' = E(X) \quad f' = P(66 \leq X)$$

Pour X qui suit la loi  $B(200; 0.75)$  :

$$g' = E(X) \quad h' = P(140 \leq X \leq 150) \quad i' = P(X=152)$$

3) Avec la méthode de votre choix, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a'' | b'' | c'' | d'' | e'' | f'' | g'' | h'' | i'' | Total'' |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------|
|     |     |     |     |     |     |     |     |     |         |

Pour X qui suit la loi  $B(12; 0.35)$  :

$$a'' = P(X=0) \quad b'' = P(X=1) \quad c'' = P(X=2)$$

$$d'' = P(X=3) \quad e'' = E(X) \quad f'' = P(0 < X)$$

$$g'' = P(4 \leq X) \quad h'' = P(4 \leq X \leq 6) \quad i'' = P(X \leq 7)$$

Nombre Mystère = 223,22

(Total + Total' + Total'')

Lois Binomiales

1) A l'aide de la calculatrice, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a     | b     | c     | d     | e | f     | g     | h     | i   | Total  |
|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-----|--------|
| 0.006 | 0.000 | 0.111 | 0.012 | 4 | 0.563 | 0.186 | 0.811 | 4.8 | 10.489 |

Pour X qui suit la loi  $B(10; 0.4)$  :

$$a = P(X=0) \quad b = P(X=10) \quad c = P(X=6)$$

$$d = P(8 \leq X) \quad e = E(X) \quad f = P(4 \leq X \leq 6)$$

Pour X qui suit la loi  $B(24; 0.2)$  :

$$g = P(X=5) \quad h = P(X \leq 6) \quad i = E(X)$$

2) A l'aide de Géogebra, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a'    | b'    | c'    | d'    | e' | f'    | g'  | h'    | i'    | Total'  |
|-------|-------|-------|-------|----|-------|-----|-------|-------|---------|
| 0.073 | 0.382 | 0.950 | 0.997 | 52 | 0.003 | 150 | 0.527 | 0.062 | 204.994 |

Pour X qui suit la loi  $B(100; 0.52)$  :

$$a' = P(X=50) \quad b' = P(X \leq 50) \quad c' = P(40 \leq X \leq 60)$$

$$d' = P(X \leq 65) \quad e' = E(X) \quad f' = P(66 \leq X)$$

Pour X qui suit la loi  $B(200; 0.75)$  :

$$g' = E(X) \quad h' = P(140 \leq X \leq 150) \quad i' = P(X=152)$$

3) Avec la méthode de votre choix, compléter (arrondir à  $10^{-3}$ ) :

| a''   | b''   | c''   | d''   | e'' | f''   | g''   | h''   | i''   | Total'' |
|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|---------|
| 0.006 | 0.037 | 0.109 | 0.195 | 4.2 | 0.994 | 0.653 | 0.569 | 0.974 | 7.737   |

Pour X qui suit la loi  $B(12; 0.35)$  :

$$a'' = P(X=0) \quad b'' = P(X=1) \quad c'' = P(X=2)$$

$$d'' = P(X=3) \quad e'' = E(X) \quad f'' = P(0 < X)$$

$$g'' = P(4 \leq X) \quad h'' = P(4 \leq X \leq 6) \quad i'' = P(X \leq 7)$$

## Annexe 5 : Exercices

### Quelques martingales classiques

Voici quelques unes des martingales proposées par un site de jeux de casino en ligne pour gagner contre la banque (?) lorsque vous jouez à des jeux de hasard comme la roulette.



#### Martingale classique

Pour utiliser la martingale classique, il suffit de doubler vos mises après chaque perte et de revenir à votre montant de pari initial après chaque victoire. De cette manière, tout gain annule l'ensemble des pertes et vous permet de remporter un peu d'argent.

#### La grande martingale

Proche de la martingale classique, la grande martingale impose de doubler sa mise après chaque perte. De plus, vous devez ajouter une mise supplémentaire (1€ dans l'exercice). Bien sûr, après chaque victoire, vous devez revenir à votre mise initiale. Cette technique nécessite un bankroll (= totalité d'argent disponible dans le casino) plus important puisque la valeur des paris grimpe encore plus rapidement. Par contre, elle permet de gagner plus d'argent lors d'une victoire.

#### La pyramide d'Alembert

La pyramide d'Alembert consiste à augmenter sa mise d'une unité (1€ dans l'exercice) lors d'une perte et de la diminuer d'autant lors d'un gain. Cette fois, cette martingale nécessite un bankroll moindre mais ne permet pas d'effacer toutes vos pertes avec un gain.

#### La whittaker

La whittaker implique de miser l'addition de ses deux précédents paris lors d'une perte et de recommencer à la mise initiale lors d'une victoire. Cette martingale ne monte pas très vite. Ainsi, vous n'avez pas besoin de beaucoup d'argent pour l'utiliser. Par contre, elle ne permet de couvrir que deux pertes lors d'un gain.

1. Chercher dans le dictionnaire (ou sur internet) le sens du mot martingale.
2. Pour simplifier on suppose que vous jouiez à pile ou face ; si c'est pile qui sort vous perdez votre mise alors que si c'est face qui sort vous doublez votre mise (remarque importante : le jeu envisagé ici est équitable contrairement aux jeux de casino qui sont toujours favorables à celui qui l'organise). La banque peut vous faire crédit si vous êtes ruiné. Calculer votre gain ou votre perte finale avec chacune des martingales présentées pour une mise de départ de 10 € avec les différentes possibilités de trois tirages successifs suivants :

- |                  |                  |
|------------------|------------------|
| • Pile,Pile,Pile | • Face,Pile,Pile |
| • Pile,Pile,Face | • Face,Pile,Face |
| • Pile,Face,Pile | • Face,Face,Pile |
| • Pile,Face,Face | • Face,Face,Face |



### Pour finir :

*De nombreuses martingales ne sont que le rêve de leur auteur, certaines sont en fait inapplicables, quelques-unes permettent effectivement de tricher un peu. Les jeux d'argent sont en général inéquitables : quelque soit la stratégie adoptée, la probabilité de gain du casino (ou de l'État dans le cas d'une loterie) est plus importante que celle du joueur<sup>25</sup>. Dans ce type de jeu, il n'est pas possible d'inverser les chances, seulement de minimiser la probabilité de ruine du joueur. Source Wikipédia.*

### Quel jeu gratter ?

Concernant les jeux étudiés en classe (Astro, Fétiche, Banco...), vérifier les chiffres annoncés dans cet article en ligne :

<http://www.communique-presse-jeu.com/ads/jeux-de-grattage-fdj-les-plus-gagnants-quels-sont-ils/>  
Qu'en pensez-vous ?

### Pour finir :

Lire les deux articles sur les superstitions et le faux hasard...

<http://www.communique-presse-jeu.com/ads/jeux-de-hasard-croyances-et-superstitions/>

<http://www.communique-presse-jeu.com/ads/jeux-de-grattage-de-la-fdj-sont-truques/>

---

<sup>25</sup> Remarquons que cette phrase est incorrecte, imaginons en effet un jeu où le casino ne gagne « qu'une fois sur cent » mais avec un gain mille fois supérieur aux occasions où le joueur gagne : cela est certes une situation incongrue, mais elle favorise effectivement le casino au sens suivant, qui est celui qui guide vraiment la construction des jeux de casino : quelque soit la stratégie adoptée, l'espérance de gain du joueur doit être négative.

## Bibliographie de la partie B.

- [2] Louis BACHELIER. *Le Jeu, la Chance et le Hasard*, Éditions Jacques Gabay, réédition 1993.
- [4] Marcel BOLL. *La chance et les jeux de hasard*. Éditions Jacques Gabay, réédition 1992.
- [6] Gilles DELBOS et Robert RIBLET. *100 % des perdants ont tenté leur chance. L'affaire des jeux de grattage*. Seuil, 2008.
- [7] Jean-Christophe DELEDICQ. *Faites vos jeux! - 50 grands classiques du calcul des probabilités*. ACL-Les éditions du Kangourou, 2009.
- [8] Jacques DUTERTRE. *Ne jouez pas idiot!* Grancher, 2003.
- [12] Nicolas GAUVRIT. *Vous avez dit hasard ? Entre mathématiques et psychologie*. Belin, 2009.
- [15] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : quatre parcours sur les statistiques et probabilités*. 2015.

IREM&S Poitiers

**Partie C.**

**Annexes**

## L'enseignement des mathématiques par parcours

De nombreux rapports et études déplorent depuis la fin des années 1990 la perte de sens et le désintérêt au collège et au lycée pour les sciences en général et les mathématiques en particulier.

L'IREM de Poitiers a orienté ses recherches depuis 2005 afin de redonner du sens aux mathématiques enseignées du cycle 3 à la Terminale, pour montrer que cette discipline n'est pas qu'un passage obligé de la réussite scolaire en France mais qu'elle permet, en interaction avec d'autres sciences, de se questionner sur le monde qui nous entoure.

La mise en œuvre des recherches a été collective, en collaboration avec les autres IREM et l'INRP – devenu Ifé. Ces structures ont fourni un cadre institutionnel à nos travaux.

La base théorique est celle des recherches en didactique des mathématiques de Yves Chevallard<sup>1</sup>, et notamment la notion de parcours d'étude et de recherche (PER).

Le groupe collège et le groupe lycée de l'IREM de Poitiers ont conçu des parcours qui sont une alternative possible aux traditionnels chapitres des manuels scolaires. Un parcours a pour origine une question, interne ou externe aux mathématiques, et auxquelles les notions enseignées en classe doivent contribuer à répondre.

Cela permet aux élèves, nous l'espérons, de mieux comprendre pourquoi on fait des mathématiques.

Pour bâtir ces parcours, nous avons effectué des recherches :

- *historiques* (d'où viennent les notions ? quel est le contexte de leur développement ?)
- *écologique* (dans quels domaines de la vie courante et des sciences les voit-on apparaître ?)
- *didactique* (comment les transmettre ? quelle organisation en classe de mathématiques ?)

Cette notion de parcours<sup>2</sup> s'est déclinée à l'IREM de Poitiers dans les directions suivantes :

- enseignement par les grandeurs pour le groupe collège : structuration du programme et des notions autour de l'étude des grandeurs usuelles : longueurs, aires, volumes, angles, durées, prix, populations. . .
- parcours sur la géométrie, l'analyse, les statistiques et probabilités pour le groupe lycée, avec des contextualisations en lien avec diverses sciences telles la démographie, l'histoire, l'astronomie, l'optique, l'acoustique. . .

---

<sup>1</sup> Voir la bibliographie page 63 où sont regroupées quelques références à textes de Yves Chevallard.

<sup>2</sup> Voir les bibliographies pages 63 et 64 pour davantage de précisions sur la notion et des exemples de parcours

## Bibliographie : textes de Yves Chevallard

Textes disponibles au format pdf sur le site <http://yves.chevallard.free.fr/>. Pour chacun, quelques paragraphes ayant guidé nos réflexions sont indiqués ci-dessous.

- [21] ***Sur l'attractivité des disciplines enseignées à l'École.***  
"Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée? Les mathématiques dans la cité" Chap. 1 à 5. In : *Conférences de la Famille mathématique*. IUFM d'Aix-Marseille. Mar. 2009.
- [22] ***Sur l'isolement des mathématiques dans l'enseignement secondaire.***  
"Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques?" Chap. 1,2,5. In : *Colloque L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'université*. IUFM de Lorraine. Oct. 2003.
- [23] ***Sur l'utilité d'un programme scolaire et le rapport des citoyens au savoir.***  
"Des programmes, oui. Mais pour quoi faire? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement" Chap. 1,4. In : *Présentation devant le comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques*. IFÉ (ENS-Lyon). Jan. 2012.
- [24] ***Sur la nécessité pour le professeur de mathématiques de visiter d'autres sciences.***  
"La notion de PER : problèmes et avancées" Chap. 6. IUFM de Toulouse. avril 2009.
- [25] ***Sur les moments d'études, en classe, d'une question mathématique.***  
"Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique" Chap. 6. In : *Conférence dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*. Baeza (Espagne). Oct. 2005.
- [26] ***Sur les notions d'activités et parcours d'étude et de recherche.***  
"La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire" Chap. 6.1 à 6.5. In : *Conférence donnée à la 3<sup>e</sup> Université d'été Animath*. Saint-Flour. août 2004.

## Bibliographie : publications du groupe lycée de l'IREM de Poitiers

- [5] Nathalie CHEVALARIAS. “De l’assimilation d’une théorie didactique à sa mise en oeuvre dans les classes : L’exemple des parcours d’Étude et de recherche”. In : *Petit x* 94 (2014), p. 5-25.
- [11] Dominique GAUD et Nicolas MINET. “Parcours d’étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde”. In : *Petit x* 79 (2009), p. 49-71.
- [13] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l’analyse et le géométrie analytique*. 2014.
- [14] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : deux parcours sur la géométrie plane*. 2011.
- [15] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : quatre parcours sur les statistiques et probabilités*. 2015.
- [16] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : trois parcours sur les fonctions*. 2011.
- [17] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Mathématiques vivantes au lycée (fascicule 1) : algorithmique et programmation en seconde*. 2018.

# Partie D.

## Pour expérimenter

Si notre démarche vous intéresse et si vous voulez l'expérimenter, nous mettons à disposition des acheteurs de la brochure certains documents sous forme numérique.

A cette fin, nous avons ouvert un espace réservé<sup>1</sup> sur le site de l'IREM de Poitiers. Vous y trouverez des documents figurant dans les brochures et d'autres que nous utilisons dans nos classes :

- des diaporamas ;
- des ressources TICE ;
- des énoncés des études ;
- des cours ;
- des banques d'exercices ;
- des évaluations ;
- une sitographie avec hyperliens.



Contactez le secrétariat de l'IREM de Poitiers :

Bâtiment de mathématiques H3,  
SP2MI Futuroscope  
Boulevard Marie et Pierre Curie TSA 61 125  
86 073 POITIERS Cedex 9  
Tél : (+33) 05 49 45 38 77  
Mél : [secrim@math.univ-poitiers.fr](mailto:secrim@math.univ-poitiers.fr)  
Site : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>

Bonne expérimentation !

---

<sup>1</sup> Appelé *Doke-brochures* et dont l'adresse est [http://irem.univ-poitiers.fr/PF\\_brochures/dokebrochures/](http://irem.univ-poitiers.fr/PF_brochures/dokebrochures/) et dont le code QR est ci-dessus.

**Auteurs :** Aubin Joséphine, Chevalarias Nathalie, Chauvin Philippe, De Ligt Frédéric, Dhé-rissard Sébastien, Gaud Dominique, Grillet Marc, Jussiaume Loïc, Jutand Olivier, Kirch Cyrille, Lebot Bertrand, Mesnier Walter, Michel Julien, Minet Nicolas.

**Titre :** Mathématiques vivantes au lycée  
Fascicule 2 – Probabilités en première : des arbres et des jeux

**Public concerné :**  
Professeurs de lycée, enseignants en formation initiale, formateurs d'enseignants

**Date :** Octobre 2018

**Mots clés :** Arbre, Bernoulli, binomiale, casino, Chevallard, dénombrement, didactique, espé-rance étude, FDJ, gain, hasard, jeu, mise, parcours, PER, première, probabilité, programme, urne.

**Résumé :** Les travaux de recherche de l'IREM de Poitiers s'appuient sur la notion de parcours d'étude et de recherche (PER) développée par Yves Chevallard. L'objectif est de donner du sens aux mathématiques enseignées en mettant en prise, autant que possible, les objets d'enseignement du cours de mathématiques avec des faits de société ou des questions scientifiques.

Avec cette collection *Mathématiques vivantes au lycée*, l'IREM de Poitiers propose des fascicules qui sont chacun constitués d'articles de deux types :

- réflexions didactiques ou pédagogiques sur un sujet mathématique particulier ;
- parcours expérimentés en lycée général ou technologique avec des énoncés pour les élèves (études, banque d'exercices, trame de cours...) et des indications pour la gestion en classe.

Ce deuxième fascicule a pour objet l'enseignement des probabilités. Même avec la particularité de traiter de la modélisation des hasards, les probabilités fonctionnent et peuvent s'enseigner, comme tous les domaines des mathématiques, à partir de définitions et théorèmes.

- *Arbres probabilistes : outil de résolution ou objet d'enseignement indispensable ?*  
Les arbres probabilistes ont divers statuts : en plus d'illustrer une modélisation ou d'être un support du raisonnement, ils sont acceptés comme élément de la démonstration au baccalauréat. Mais depuis quand sont-ils apparus dans les programmes et les manuels ? Pourquoi faire ? Leur usage, parfois dès la classe de 3<sup>e</sup>, est-il vraiment nécessaire ? Judicieux ?
- *Comment gagner plus (ou perdre moins) aux jeux de la Française des Jeux ?*  
On présente ici un PER pour enseigner les probabilités dans les classes de pre-mière générale et technologique. Les notions au programme sont rencontrées et motivées avec des jeux de la FdJ ou du casino.

Des ressources en ligne sont accessibles sur une plate-forme via le site de l'IREM de Poitiers.

**IREM :** Bâtiment de mathématiques H3,  
SP2MI Futuroscope  
Boulevard Marie et Pierre Curie TSA 61 125  
86 073 POITIERS Cedex 9  
Tél : (+33) 05 49 45 38 77  
Mél : [secrirem@math.univ-poitiers.fr](mailto:secrirem@math.univ-poitiers.fr)  
Site : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>



ISBN : 978-2-85954-101-9  
EAN : 9782859541019



9 782859 541019