# Un parcours en Première S :

## Comment fonctionne une antenne parabolique ?

L'IREM de Poitiers travaille depuis plusieurs années à montrer aux élèves que les mathématiques enseignées au lycée peuvent les instruire sur le monde dans lequel ils vivent au-delà de la simple nécessité de réussir aux examens.
Dans la lignée des travaux théoriques de Y. Chevallard[1], nous avons été amenés à remettre en cause la conception usuelle d'un enseignement par chapitres centrés sur des contenus non motivés.
Nous avons choisi d'introduire les connaissances des programmes officiels comme des outils permettant de répondre, éventuellement de manière partielle, à un certain nombre de *grandes questions*[2] suggérées par notre société. Ces questions peuvent être de nature scientifique, historique, économique, sociale… Il s'agit d'aider les élèves à dépasser de simples constats sur le monde dans lequel ils vivent, à comprendre, vérifier et critiquer les réponses toutes faites trouvées ici et là, notamment sur internet.

Les réponses à ces grandes questions sont organisées par le professeur qui conçoit un parcours dit *parcours d'étude et de recherche*[3], articulé autour de différentes études. Celles-ci sont des moments clés qui permettent aux élèves de comprendre que de nouvelles connaissances sont nécessaires pour avancer dans la réponse à la question. Les contenus du programme ainsi rencontrés sont institutionnalisés par l'enseignant et font l'objet d'exercices techniques.
La question soulevée étant en lien avec la société, les parcours débutent souvent par une enquête faite par les élèves.
De manière schématique, on peut résumer notre démarche de la manière suivante :

<u>*Une grande question*</u>

- Enquête
- Etude 1
- Bilan de l'étude et synthèse de cours
- Exercices : appropriation des techniques vues dans la synthèse
- Etude 2
- Bilan de l'étude et synthèse de cours
- Exercices : appropriation des techniques vues dans la synthèse
- …
- Réponse à la grande question (parfois rencontrée plus tôt dans le parcours) - Justification

Nous avons organisé notre progression en première S autour de plusieurs questions qui permettent de rencontrer les notions du programme : *Comment fonctionne une antenne parabolique ? Comment se raccordent deux voies de circulation ? Comment peut-on prévoir l'évolution de la population mondiale ?...*

[1] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/
[2] Telles qu'elles sont définies par Chevallard sous la dénomination « questions à fort pouvoir générateur »
[3] Toujours Chevallard

Dans cet article, nous exposons la conception du parcours qui consiste à expliquer le fonctionnement d'une antenne parabolique. Une gestion possible, expérimentée par des professeurs, durant trois années, est détaillée et illustrée de travaux d'élèves dans une brochure de l'IREM[4].

## 1. Genèse de la recherche de grandes questions

Le point de départ de cette recherche a été une interrogation sur les programmes et en particulier sur la notion de dérivée.
Une étude historique nous a montrés l'importance de la notion de tangente à une courbe dans l'émergence de la notion de dérivée. Nous nous sommes donc tout naturellement intéressés à l'apparition et l'usage de la tangente à une courbe.

On trouve la notion de tangente à un cercle chez Euclide mais ce qui nous a intéressés, ce sont :

- la détermination de la tangente à la parabole chez Archimède, et sa supposée utilisation dans le fonctionnement des miroirs ardents ;
- la détermination des tangentes à une courbe décrites par Descartes dans sa *Géométrie*, afin d'étudier des problèmes d'optique.

Les méthodes décrites par ces deux auteurs montrent qu'il est possible de définir une tangente sans recours au concept de nombre dérivé. Par exemple, Descartes utilise la résolution d'équations, méthode inadaptée pour les courbes de degré supérieur ou égal à 3. Nous confronterons les élèves à cette difficulté lors du parcours sur le raccordement de voies de circulation.
Le programme nous imposant un cadre analytique pour étudier les courbes, nous travaillons les équations de droites (droites parallèles, perpendiculaire…) et les équations de cercles. La gestion spiralée du programme apparaît naturelle. En effet les équations de droites pourront être rencontrées lors d'un autre parcours (avec les vecteurs), le second degré sera à nouveau nécessaire dans un parcours sur l'optimisation de quantité.

Reste une difficulté importante : pourquoi les élèves s'intéresseraient-ils à cette question purement mathématique qu'est la détermination de la tangente à la parabole, si on ne leur montre pas en quoi cette connaissance est utile pour comprendre le monde qui nous entoure ?

Une deuxième phase de notre recherche a été d'étudier l'écologie[5] de la notion de tangente à une courbe : où vit cette notion en et hors les mathématiques ? Quels sont les usages de cette notion ? A partir de ces recherches, nous avons choisi deux situations en prise avec la vie des élèves :

- le fonctionnement d'une antenne parabolique,
- le raccordement de deux voies de circulation

d'où résulteront deux grandes questions. Les réponses à ces deux questions permettront d'introduire complètement la notion de dérivée.

[4] *Trois parcours en 1$^{ère}$ S* de l'IREM de Poitiers, à paraître fin 2014
[5] Il s'agit d'étudier les raisons pour lesquelles un savoir existe et prend son sens.

## 2. Organisation mathématique

Le fonctionnement d'une antenne parabolique repose sur la propriété de la parabole suivante : *Toute droite (D) parallèle à l'axe de la parabole la coupe en un point A. La droite symétrique de (D) par rapport à la normale en A passe par le foyer de la parabole.*
Les paraboles seront pour les élèves les courbes de fonction du type $f(x) = ax^2$. On se placera systématiquement dans un repère orthonormé. Le parcours nous permettra de travailler sur :

- la tangente à un cercle,
- les équations de cercles et de droites (et tout le travail de géométrie analytique pour passer d'une forme à une autre comme démontrer que des droites sont parallèles ou perpendiculaires),
- les équations du second degré (lors de la recherche de l'intersection de droites / cercles ou bien cercles /cercles),
- les équations paramétriques du second degré (recherche de la tangente à un cercle donné passant par un point donné),
- la recherche d'une définition de la tangente à une parabole,
- la réponse à la grande question.

Durant quatre semaines, les élèves vont travailler sur les équations de courbes (cercle, droites et parabole), les tangentes, les équations du second degré… et pratiquer beaucoup de calcul littéral.

## 3. Organisation didactique : Comment fonctionne une antenne parabolique ?

Pour apporter la réponse à cette question, nous sommes amenés à baliser un parcours qui part des connaissances des élèves sur la réflexion d'une onde sur un plan puis sur une surface courbe (cylindre, paraboloïde). Plus précisément, nous l'avons conçu en cinq temps : deux enquêtes, deux études faites en classe et un temps de finalisation (avec l'aide du professeur).

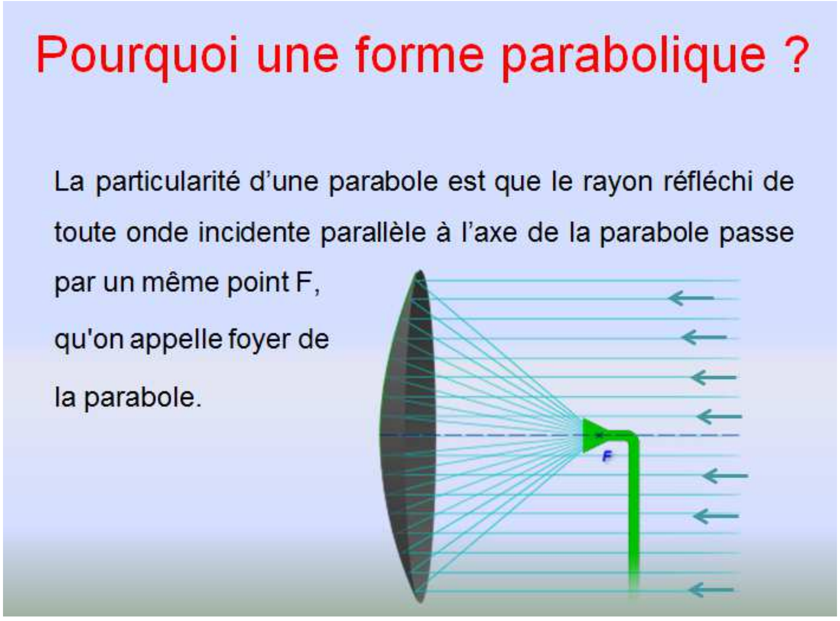
**Enquête 1 :** Recherche sur les antennes paraboliques
**Enquête 2 :** Réflexion sur un miroir plan
**Étude 1 :** Miroir cylindrique (en trois parties)
Ce temps, en lien avec la modélisation avec *GeoGebra*, conduit à institutionnaliser les connaissances sur les équations de droites, de cercles et les équations du second degré.
**Étude 2 :** Miroir parabolique
Ce temps amène à préciser la notion de tangente à une parabole comme sécante (non parallèle à l'axe de la parabole) coupant la parabole en un seul point.
**Final :** Retour sur le fonctionnement de la parabole. Justification.

Il faut noter que les enquêtes font apparaître la complexité de la question. Une démarche importante apparaît : celle de la modélisation. Avant de commencer l'étude de la réponse, nous insistons sur les hypothèses de cette modélisation.

## 4. Le parcours

### Enquête 1 : Faire une recherche sur les antennes paraboliques.

C’est une première rencontre avec la question posée : cette enquête doit permettre aux élèves de s’approprier la question. Ils doivent faire des recherches et, pour certains, en exposer les résultats devant la classe. Un bilan est fait avec le professeur qui montre différentes images liées aux réponses que les élèves auront probablement proposées.




Le final du parcours consistera à prouver cette caractéristique.

### Enquête 2 : Réflexion sur un miroir plan.

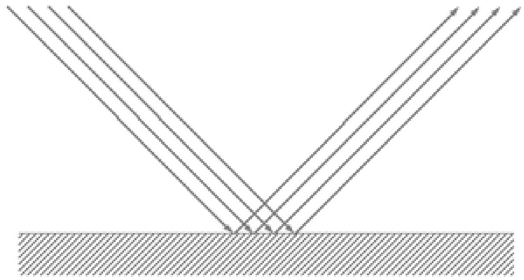
Comment se réfléchit un rayon (lumineux par exemple) sur un miroir plan ?
Quelle loi d’optique permet de justifier la réponse ?

Cette seconde enquête peut faire apparaître plusieurs points que l’enseignant pourra compléter :

- la réflexion doit être spéculaire ;
- la réflexion est valable pour toutes les ondes ;
- la réflexion sur une surface plane a lieu dans le plan d’incidence ;
- on peut toujours se ramener dans le plan d’incidence ;
- l’angle d’incidence est égal à l’angle de réflexion.

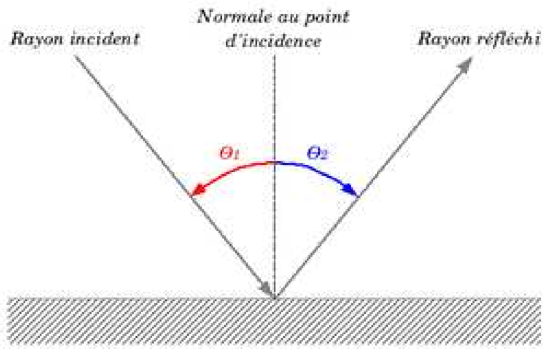
Par cette enquête, nous souhaitons fixer la *modélisation* : la réflexion est spéculaire et dépend de la forme de la surface de réflexion (plane, circulaire, parabolique).
Nous souhaitons insister sur les connaissances acquises en seconde, en sciences physiques, sur la loi de la réflexion de Descartes : la notion de plan d’incidence et la loi des angles. Nous prévoyons quelques informations supplémentaires, nécessaires pour compléter la synthèse de ces deux enquêtes.

*Réflexion spéculaire*
*(http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9flexion_optique )*
*La réflexion est dite spéculaire lorsque le rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi unique. Idéalement, l'énergie du rayon incident se retrouve totalement dans le rayon réfléchi, en pratique une partie de l'énergie peut être absorbée ou diffusée au niveau de l'interface.*



*La réflexion en optique géométrique (article Wikipédia)*

*La réflexion en optique géométrique obéit aux lois de Descartes. Le rayon lumineux est dit incident avant d'avoir rencontré la surface réfléchissante, il est dit réfléchi après. Le point de rencontre du rayon incident et de la surface réfléchissante est appelé point d'incidence.*

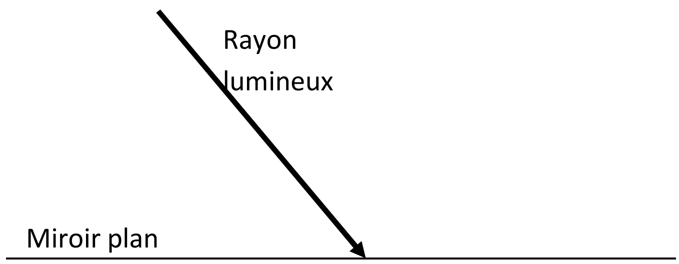



*Le plan contenant le rayon incident et la normale à la surface réfléchissante au point d'incidence est dit plan d'incidence. On appelle angle d'incidence l'angle* $\theta_1$ *pris entre la normale au point d'incidence et le rayon incident. On appelle angle de réflexion l'angle* $\theta_2$ *pris entre la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi.*
*Moyennant ces définitions la loi de la réflexion s'énonce ainsi :*

- *le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans le plan d'incidence*
- $\theta_1 = \theta_2$.

Cette loi a été vue par les élèves en seconde en physique, mais seulement dans le cas d'une surface plane. Elle sera à la base de tous les travaux dans ce parcours.

On retient ce type de configuration.



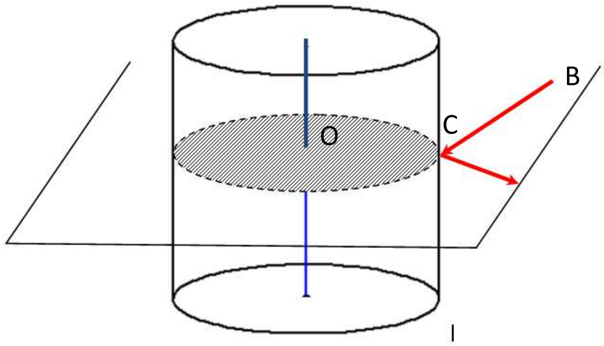

Ces compléments peuvent être présentés à l'aide d'un diaporama[6].

[6] Il sera disponible sur le site de l'IREM de Poitiers lors de la parution de la brochure

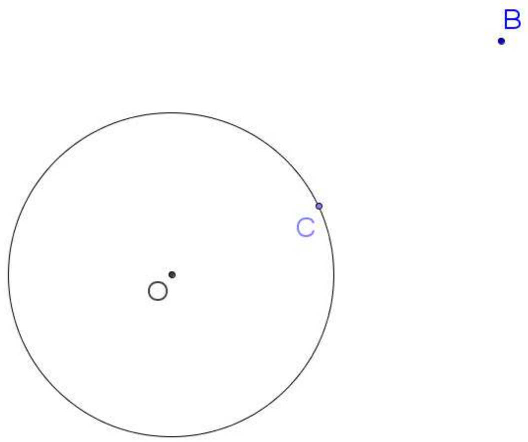
## Étude 1 : Miroir cylindrique

### Partie 1 :

Construction à la règle et au compas



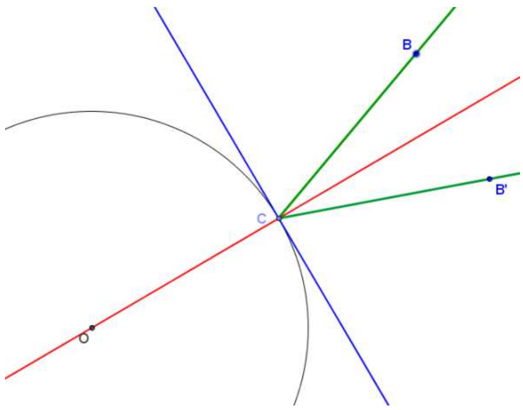

Un miroir cylindrique reçoit en C un rayon lumineux issu de B (extérieur au miroir) et orthogonal à l'axe du miroir, ce qui permet la représentation plane suivante.




1. Construire le rayon réfléchi du rayon (BC). Justifier cette construction en argumentant à l'aide de la loi d'optique rappelée précédemment. Expliquer les étapes de la construction.

2. Construire les rayons issus de B qui ne se réfléchissent pas.

*Question 1 :*




Les rayons considérés sont toujours orthogonaux à l'axe du cylindre. On peut ainsi se ramener à un problème plan (le plan d'incidence).

Nous prévoyons que les élèves vont tracer la demi-droite symétrique au rayon incident par rapport au rayon (OC). Mais nous devons exiger une argumentation par rapport à la loi donnée pour une surface plane.

Cela devrait amener les élèves à parler de la tangente et à définir la normale à un cercle et plus généralement voir le rapport entre l'orthogonalité de deux droites et l'orthogonalité d'une droite et d'une courbe.

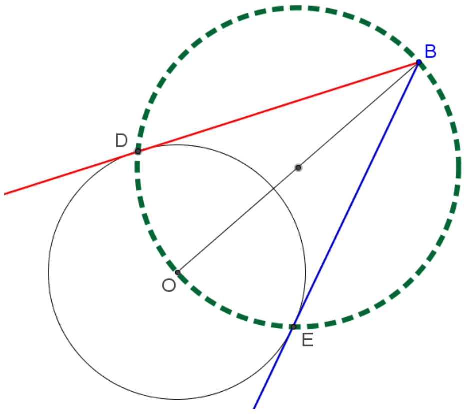
L'argumentation attendue doit faire le lien avec la loi de Descartes. Un zoom autour du point C montre que le cercle peut être approché localement par un segment (cf. la conception d'une courbe pour le marquis de l'Hospital[7]). La tangente peut alors être vue comme la droite joignant deux points infiniment proches, la normale étant la perpendiculaire à cette droite en ce lieu. Autrement dit, on peut utiliser la loi de la réflexion de Descartes, si on l'applique localement à la tangente au cercle en C.

[7] Mathématicien français (1661-1704). Voir partie historique dans la brochure à paraître déjà mentionnée.

*Question 2 :*

S’étant placé à l’extérieur (en B), les points limites pour lesquels il y a réflexion sont ceux dont sont issues les tangentes au cercle passant par B.

La construction attendue est la suivante, qui sera faite, dans un second temps sur *GeoGebra*.




On peut imaginer que les élèves penseront assez rapidement à construire les tangentes au cercle passant par B, mais le professeur devra exiger une explication de la construction (et ne pas se contenter d’une construction approximative). Il devra aider certains élèves pour faire cette construction qui n’utilise qu’une propriété vue au collège et revue en seconde :

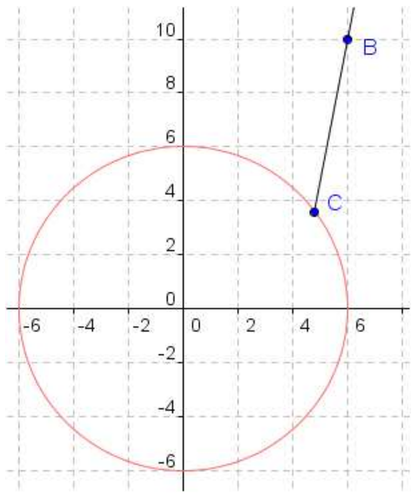
> *Tout point M du cercle de diamètre [OB], différent de O et B, fournit un triangle OMB rectangle en M.*

## Étude 1 : Miroir cylindrique

**Partie 2 :** *Rayon réfléchi* (avec *GeoGebra*)

Construire le rayon réfléchi du rayon (BC) sur *GeoGebra* avec le cercle $C_1$ de centre O, de rayon 6 et les points B(6 ; 10) et C(4,8 ; 3,6). On vérifiera que C appartient au cercle.

Retrouver le résultat donné par *GeoGebra* au sujet de l’équation du rayon réfléchi.




Pour déterminer une équation du rayon réfléchi, il suffit de déterminer les coordonnées de B’ symétrique de B par rapport à (OC). Une analyse avec les élèves doit permettre de déterminer une démarche possible :

- trouver une équation de la droite (OC)
- trouver les coordonnées de B’ en remarquant notamment que (BB’) est perpendiculaire à (OC), que le milieu de [BB’] appartient à (OC), que CB = CB', ...

Les élèves doivent utiliser les équations de droites (cartésiennes ou/et réduites). On choisit ce moment pour revoir et compléter les connaissances par un premier cours de géométrie analytique sur les équations de droites de coefficient directeur connu et passant par un point, dont une formule générale est $y = m(x - x_A) + y_A$.
Cette formule est importante compte tenu de l’objectif visé à plus long terme, à savoir une équation canonique de la tangente à une courbe.
Le cours contiendra :

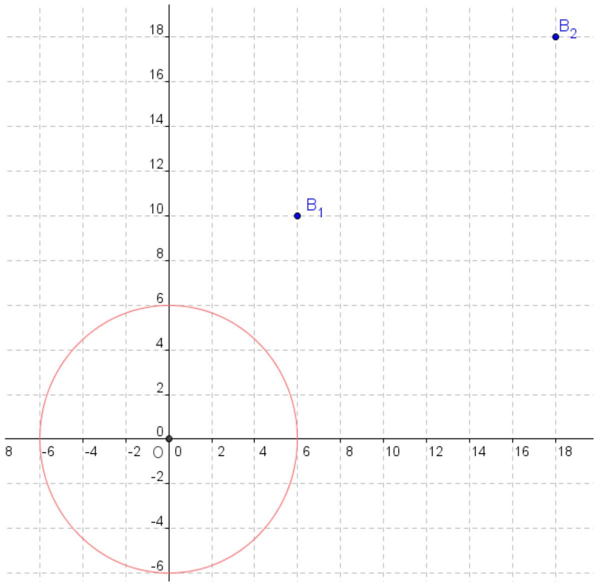
- les équations cartésiennes et réduites de droites ;
- les conditions de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites dont on connaît les équations réduites (bien que non exigible, la condition d'orthogonalité $mm' = -1$ se révèle pratique et rapide à établir) ;
- les coordonnées du milieu d'un segment.

Des exercices didactiques sont alors possibles pour maîtriser les techniques telles que passer des équations cartésiennes aux équations réduites et inversement, trouver des équations de droites à partir de diverses données, ou encore vérifier le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites. Ces exercices font intervenir des intersections de droites qui permettront de travailler les systèmes de deux équations à deux inconnues.

## Étude 1 : Miroir cylindrique

**Partie 3 :** *Rayon ne se réfléchissant pas* (avec *GeoGebra*)

1. Faire la construction sur *GeoGebra* avec le cercle $C_1$ de centre O, de rayon 6 et le(s) rayon(s) non réfléchis venant de $B_1(6\ ;\ 10)$. Justifiez tous les résultats qui apparaissent dans la fenêtre algèbre.
2. Faire la construction sur *GeoGebra* avec le cercle $C_1$ de centre O, de rayon 6 et le(s) rayon(s) non réfléchis venant de $B_2(18\ ;18)$. Justifiez tous les résultats qui apparaissent dans la fenêtre algèbre.




A cette occasion, nous proposons de réfléchir systématiquement à ce que le logiciel *GeoGebra* écrit dans la fenêtre algèbre.

- si on trace une droite, apparait une équation du type $ax + by + c = 0$ ;
- si on trace un cercle, apparait une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
  S'interroger sur le lien entre objets géométriques et équations permet d'introduire les représentations cartésiennes de ces objets géométriques.

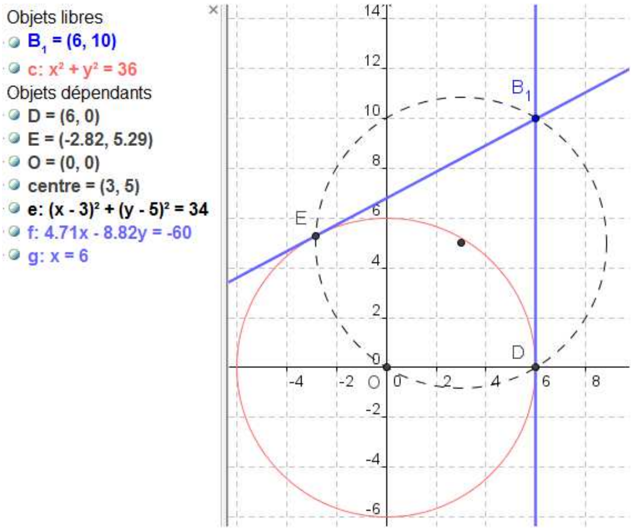
***Question 1 :***

Les élèves doivent reconnaitre l'équation d'une des tangentes qui est de la forme $x = a$.
Les équations de cercles leur sont inconnues. Ils doivent alors retrouver ces équations, à l'aide de l'enseignant, en se référant à la formule, vue en seconde, donnant la distance entre deux points. Elles permettront de déduire les coordonnées des points D et E à la fin de cette étude.
Nous ne sous-estimons pas la difficulté, bien réelle, qui consiste à considérer un ensemble de points comme étant représenté par une équation cartésienne. Cette difficulté, qui apparaît en seconde à propos des équations réduites de droites, peut alors être traitée avec les équations de cercles.

La recherche des coordonnées des points D et E conduit à résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ (x-3)^2+(y-5)^2=34 \end{cases}$ qui peut se transformer en $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x^2+y^2-6x-10y=0 \end{cases}$ ou encore en $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x=6-\frac{5}{3}\,y \end{cases}$

La substitution amène à l'équation $\frac{34}{9}y^2 - 20y = 0$ qui peut être résolue.

Outre les contenus de géométrie analytique rencontrés, cette étude propose en situation, de nombreux calculs algébriques et littéraux.




Une deuxième synthèse de cours peut être faite, lors de l'étude, sur les équations de cercles.
Le passage de la forme développée $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ à la forme canonique$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$, sur des exemples numériques, prépare la résolution des équations du second degré dans le cas général. On peut alors terminer la résolution de la question 1. Puis des exercices classiques permettent de maîtriser la technique.

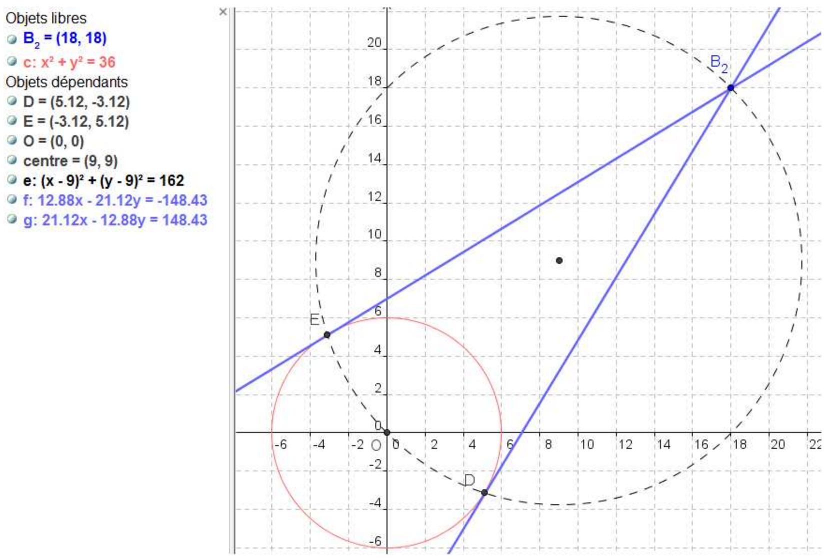
***Question 2 :***
Les élèves doivent réinvestir la méthode vue à la question précédente (recherche du cercle de diamètre [$OB_2$] et intersection de ce cercle avec le cercle de centre O et de rayon 6).

Les calculs conduisent alors au système : $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ (x-9)^2+(y-9)^2=162 \end{cases}$

Puis au système $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x^2+y^2-18x-18y=0 \end{cases}$

Ou encore $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y-16=0 \end{cases}$

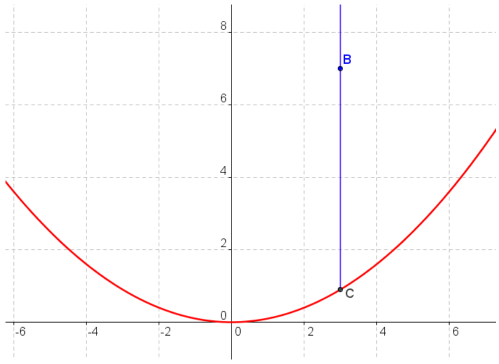



Contrairement au cas précédent, les élèves ne peuvent pas factoriser $y^2 - 2y - 16$.

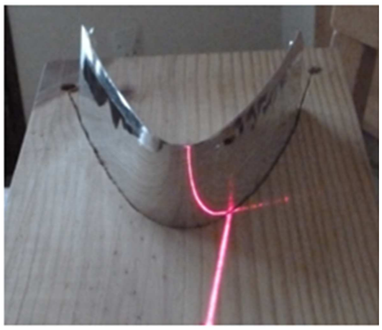
La résolution de l’équation du second degré peut alors être dirigée par le professeur en passant par la forme canonique déjà vue pour les cercles.
En bilan, un cours général sur les équations du second degré peut être fait. Ce cours ne mentionne que la méthode conduisant à la détermination des racines. Le signe du trinôme, inutile ici, sera institutionnalisé dans un parcours ultérieur sur l’optimisation.

### Etude 2 : Miroir parabolique

Donner une procédure qui permettrait de déterminer graphiquement le rayon réfléchi de l’onde incidente parallèle à l’axe de la parabole. Justifier.
Prenons une parabole d’équation $y = 0{,}1\ x^2$. Déterminer algébriquement le rayon réfléchi de l’onde issue de B (3 ; 7) et parallèle à l’axe de la parabole. Justifier.




La surface n’étant pas plane, les élèves doivent de nouveau se demander comment relier cette situation à la loi énoncée par les physiciens sur une surface plane. Contrairement au cercle, aucune symétrie n’apparaît.
Nous prévoyons, si besoin est, une expérience avec du matériel : il s’agit d’un petit rayon laser emprunté dans le laboratoire de physique, d’une planche évidée suivant une parabole et de papier miroir acheté en papeterie.
Le faisceau rasant permet d’illustrer ce qui se passe dans un plan contenant une parabole.

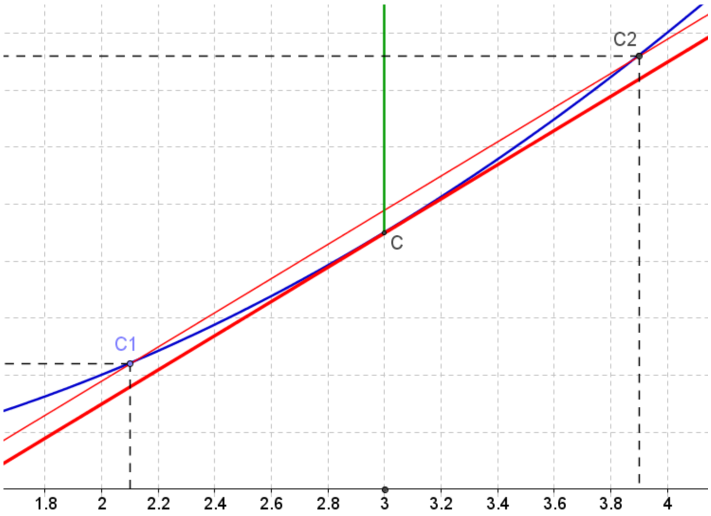


On peut aussi utiliser une vidéo illustrant l’expérience.

Comme auparavant, les élèves doivent donner un programme de construction de l’onde réfléchie et retrouver les équations de courbes liées à cette construction affichées dans *GeoGebra*.
La réponse attendue est le tracé de la normale à la courbe qui peut s’obtenir comme perpendiculaire à la tangente.
La détermination de la tangente au cercle est connue des élèves : c’est la perpendiculaire au rayon. Cette seconde étude permet de préciser la notion de tangente à un autre type de courbes.
La tangente à la parabole en un point ne peut pas se déterminer facilement, ce qui conduit à la définition provisoire suivante : c’est une droite qui passe par un point de la parabole, qui n’est pas parallèle à l’axe de la parabole et qui ne coupe celle-ci qu’en un seul point.

On laissera les élèves autonomes pour la recherche. On peut imaginer plusieurs possibilités :

- En prenant deux points sur la parabole de part et d’autre de C(3 ; 0,9) dont les abscisses sont symétriques par rapport à celle de C et en traçant la parallèle à ($C_1C_2$) passant par C (technique valable pour le cercle[8]). La notion mathématique sous-jacente est la dérivée symétrique très utile aux physiciens[9] :




Prenons les points $C_1(a - h ; 0{,}1(a - h)^2)$ et $C_2(a + h ; 0{,}1(a + h)^2)$.

Le coefficient directeur de la droite $(C_1C_2)$ est 0,2a.

Nous avons obtenu le coefficient directeur (exact) de la tangente !

C'est une propriété de la parabole.

Reste à vérifier - d'abord sur un exemple - si cette droite coupe bien la parabole en un seul point. La parallèle à $(C_1C_2)$ passant par C(3 ; 0,9) a pour équation $y = 0{,}6(x - 3) + 0{,}9$.
Le nombre de points d'intersection de cette droite avec la parabole est fourni par la résolution du système $\begin{cases} y = 0{,}1x^2 \\ y = 0{,}6(x-3)+0{,}9 \end{cases}$. Cela amène à résoudre $0{,}1x^2 = 0{,}6x - 0{,}9$, qui équivaut à $x^2 - 6x + 9 = 0$ et fournit donc $x = 3$.
Cette droite est donc bien la tangente définie comme ci-dessus.

- En zoomant autour de C (cf. l'étude précédente avec la tangente au cercle), on ramène localement la courbe à un segment passant par C. La tangente est alors confondue avec ce segment et on peut ainsi obtenir la normale. Cette deuxième méthode ne peut pas être mise sous forme de procédure algorithmique simple mais elle donne une bonne idée de ce qu'est une approximation affine.

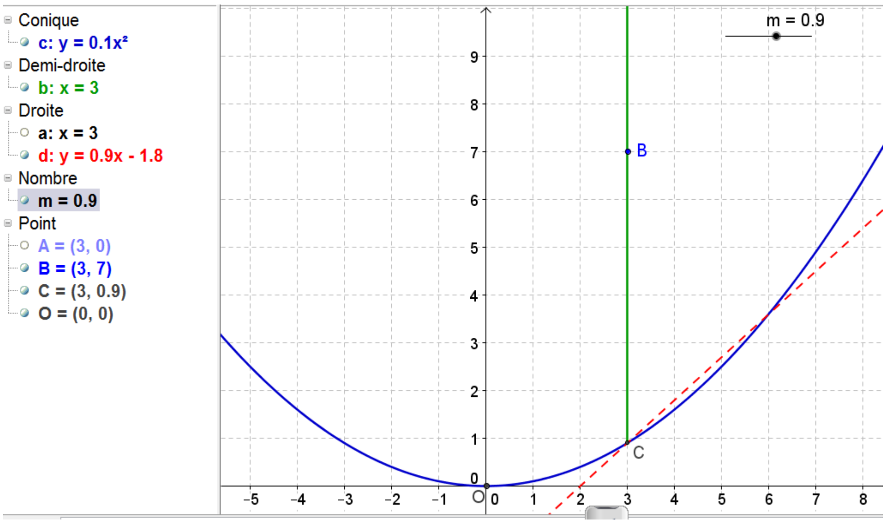
- En faisant apparaître un cercle tangent à la parabole au point C (un peu à la manière de Descartes), la tangente au cercle en C étant la tangente à la parabole. Cette méthode permet de s'appuyer sur des notions connues mais ne sera pas opérationnelle algébriquement.

- En faisant pivoter une droite non verticale autour de C, la droite ne doit pas recouper la parabole ailleurs qu'en C.

[8] Non valable pour l'hyperbole !
[9] Article de Repère IREM n°74 janvier 2009 (Caroline DUCOS)

Une droite qui pivote autour de C(3 ; 0,9) a pour équation :
$y = m(x - 3) + 0{,}9$

On doit alors faire en sorte que la parabole et cette droite ne possède qu'un seul point d'intersection.




On cherche le paramètre m tel que l'équation $0{,}1x^2 - m(x - 3) - 0{,}9 = 0$ ne possède qu'une solution ($x = 3$).
$\Delta = m^2 - 4(3m - 0{,}9) = 0$ ce qui conduit à $m^2 - 12m + 3{,}6 = 0$ soit $m = 0{,}6$.
On retrouve le résultat précédent.

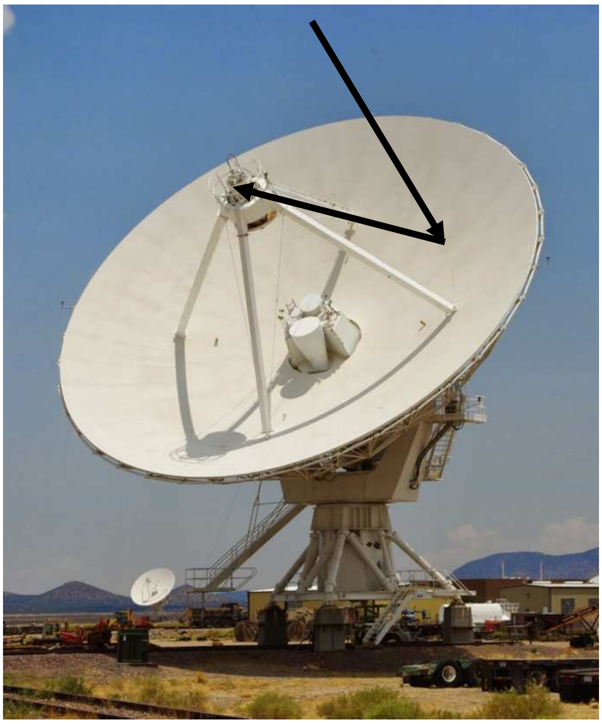
Il est alors possible d'obtenir une équation de la normale $y = -\frac{1}{0{,}6}(x - 3) + 0{,}9$. Comme on l'a fait dans le cas du miroir cylindrique, on peut alors déterminer l'équation du rayon réfléchi en calculant les coordonnées de B' symétrique de B par rapport à la normale.

Si nous comparons ces quatre approches, nous constatons que la première est valable pour le cercle et la parabole, la deuxième permet de donner du sens mais ne donne pas naissance à une formule générale, la troisième s'avère très compliquée à mettre en œuvre ; enfin, la dernière est plus algorithmique et permet l'obtention d'une formule générale.
Il est à noter que nous avons choisi une équation de parabole $y = 0{,}1\,x^2$ car son tracé dans une base orthonormée, facilite les constructions géométriques, la courbe étant plus « évasée » que la parabole d'équation $y = x^2$.
Le professeur stoppe alors provisoirement l'étude pour travailler la recherche de tangente dans des exercices techniques.

**Final :** Explication du fonctionnement de l'antenne : justification mathématique (convergence des rayons réfléchis vers le foyer de la parabole, pour des rayons incidents parallèles à l'axe).

Cette dernière partie consiste, avec toutes les nouvelles notions, à démontrer le fonctionnement propre à la parabole. On peut s'attendre à ce que certains élèves ne le fassent que sur un exemple générique. D'autres essaieront de le démontrer dans le cas général.

Le parcours se termine avec l'exercice montrant l'existence du foyer, point fixe par-lequel passent tous les rayons réfléchis d'onde incidentes parallèles à l'axe de la parabole.


http://f8izt.blogspot.fr/2014/01/vla-new-mexico.html

L'étude du problème doit se faire avec la classe afin de déterminer la procédure à mettre en place c'est-à-dire décomposer le problème en sous questions. On peut faire une exploration avec *GeoGebra*.

Plusieurs niveaux sont possibles selon les élèves :

*Niveau 1* :

Rayon incident venant de B(2 ; 7) arrivant en A(2 ; 4) sur la parabole d'équation $y = x^2$

*Niveau 2 :*

Rayon incident venant de B(a ; b) arrivant en A(a ; a²) sur la parabole d'équation $y = x^2$

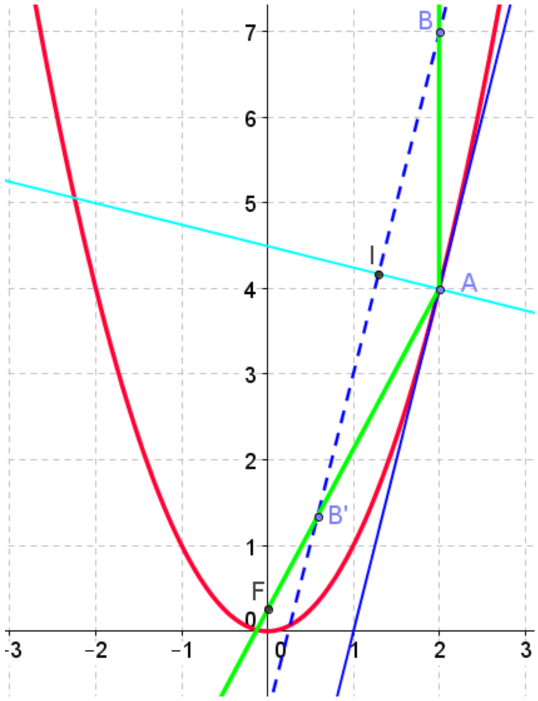
*Niveau 3 :*

Rayon incident arrivant en A(a ; a²) sur une parabole d'équation $y = px^2$ (avec p réel)

Une recherche collective avec la classe devra donner les étapes de la démonstration.

Quelques exemples de démarches possibles :

**Démarche 1** : *Avec un milieu*



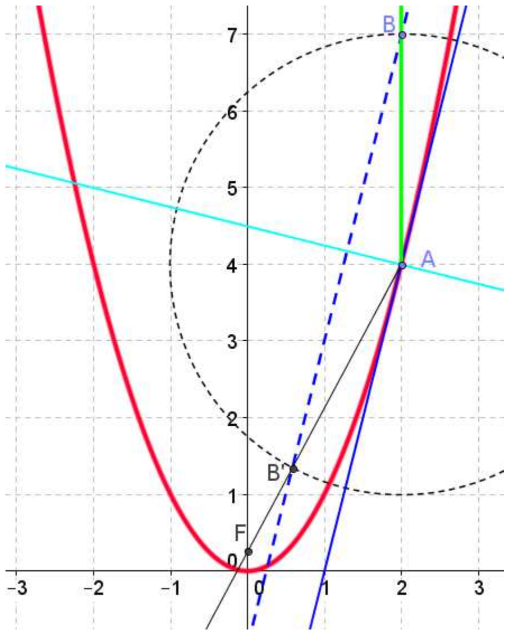

Déterminer :
- une équation du rayon parallèle à l'axe de la parabole, passant par A ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A ;

Pour localiser le symétrique B' de B par rapport à la normale, déterminer :
- une équation de la parallèle à la tangente en B ;
- les coordonnées du point I d'intersection de cette droite avec la normale ;
- les coordonnées du point B' tel que I soit milieu de [BB'].

Déterminer l'équation du rayon réfléchi (AB')

Déterminer enfin les coordonnées du point d'intersection de ce rayon réfléchi avec l'axe des ordonnées.

**Démarche 2** :
*Intersection d'un cercle et d'une droite*




Déterminer :
- une équation du rayon parallèle à l'axe de la parabole, passant par A ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A.

Pour localiser le symétrique B' de B par rapport à la normale, déterminer :
- une équation de la parallèle (D) à la tangente en B ;
- une équation du cercle de centre A et de rayon AB ;
- les coordonnées du point d'intersection B' de ce cercle et de la droite (D).

Déterminer l'équation du rayon réfléchi (AB')
Déterminer enfin les coordonnées du point d'intersection de ce rayon réfléchi avec l'axe des ordonnées.

**Démarche 3** : *Construction d'un losange*

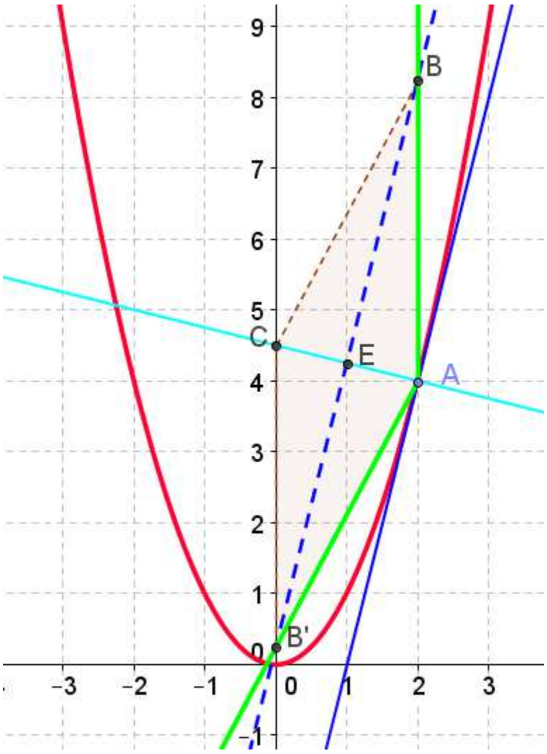
La recherche collective avec la classe doit donner les étapes de la démonstration. Par exemple :

Déterminer :

- les coordonnées d'un point A de la parabole ayant pour abscisse 2 ;
- une équation du rayon parallèle à l'axe de la parabole, passant par A ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A.

Pour localiser le symétrique B' d'un point du rayon incident, on va s'aider d'un losange :

La normale coupe l'axe des ordonnées en C,
Le point B est l'intersection de la verticale passant par A et de la médiatrice de [AC]. Enfin, le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC).




Nous avons montré dans cet article tout le travail fait en amont avant d'expérimenter en classe : travail historique, écologique, recherche d'un parcours, analyse *a priori* du déroulement du parcours. Il a été testé durant trois ans avec satisfaction par des professeurs dans leur classe de $1^{\text{ère}}$ S. De nombreux compléments figurent dans la brochure à paraître. Nous y détaillons ce qui s'est réellement passé dans les classes ainsi que des productions d'enquêtes faites par les élèves.
Nous invitons les lecteurs intéressés à la consulter !